Sitzungsber. Abt. II (1997) 206: 253–266

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Operatormethoden für q-Identitäten VI: Geordnete Wurzelbäume und q-Catalan-Zahlen

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 16. Oktober 1997
durch das w. M. Johann Cigler)

Für die Catalanzahlen $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ gibt es mehrere Rekurrenzrelationen, z.B.

$$C_n = \sum_{k+l=n-1} C_k C_l \tag{$*$}$$

oder

$$C_{n-1} = \sum_{i\geq 1} \sum_{n_1+\cdots+n_i=n-1} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \ldots C_{n_i-1}. \tag{$**$}$$

Gleichung $(*)$ folgt aus der Tatsache, daß C_n die Anzahl aller Binärbäume mit n Knoten ist, während $(**)$ anzeigt, daß C_{n-1} auch die geordneten Wurzelbäume mit n Knoten abzählt. Alle bekannten q-Analoga der Catalanzahlen sind Verallgemeinerungen von $(*)$. In der vorliegenden Note wird eine Verallgemeinerung vorgeschlagen, die auch den zweiten Fall umfaßt.

Sei T die Menge aller geordneten Wurzelbäume t mit $|t| < \infty$ Knoten. Ein Element $t \in T$ besteht aus einem ausgezeichneten Knoten, der Wurzel, und im Fall $|t| > 1$ außerdem noch einer Menge von $k \geq 1$ Teilbäumen $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$, die nach wachsenden Indizes geordnet sind. Wir können jedes $t \in T$ durch ein Wort $c(t)$ der Länge $n = |t|$ über dem Alphabet $\{x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ codieren (vgl. z.B. [5]). Dabei entspricht dem

Baum, der nur aus der Wurzel besteht, das Codewort x_{-1} und einem Baum, dessen Wurzel dem Grad k besitzt, das Codewort

$$c(t) = c(t_0)c(t_1)\dots c(t_{k-1})x_{k-1}.$$

Man zeigt sofort mit Induktion, daß das eine Bijektion zwischen der Menge T_n aller Bäume mit n Knoten und der Menge W_n aller Wörter $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ mit $i_1 + \dots i_k \leq -1$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$ und $i_1 + \dots + i_n = -1$ liefert.

Für $n = 1, 2, 3, 4$ ergeben sich dabei die folgenden Codewörter:

$$\begin{array}{ll}
n = 1: & x_{-1} \\
n = 2: & x_{-1}x_0 \\
n = 3: & x_{-1}x_0x_0, x_{-1}x_{-1}x_1 \\
n = 4: & x_{-1}x_0x_0x_0, x_{-1}x_{-1}x_1x_0, x_{-1}x_0x_{-1}x_1, x_{-1}x_{-1}x_0x_1, \\
 & x_{-1}x_{-1}x_{-1}x_2
\end{array}$$

Man sieht sofort, daß $c(t_0)$ das längste Anfangsstück $x_{i_1}\dots x_{i_l}$ ist mit $i_1 + \dots + i_l = -1, c(t_1)$ das längste derartige Anfangsstück des restlichen Wortes $x_{i_l+1}\cdots x_{i_n}$, usw.

Ein Wort aus W_n codiert auch einen (positiven) Gitterweg a im $\mathbb{R}^2$, der von (0, 0) nach $(n, 1)$ geht und niemals auf die x-Achse zurückkehrt, nämlich

$$a: (0,0) \to (1, -i_1) \to (2, -i_1 - i_2) \to \dots \to (n, -i_1 - i_2 - \dots - i_n).$$

Sei A_n die Menge dieser Gitterwege der Länge n. Dem Symbol x_{-1} entspricht ein Anstieg der Höhe 1 und einem Symbol x_i, $i \geq 0$, ein Abstieg der Höhe i (wobei für $i = 0$ ein horizontales Wegstück ebenfalls als Abstieg bezeichnet wird).

Beschränkt man sich auf Wörter über dem Alphabet $\{x_{-1}, x_1\}$, so entsprechen diesen einerseits binäre Wurzelbäume (wo von jedem Knoten entweder 2 oder 0 Teilbäume weggehen) und andererseits Gitterwege, wo jeder Abstieg die Höhe 1 besitzt.

Die kanonische Zuordnung, die jedem geordneten Wurzelbaum t mit n Knoten einen binären Wurzelbaum b mit $2n-1$ Knoten zuordnet, wird durch $\varphi(x_{i_1}\dots x_{i_n}) = \varphi(x_{i_1})\dots\varphi(x_{i_n})$ gegeben, wobei $\varphi(x_{-1}) = x_{-1}$ und $\varphi(x_{k-1}) = x_{-1}x_1^k$ für $k \geq 1$ gilt.

Beispielsweise ist $\varphi(x_{-1}x_0x_{-1}x_1) = x_{-1}(x_{-1}x_1)x_{-1}(x_{-1}x_1x_1)$. Den Endknoten = Blättern entsprechen die Symbole x_{-1} und den inneren Knoten die Symbole $x_{k-1}, k \geq 1$, weil von diesen k Teilbäume weggehen. Für $t \in T$ bezeichne $i(t)$ die Anzahl der inneren Knoten von t.

Wir ordnen nun jedem Baum $t \in T$ ein Gewicht $w(t)$ folgendermaßen zu:

Ist $|t| = 1$, so sei $w(t) = 1$.

Hat t die Teilbäume $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$ (in dieser Reihenfolge), dann sei

$$w(t) = \prod_{l=0}^{k-1} q^{l \cdot i(t_l)} w(t_l). \tag{1}$$

Das bedeutet folgendes: Jeder Endknoten hat das Gewicht 1, trägt also nichts wesentliches zum Gesamtgewicht bei. Sei s ein Baum und $v \in s$ ein innerer Knoten vom Gewicht $w(v)$. Tritt s als l-ter Teilbaum von t auf, dann hat v als Element von t das Gewicht $q^l w(v)$.

Man kann daher $w(t)$ auch erhalten, indem man jedem Knoten v eine natürliche Zahl $\alpha(v) \geq 0$ zuordnet, wobei der Wurzel die Zahl 0 zugeordnet ist und der Wurzel des l-ten Teilbaumes, der von v ausgeht, die Zahl $\alpha(v) + l$ entspricht. Dann ist $w(t) = \Pi q^{\alpha(v)}$, wobei das Produkt über alle inneren Knoten von t zu erstrecken ist. Das kann auch folgendermaßen beschrieben werden: Wir durchlaufen den Baum in der Reihenfolge: Wurzel, $t_{k-1}, \ldots, t_0$ und numerieren die inneren Knoten der Reihe nach durch: $v_1 =$ Wurzel, $v_2, \ldots v_m$, wobei $m = i(t)$ ist. In der Codierung $c(t)$ entspricht dem v_i das i-te Element x_j mit $j \geq 0$ von rechts. Bezeichnet man mit $t(v)$ den Teilbaum von t, der v als Wurzel besitzt, so existiert für jedes v_{i+1} ein maximales $j \leq i$ mit $v_{i+1} \in t(v_j)$. Ist dabei v_{i+1} die Wurzel des l-ten Teilbaumes von $t(v_j), l \geq 0$, so ist $\alpha(v_{i+1}) = \alpha(v_j) + l$. Das Gewicht des Baumes $w(t)$ ist dann $q^{\alpha(v_1)+\cdots+\alpha(v_m)}$. Ist t ein r-ärer Wurzelbaum, dh. gehen von jedem inneren Knoten genau $r \geq 2$ Kanten weg, besteht also $c(t)$ nur aus Wörtern über dem Alphabet $\{x_{-1}, x_{r-1}\}$, so ist $|t| = ri(t) + 1$. In diesem Fall bezeichnen wir die Anzahl $i(t)$ der inneren Knoten mit n und schreiben statt $\alpha(v_i)$ kurz α_i. Die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ erfüllt dann $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i + r - 1$. Durch diese Folge ist der r-äre Wurzelbaum eindeutig festgelegt. Die r-ären Wurzelbäume mit $i(t) = n$ haben dieselbe Codierung wie die Gitterwege von $(0,0) \to (rn+1, 1)$ mit n Abstiegen der Höhe $r-1$. In diesem Fall ist $\alpha_i - 1$ die Höhe des Endpunktes des i-ten Abstieges von rechts.

Das entsprechende Gewicht ist dann $q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$. Aus [3] folgt nun mit der dort eingeführten Notation, daß das Gesamtgewicht der Menge $T_{n,r}$ aller r-ären Wurzelbäume mit n inneren Knoten durch die q-Catalanzahl $C_n^r(q)$ gegeben ist.

Speziell ist also $w(\varphi(T_n)) = w(T_{n,2}) = C_{n-1}^2(q)$. Für $q = 1$ reduziert sich das auf das wohlbekannte Resultat, daß die Anzahl der Elemente von T_n gleich $C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ ist. Daher ist auch $w(T_n)$ ein q-Analogon von C_{n-1}. Dieses q-Analogon soll im Folgenden genauer studiert werden.

Dazu betrachten wir gleich ein allgemeineres Problem. Wir betrachten Gitterwege von $(0,0) \to (n, x)$ für $x \geq 0$ ganz, die positiv sind, d.h. nie auf die x-Achse zurückkehren und wie oben nur Anstiege der Höhe 1 und Abstiege beliebiger Höhe $i \geq 0$ haben. Diese werden durch Wörter $v = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ mit $i_1 + \cdots + i_n = -x$ beschrieben, für welche $i_1 + \cdots + i_k \leq -1$ für alle k gilt. Wir ordnen jedem solchen Wort das Gewicht

$$w(v) := r_{i_1+1} \dots r_{i_n+1} y^k q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \tag{2}$$

zu, wobei $r_0 = 1$ sei, $\alpha_i + 1$ die Höhe des Endpunktes des i-ten Abstieges von rechts, k die Anzahl der Abstiege und $r_1, r_2, \dots,$ sowie y und q kommutierende Unbestimmte seien.

Im Fall der Bäume $(x = 1)$ bedeutet das folgendes: k ist die Anzahl $k = i(t)$ der inneren Knoten. Jedem Knoten v mit l Teilbäumen wird r_l zugeordnet. Und α_i ist die Bezeichnung des i-ten inneren Knotens, den man wie oben beim Durchlaufen des Baumes in der Horizontalrichtung von rechts nach links erhält.

Sei nun $G_{nk}(x)y^k$ das Gesamtgewicht der positiven Wege von (0, 0) nach (n, x) mit genau k Abstiegen.

Dann ist

$$G_{n0}(x) = \delta_{nx}, G_{0k}(x) = 0 \text{ für } k \geq 1 \tag{3}$$

und

$$G_{nk}(x+1) = G_{n-1,k}(x) + q^x \sum_{i \geq 1} r_i G_{n-1,k-1}(x+i). \tag{4}$$

Denn sei $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ der Code eines Weges von $(0,0)$ nach $(n, x+1)$ mit k Abstiegen. Dann ist entweder $i_n = -1$, d.h. $x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}$ ein positiver Weg von (0, 0) nach $(n-1, x)$ mit k Abstiegen. Diese Wege tragen zu $G_{nk}(x+1)y^k$ das Gewicht $G_{n-1,k}(x)y^k r_0$ bei.

Oder es ist $i_n = i - 1$ mit $i \geq 1$. Dann ist $x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}$ ein Weg von $(0,0)$ nach $(n-1, x+1+i-1)$ mit $k-1$ Abstiegen.

Das Gesamtgewicht dieser Wege $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ ist $y^{k-1} G_{n-1,k-1}(x+i)$ $y r_i q^x$, weil x_{i-1} ein Abstieg ist, der das Gewicht r_i hat und auf der Höhe $x+1$ endet.

Sei nun $G_n(x, y) := \sum_{k=0}^{n} G_{nk}(x) y^k$ des Gesamtgewicht aller positiven Wege von $(0,0)$ nach (n, x).

Dann gilt:

$$G_0(0, y) = 1 \tag{5}$$

$$G_n(0, y) = 0 \text{ für } n > 0 \tag{6}$$

$$G_n(x, y) = 0 \text{ für } x > n \tag{7}$$

$$G_n(x+1, y) = G_{n-1}(x, y) + q^x y \sum_{i \geq 1} r_i G_{n-1}(x+i, y) \tag{8}$$

Dadurch ist $G_n(x, y)$ eindeutig festgelegt. Die ersten Werte werden durch die folgende Tabelle gegeben:

n	$G_n(0, y)$	$G_n(1, y)$	$G_n(2, y)$	$G_n(3, y)$
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	$r_1 y$	1	0
3	0	$r_1^2 y^2 + r_2 y$	$(1+q)r_1 y$	1
4	0	$r_1^3 y^3 + (2+q)r_1 r_2 y^2 + r_3 y$	$r_1^2(1+q+q^2)y^2 + (1+q)r_2 y$	$(1+q+q^2)r_1 y$
	………	………	………	………

Aus der Definition von $G_n(s, y)$ ergibt sich sofort die Gleichung

$$G_n(x_1 + x_2, y) = \sum_{n_1+n_2=n} G_{n_1}(x_1, y) G_{n_2}(x_2, q^{x_1} y). \tag{9}$$

Denn ist $a_n = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ ein positiver Gitterweg von (0, 0) nach $(n, x_1 + x_2)$, so existiert ein eindeutig bestimmtes n_1, so daß $a_{n_1} = x_{i_1} \cdots x_{in_1}$ das längste Anfangsstück des Weges ist, das auf der Höhe x_1 endet. Es ist also $a_n = a_{n_1} a_{n_2}$, wobei a_{n_2} ein Weg von (0, 0) nach (n_2, x_2) ist. Hat a_{n_2} k_2 Abstiege, die auf der Höhe $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{k_2} + 1$ enden, so liegt jeder davon im Weg a_n um x_1 Einheiten höher als im Weg a_{n_2}. Daher liefert a_{n_2} zum Gewicht von a_n den Faktor $q^{(\alpha_1+x_1)+\cdots+(\alpha_{k_2}+x_1)} = q^{k_2 x_1} q^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k_2}}$. Das ist dasselbe, wie wenn man y^{k_2} durch $(q^{x_1} y)^{k_2}$ ersetzt.

Speziell ergibt sich

$$G_n(x, y) = \sum_{n_1+\cdots+n_x=n} G_{n_1}(1, y) G_{n_2}(1, qy) \dots G_{n_x}(1, q^{x-1} y). \tag{10}$$

Wir betrachten num die erzeugende Funktion

$$G(t, y) := \sum_{n \geq 1} G_n(1, y) t^n \tag{11}$$

Dann ist nach (10)

$$\sum_{n \geq x} G_n(x, y) t^n = G(t, y) G(t, qy) \dots G(t, q^{x-1} y). \tag{12}$$

Im Fall $q = 1$ reduziert sich das natürlich auf $G(t, y)^x$.
Zusammen mit (8) für $x = 0$ ergibt sich

$$G(t, y) = t \left(1 + y \sum_{i \geq 1} r_i G(t, y)^i \right). \tag{13}$$

Durch diese Gleichung ist $G(t, y)$ eindeutig festgelegt. Die Koeffizienten von $G(t, y)^x$ können daraus mit Hilfe des Lemmas von Raney oder der Formel von Lagrange sofort berechnet werden.

Es ergibt sich

$$G_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{n} \binom{n}{k} y^k \sum_{i_1+\ldots i_k=n-x,\, i_j \geq 1} r_{i_1} \ldots r_{i_k}.$$

Sind speziell alle $r_i = 1$, so ergibt sich $G_n(x, y) = \sum_k \frac{x}{n} \binom{n}{k} \binom{n-x-1}{k-1} y^k$ und im Fall $y = 1$ aus der Vandermonde'schen Formel

$$G_n(x, 1) = \frac{x}{n} \binom{2n-x-1}{n-1} \text{und somit } G_n(1, 1) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}.$$

Außerdem ist für $q = 1$ mit $G(t) := G(t, 1)$

$$G(t) = t\left(\sum\nolimits_{i \geq 1} r_i G(t)^i\right).$$

Ist $g(t)$ die bezüglich der Komposition inverse formale Potenzreihe zu $G(t)$, so folgt daraus

$$g(t) = \frac{1}{1 + \sum r_i t^i}$$

und schließlich aus (11) die Formel

$$t = \sum_{n \geq 1} G_n(1, 1) g(t)^n.$$

Diese Formel scheint im allgemeinen Fall kein q-Analogon zu besitzen. Für den Fall der r-ären geordneten Wurzelbäume gibt es jedoch ein brauchbares Analogon, wenn man statt $G(t)$ eine etwas modifizierte Reihe betrachtet. Im Fall $q = 1$ ist $G(t) = t(1 + G(t)^r)$. Setzt man $H(t^r) = \frac{G(t)}{t}$, so gilt $H(t) = 1 + tH(t)^r$. Ersetzt man nun $H(t)$ durch $F(t) = H(t) - 1$, so gilt schließlich $F(t) = t(1 + F(t))^r$, also für die inverse Reihe $f(t)$
$f(t) = \frac{t}{(1+t)^r}$.

Das heißt $F(t) = \sum_{n \geq 1} C_n^r t^n$ impliziert

$$t = \sum_{n \geq 1} C_n^r \frac{t^n}{(1+t)^{rn}}. \tag{14}$$

Ersetzt man hier t durch den Differenzenoperator Δ, so ist wegen $1+\Delta = E$ die Gleichung (14) äquivalent mit

$$\Delta = \sum_{n\geq 1} C_n^r (E^{-r}\Delta)^n. \tag{15}$$

Von dieser Gleichung findet man nun leicht ein q-Analogon.

Dazu definieren wir den Operator e auf den q-Polynomen durch

$$e\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q^n \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Dann gilt

$$\Delta e = q e \Delta, \tag{17}$$

weil

$$\Delta e \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \Delta q^n \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$

und

$$e\Delta \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = e \frac{1}{q^{n-1}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$$

für alle n gilt.

Außerdem ist

$$E = e(1+\Delta), \tag{18}$$

weil

$$\begin{aligned} e(1+\Delta)\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} &= e\left(\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} + \frac{1}{q^{n-1}} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix} \right) = q^n \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+1 \\ n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nach der Rekursionsformel für die q- Binomialkoeffizienten gilt.

Daraus folgt

$$E^n = e^n s_n(\Delta), n \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

wenn man $s_n(x) = (1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x)$ für $n>0$ und $s_{-n} = \frac{1}{(1+\frac{x}{q})\dots(1+\frac{x}{q^n})}$ setzt.

Denn $E^{n+1} = EE^n = e(1+\Delta)e^n s_n(\Delta) = e^{n+1}(1+q^n\Delta)s_n(\Delta) = e^{n+1}s_{n+1}(\Delta)$ und $E^{-n} = \frac{1}{s_n(\Delta)} e^{-n} = e^{-n}\frac{1}{s_n(\Delta/q^n)} = e^{-n}s_{-n}(\Delta)$.

Aus $\Delta E = qE\Delta$ folgt nun weiter

$$(E^{-r}\Delta)^k = E^{-rk} q^{-r\binom{k}{2}} \Delta^k = q^{-r\binom{k}{2}} e^{-rk} \frac{\Delta^k}{s_{rk}\left(\frac{\Delta}{q^{rk}}\right)}. \tag{20}$$

Nun ist klar, daß jede Potenz Δ^m, $m \geq 0$, eine eindeutige Darstellung der Form

$$\Delta^m = \sum_m^\infty a_k \frac{\Delta^k}{s_{rk}\left(\frac{\Delta}{q^{rk}}\right)} \tag{21}$$

besitzt. Das ist wegen (20) gleichbedeutend mit

$$\Delta^m = \sum_m^\infty a_k q^{r\binom{k}{2}} e^{rk} (E^{-r}\Delta)^k.$$

Wendet man diesen Operator auf $G_n([x], r)$ an, so erhält man $a_n q^{r\binom{n}{2}} = \Delta^m G_n([x], r)|_{x=0} = L\Delta^m G_n([x], r)$, wenn $Lp([x]) = p(0)$ ist, weil $(E^{-r}\Delta)^k G_n([x], r) = G_{n-k}([x], r)$ und $LG_n([x], r) = \delta_{n0}$ ist.

Nun ist $L\Delta^m = LE^{rm}(E^{-r}\Delta)^m q^{r\binom{n}{2}}$ und daher

$$a_n = q^{r\binom{m}{2} - r\binom{n}{2}} G_{n-m}([rm], r).$$

Somit ergibt sich

$$\Delta^x = q^{r\binom{x}{2}} \sum_{n=x}^\infty q^{-r\binom{n}{2}} G_{n-x}([rx], r) \frac{\Delta^n}{s_n\left(\frac{\Delta}{q^{rn}}\right)}$$

oder

$$t^x = q^{r\binom{x}{2}} \sum_{n=x}^\infty q^{-r\binom{n}{2}} G_{n-x}([rx], r) \frac{t^n}{s_n\left(\frac{t}{q^{rn}}\right)}. \tag{22}$$

Wegen $G_{n-1}([r], r) = \Delta G_n(0, r) = G_n([1], r) = C_n^r(q)$ ist also speziell

$$t = \sum_{n=1}^\infty q^{-r\binom{n}{2}} C_n^r(q) \frac{t^n}{s_n\left(\frac{t}{q^{rn}}\right)}. \tag{23}$$

Dazu äquivalente Resultate wurden mit anderen Methoden auch in [4] und [6] abgeleitet.

Im allgemeinen Fall scheint eine analoge Methode nicht zu funktionieren. Wir müssen daher anders vorgehen.

Wir betrachten die Funktionen $G_{n+x}(x, y)$ in Abhängigkeit von x. Dann ist $G_x(x, y) = 1$ und $G_{x+1}(x, y) = [x] y r_1$. Das legt es nahe, die Funktionen

$$a_n([x]) = a_n([x], y) := G_{x+n}(x, y) \tag{24}$$

als Funktionen von $[x] = 1 + q + \cdots + q^{x-1}$ darzustellen.

Es zeigt sich daß $a_n([x])$ ein q-Polynom in $[x]$ von Grad n ist, wobei die Koeffizienten Polynome von Grad $\leq n$ in den Unbestimmten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und y sind.

Das folgt sofort aus $a_0([x]) = 1$ und

$$\Delta a_n([x]) = y \sum_{i \geq 1} r_i a_{n-i}([x + i]), \tag{25}$$

was sich unmittelbar aus (8) ergibt.

Beispielsweise ist

$$a_2([x]) = y^2 r_1^2 q^2 \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} + (y^2 r_1^2 + y r_2)[x].$$

Es scheint schwierig zu sein, eine explizite Formel für $a_n([x])$ zu finden. Relativ leicht lassen sich jedoch für kleines k die Koeffizienten von y^k in $a_n([x])$ finden. Wir bezeichnen sie mit $a_{nk}([x])$.

Es ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned}
&a_{n0}([x]) = 1\\
&a_{n1}([x]) = r_n[x]\\
&a_{n2}([x]) = \textstyle\sum_{i+j=n\, i,j\geq 1}([i] + q[i+1] + \cdots + q^{x-1}[i + x - 1]) r_i r_j.
\end{aligned}$$

Sind alle $r_i = 1$, so erhalten wir die gesuchten q-Analoga $c_n^{(k)}(q) = a_n([1], q^k), k = 0, 1, 2, \ldots,$ der Catalanzahlen c_n.

Sie erfüllen die Rekurrenz

$$c_{n-1}(q) := c_{n-1}^{(0)}(g) = \sum_{i \geq 1} \sum_{n_1+\cdots+n_i=n-1,\, n_j \geq 1} c_{n_1-1}^{(0)}(q) c_{n_2-1}^{(1)}(q) \ldots c_{n_i-1}^{(i-1)}(q). \tag{26}$$

Das ergibt sich sofort aus (8) und (9), ist aber evident, wenn man beachtet, daß jeder geordnete Wurzelbaum mit n Knoten aus einer gewissen Anzahl i von Teilbäumen mit $n_1, \ldots, n_i$ Knoten besteht, wobei $\sum n_j = n - 1$ ist. Die Folge der $c_n(q)$ beginnt mit $1, 1, 2, 4 + q$, $8 + 4q + 2q^2, \ldots$

Es wäre interessant, ob es eine einfachere Rekurrenz als (26) oder der Gleichung

$$G_n(x+1,1) = G_{n-1}(x,1) + q^x \sum_{i\geq 1} G_{n-1}(x+i,1)$$

gibt oder ob explizite Formeln für $c_n(q)$ existieren.

Abschließend seien noch einige weitere Situationen erwähnt, in welchen die q-Catalanzahlen auftreten.

a) Sei $S_{n,r}$ die Menge aller Permutationen $\pi = \pi(1)\pi(2)\dots\pi((r-1)n)$ der Multimenge $\langle 1^{r-1}, 2^{r-1}, \dots, n^{r-1}\rangle$, welche $21\underline{2}$ – frei sind. Damit ist gemeint, daß für $i < j < k$ die Elemente $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$ nicht in der Beziehung $\pi(j) < \pi(i) \leq \pi(k)$ stehen dürfen.

Z.B. sind $31\underline{2}2\underline{1}\underline{3}$, $\underline{3}\underline{1}122\underline{3}$ oder $\underline{3}\underline{2}\underline{3}211$ nicht $21\underline{2}$ – frei. Die unterstrichenen Elemente bilden nämlich ein $21\underline{2}$ – Muster.

Wenn wir in einer Permutation $\pi \in S_{n,r}$ die Elemente 1 betrachten, so zerlegen diese die Permutation in der Form

$$\pi = \pi_0\, 1\, \pi_1\, 1 \dots 1\, \pi_{r-1}, \tag{27}$$

wobei jedes $\pi_j \in S^*_{nj,r}$ ist und $n_0 + n_1 + \cdots + n_{r-1} = n-1$ ist. $S^*_{n,r}$ unterscheidet sich von $S_{n,r}$ nur dadurch, daß die Elemente $1, 2, \dots n$ durch andere natürliche Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ersetzt sind. Die $21\underline{2}$ – Freiheit bedeutet gerade, daß jedes Element von π_i größer als jedes Element von π_{i+1} ist.

Aus (27) ergibt sich, daß man die Mengen $S_{n,r}$ folgendermaßen konstruieren kann: Man beginnt mit $S_{1,r}$. Diese Menge erhält nur die Permutation $11\dots 1 = 1^{r-1}$. Wurde $S_{n,r}$ bereits konstruiert, so füge man bei jedem $\pi \in S_{n,r}$ jeweils $r-1$ aufeinander folgende Elemente $n+1$ an einer beliebigen Stelle ein, die entweder vor oder unmittelbar hinter dem ersten Abstieg von π liegt. (Der erste Abstieg einer Permutation $\pi(1)\dots\pi(m)$, ist die kleinste Zahl i mit $\pi(i) > \pi(i+1)$ bzw. $i = m$, wenn es keine solche Zahl gibt).

Für $r = 3$ ergibt sich auf diese Weise (der erste Abstieg ist unterstrichen):

$S_{1,3} = 1\underline{1}$
$S_{2,3} = 2\underline{2}11, 12\underline{2}1, 112\underline{2},$
$S_{3,3} = 3\underline{3}2211, 23\underline{3}211, 223\underline{3}11,$
$\quad 3\underline{3}1221, 13\underline{3}221, 123\underline{3}21,$
$\quad 12233\underline{1}, 3\underline{3}1122, 13\underline{3}122,$
$\quad 113\underline{3}22, 1123\underline{3}2, 11223\underline{3}$

Für $\pi \in S_{n,r}$ definieren wir ein Gewicht $w(\pi)$ rekursiv durch

$$w(\pi) = \prod_{j=0}^{r-1} q^{j n_j} w(\pi_j). \tag{28}$$

Dann gilt

$$w(S_{n+1,r}) = \sum_{n_0 + \dots n_{r-1} = n} q^{n_1 + 2n_2 + \cdots + (r-1)n_{r-1}} \prod_{j=0}^{r-1} w(S_{n_j,r}). \tag{29}$$

Aus [3] (8) ergibt sich daraus $w(S_{n,r}) = C_n^r(q)$.

Aus (28) folgt sofort, daß $w(\pi) = q^{\alpha(\pi)}$ ist, wobei $(r-1)\alpha(\pi)$ die Anzahl der Paare (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) < \pi(j)$ ist.

Somit gelt

$$\sum_{\pi \in S_{n,r}} q^{\alpha(\pi)} = C_n^r(q). \tag{30}$$

Z.B. ergibt sich für $r = 3$

$$\begin{aligned}
&w(S_{3,3}) = w(112233) + w(112332) + w(122331) + w(113322)\\
&+ w(123321) + w(133122) + w(133221) + w(233211) + w(223311)\\
&+ w(331122) + w(331221) + w(332211) = q^6 + q^5 + q^4 + q^4\\
&+ q^3 + q^3 + q^2 + q + q^2 + q^2 + q + 1 = q^6 + q^5 + 2q^4\\
&+ 2q^3 + 3q^2 + 2q + 1 = [3]^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} q^{3+1} = C_3^3(q).
\end{aligned}$$

Man kann auch eine einfache gewichtsbewahrende Bijektion von der Menge der r-ären Wurzelbäume t mit $|t| = rn + 1$ Knoten auf $S_{n,r}$ angeben: Man ordne dem Baum, der nur aus der Wurzel besteht, die leere Permutation zu. Hat t die Teilbäume $t_0, \dots, t_{r-1}$, so sei

$$\pi(t) := \pi(t_0)^* \, 1 \, \pi(t_1)^* \, 1 \, \dots 1 \, \pi(t_{r-1})^*. \tag{31}$$

Dabei ist $\pi(t_{r-j})^*$ jene Permutation, die man erhält, wenn man in $\pi(t_{r-j})$ jedes Element k durch $k + 1 + i(t_{r-1}) + \cdots + i(t_{r-j+1})$ ersetzt.

Für $r = 2$ finden sich äquivalente Resultate in [7].

b) Eine kleine Modifikation liefert das folgende Resultat:

Sei $s_{n,r}$ die Menge aller $21\underline{2}-$ freien Permutationen von $\langle 1^r, 2^r, \dots, n^r \rangle$ mit der Eigenschaft, daß für jedes j nach dem letzten j in $\pi(1) \dots \pi(n)$ kein größeres Element folgen kann.

Dann gilt

$$\sum_{\pi \in s_{n,r}} q^{\alpha(\pi)} = C_n^r(q). \tag{32}$$

Der Beweis ergibt sich sofort daraus, daß es eine gewichtsbewahrende Bijektion $\psi : S_{n,r} \to s_{n,r}$ gibt :

$$\psi(\pi) := \psi(\pi_0)\, 1\, \psi(\pi_1)\, 1 \ldots 1\psi(\pi_{r-1})1.$$

Dann ist klar, daß das die gesuchte Bijektion ist, da jedes Element genau r-mal auftritt und hinter dem letzten j kein größeres Element auftreten kann.

Sei z.B. $r = 2$. Dann besteht $S_{3,2}$ aus den Permutationen 123, 132, 231, 312, 321. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\psi(123) &= 1\psi(23)1 &&= 1(2\psi(3)2)1 = 123321\\
\psi(132) &= 1\psi(32)1 &&= 1(\psi(3)22)1 = 133221\\
\psi(231) &= \psi(23)11 &&= (2\psi(3)2)11 = 233211\\
\psi(312) &= \psi(3)1\psi(2)1 &&= (33)1(22)1 = 331221\\
\psi(321) &= \psi(32)11 &&= (\psi(3)22)11 = 332211.
\end{aligned}$$

Das Gesamtgewicht ist $q^3 + q^2 + q + q + 1 = [2]^2 + q^3 = C_3^2(q)$.

c) Sei $U_{n,r}$ die Menge aller $12\underline{2}$ – freien Permutationen von $< 1^{r-1}, 2^{r-1}, \ldots, n^{r-1} >$. Z.B. ist

$$U_{3,3} = \{323121, 321321, 332121, 323112, 321312, 321132, 332112, 323211, 322311, 322131, 322113, 332211\}.$$

Unter einem Anstieg einer Permutation $\pi(1)\ldots\pi(m)$ verstehen wir ein i mit $\pi(i) < \pi(i+1)$ oder $i = m$.

Z.B. sind die Anstiege von $32\underline{1}31\underline{2}$ die Zahlen $3, 5, 6$. Läßt man in $\pi \in U_{n,r}$ alle Elemente weg, die größer als k sind $(k = 2, \ldots, n)$, so erhält man $\pi_k \in U_{k,r}$.

Für $\pi = 332121$ ist $\pi_2 = 2121$ und $\pi_1 = 11$.

Wir ordnen nun jedem $\pi \in U_{n,r}$ die Folge $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ zu, wobei γ_k der erste Anstieg von π_k ist.

Dann gilt $r - 1 \le \gamma_k \le \gamma_{k-1} + r - 1$ und $\gamma_1 = r - 1$. Umgekehrt liefert jede derartige Folge ein eindeutig bestimmtes $\pi \in U_{n,r}$.

Denn man kann sukzessive $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n = \pi$ konstruieren, indem man in π_{k-1} an geeigneten Stellen die $r-1$ Elemente k einfügt. Da π_k $12\underline{2}$ – frei ist, müssen die ersten $r-2$ Stellen $\pi_k(1) = \cdots = \pi_k(r-2) = k$ sein. Das $(r-1)$-te Elemente k kann vor der i-ten Stelle von π_{k-1} stehen für $i = 1, \ldots \gamma_{k-1} + 1$. Dann wird γ_k der Reihe nach $\gamma_{k-1} + r - 1, r - 1, r, \ldots, \gamma_{k-1} + r - 2$.

Ist z.B. $r = 3$ und $n = 5, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) = (2, 4, 2, 3, 5)$, so erhalten wir $1\underline{1}, 221\underline{1}, 3\underline{2}3211, 43\underline{2}43211, 5543\underline{2}43211$.

Setzt man $\alpha_k = \gamma_k - (r-1)$, so ist $\alpha_1 = 0$ und $0 \leq \alpha_k \leq \alpha_{k-1} + r - 1$. Somit gilt für $w(\pi) = q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$ wegen [3]

$$\sum_{\pi \in U_{n,r}} q^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = \sum_{\pi \in U_{n,r}} w(\pi) = C_n^r(q). \tag{33}$$

Z.B. ist

$$\begin{aligned}
w(323121) &= q^{0+0+0} = 1\\
w(321321) &= q^{0+0+1} = q\\
w(332121) &= q^{0+0+2} = q^2\\
w(323112) &= q^{0+1+0} = q\\
w(321312) &= q^{0+1+1} = q^2\\
w(321132) &= q^{0+1+2} = q^3\\
w(332112) &= q^{0+1+3} = q^4\\
w(323211) &= q^{0+2+0} = q^2\\
w(322311) &= q^{0+2+1} = q^3\\
w(322131) &= q^{0+2+2} = q^4\\
w(322113) &= q^{0+2+3} = q^5\\
w(332211) &= q^{0+2+4} = q^6
\end{aligned}$$

Somit ist $w(U_{3,3}) = 1 + 2q + 3q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 = C_3^3(q)$.
Für $r = 2$ und $q = 1$ wurde diese Methode in [8] verwendet.

d) Sei V_n die Menge aller $21\underline{2}$– freien Permutationen aller Multimengen $\langle 1^{r_1} 2^{r_2} \ldots k^{r_k} \rangle, k \leq n$ mit $r_i \geq 1$ und $r_1 + \cdots + r_k = n$ und der Eigenschaft, daß nach dem letzten j in $\pi(1) \ldots \pi(n)$ kein größeres Element folgen kann. Es ist also speziell immer $\pi(n) = 1$.
z.B. ist $V_1 = \{1\}$, $V_2 = \{11, 21\}$,
$V_3 = \{111, 121, 211, 221, 321\}$
$V_4 = \{1111, 1121, 1211, 1221, 1321, 2111, 2211, 2221, 2321, 3121, 3211, 3221, 3321, 4321\}$.

Für alle $\pi \in V_n$ sei $w(\pi) := q^{\beta(\pi)}$, wobei $\beta(\pi)$ die Anzahl aller Paare $(i, \underline{j})$ in π ist mit $i < j$, wobei $\underline{j}$ das letzte der Elemente, die gleich j sind, ist.
z.B. ist $w(11\underline{2}1) = q^2$, weil es 2 Paare $(1, \underline{2})$ gibt. Dagegen ist $w(12\underline{2}1) = q$, weil es nur ein Paar $(1, \underline{2})$ gibt.

Wir definieren nun eine gewichtsbewahrende Bijektion χ von der Menge T_{n+1} aller geordneten Wurzelbäume mit $n + 1$ Knoten auf die

Menge V_n :
$\chi(t)$ sei die leere Permutation für den Baum mit $|t| = 1$. Sind $t_0, t_1, \ldots, t_{r-1}$ die Teilbäume von t, so sei

$$\chi(t) := \chi(t_0)^* 1 \chi(t_1)^* 1 \ldots \chi(t_{r-1})^* 1, \tag{34}$$

wobei $\chi(t_{r-j})^*$ aus $\chi(t_{r-j})$ entsteht, indem man in $\chi(t_{r-j})$ jedes Element l durch $l + 1 + i(t_{r-1}) + \cdots + i(t_{r-j+1})$ ersetzt.

Man sieht leicht, daß χ eine Bijektion ist und daß χ gewichtsbewahrend ist. Ist $i(t) = k$, so ist $\chi(t)$ eine Permutation der Multimenge $\langle 1^{r_1} \ldots k^{r_k} \rangle$.

Somit ergibt sich

$$\sum_{\pi \in V_n} q^{\beta(\pi)} = w(V_n) = c_n(q). \tag{35}$$

Aus (34) folgt, daß man die Permutation $\pi = \chi(t)$ von rechts nach links erhält, wenn man den Baum t in der Horizontalrichtung von rechts nach links durchläuft, die inneren Knoten fortlaufend mit $1, 2, \ldots, k$ numeriert und vor jedem Besuch eines Teilbaumes den entsprechenden Knoten notiert. Ist umgekehrt π gegeben, so zeichne man die Wurzel, zähle ab, wie oft 1 in π auftritt und zeichne so viele Kanten. Dann iteriere man das Verfahren mit den Kanten 2, usw. Aus (34) folgt sofort, daß $w(1^i V_n^*) = c_n^{(i)}(q)$ ist.
z.B. ist $w(11 V_3^*) = w(11222) + w(11232) + w(11322) + w(11332)$ $+ w(11422) = q^6 + (2+q)q^4 + q^2 = c_3^2(q)$.

Literatur

[1] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten I, Mh Math **88** 87–105 (1979).
[2] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten IV: Eine Klasse von q-Gould-Polynomen, ÖAW Sitzungsberichte **205**, 169–174 (1996).
[3] J. Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten V: q-Catalan – Bäume, ÖAW Sitzungsberichte **205**, 175–182 (1996).
[4] J. Fürlinger – J. Hofbauer, q-Catalan Numbers, J. Comb. Th. **A 40**, 248–264 (1995).
[5] I. M. Gessel – R. P. Stanley, Algebraic Enumeration, in Handbook of Combinatorics II (Ed. R.L. Graham et al.) North–Holland 1995.
[6] C. Krattenthaler, Counting Lattice Paths with a Linear Boundary II: q-Ballot and q-Catalan Numbers, ÖAW Sitzungsberichte **198**, 171–199 (1989).
[7] D. Rawlings, The Euler – Catalan Identity, Europ. J. Combinatorics, 53–60 (1988).
[8] J. West, Generating trees and the Catalan and Schröder numbers, Discrete Math. **146**, 247–262 (1995).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.