Sitzungsber. Abt. II (1996) 205: 169–174

Operatormethoden für q–Identitäten IV: Eine Klasse von q–Gould–Polynomen

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 10. Oktober 1996
durch das w. M. Johann Cigler)

Die klassischen Gould-Polynome $A_n(x, r) := \frac{x}{x+rn}\binom{x+rn}{n}$, $r \geqslant 0$ ganz, sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert (vgl [5]):

1) $A_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\deg A_n = n$
2) $A_n(0) = \delta_{n0}$
3) $E^{-r}\Delta A_n(x) = A_{n-1}(x)$.

Dabei ist $E^a f(x) = f(x + a)$ der Verschiebungsoperator und $(\Delta f)(x) = f(x + 1) - f(x)$ der Differenzenoperator.

Wir wollen nun ein q–Analogon $G_n(x, r)$ der Gould-Polynome definieren, das dieselben formalen Eigenschaften aufweist. Wir verwenden dazu die Bezeichnungen von Teil I ([1]).

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{R}(q)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten q über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}[X]$ der Ring der Polynome über $\mathbb{F}$. Sei $Z := \left\{[x] = \frac{q^x - 1}{q-1} : x \in \mathbb{Z}\right\}$.

Wir ordnen jedem Polynom $p(X) = \sum a_k X^k$, $a_k \in \mathbb{F}$, die Funktion $p: Z \to \mathbb{F}$ zu, die durch

$$p([x]) = \sum a_k q^{kx}$$

definiert ist. Wir nennen $p([x])$ ein q–Polynom. Es erweist sich als zweckmäßig, statt der Basis $\{q^{kx}\}_{k \geqslant 0}$ die Basis $\left\{q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}\right\}_{k \geqslant 0}$ zu wählen.

Wir schreiben dann ein q–Polynom in der „Normalform“

$$p([x]) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Sei $B(Z)$ die Menge aller Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{F}$.
Wir definieren auf $B(Z)$ den Verschiebungsoperator E^a, $a \in \mathbb{Z}$, durch

$$(E^a f)([x]) = f([x+a])$$

und den Differenzenoperator Δ durch

$$(\Delta f)([x]) = \frac{f([x+1]) - f([x])}{q^x}.$$

Dann gilt $\Delta E = qE\Delta$, weil $Eq^x = q^{x+1}$ und

$$(\Delta E)f[x] = \Delta f([x+1]) = \frac{f([x+2]) - f([x+1])}{q^x}$$

und

$$(E\Delta)f[x] = E\,\frac{f([x+1]) - f([x])}{q^x} = \frac{f([x+2]) - f([x+1])}{q^{x+1}}$$

gilt.

Es ist dann (vgl [1] (40))

$$q^{\binom{n}{2}} \Delta^n = \frac{1}{q^{nx}} \prod_{k=0}^{n} (E - q^k) = \frac{1}{q^{nx}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} E^{n-k}.$$

Definition. Die Folge $G_n([x], r)$ von q–Polynomen heißt Folge der q–Gould–Polynome zum Parameter $r \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, wenn

1) $\deg G_n([x], r]) = n$
2) $G_n([0], r) = \delta_{n0}$
3) $(E^{-r}\Delta) G_n([x], r) = G_{n-1}([x], r)$

gilt.

Da $\Delta f[x] = 0$ nur für die konstanten Funktionen gilt, ist die Folge G_n, falls sie existiert, eindeutig festgelegt.

Nun ist klar, daß die Folge $G_n([x], 0) = q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ alle Eigenschaften für $r = 0$ erfüllt, weil $\begin{bmatrix} x+1 \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = q^{x-n+1} \begin{bmatrix} x \\ n-1 \end{bmatrix}$ gilt.

Die q–Gould–Polynome zum Parameter $r = 0$ sind also im wesentlichen die q–Binomialkoeffizienten. Der Faktor $q^{\binom{k}{2}}$ garantiert die Eigenschaft 3).

Für $r=1$ lassen sich die Gould–Polynome $G_n([x], 1)$ ebenfalls durch eine explizite Formel darstellen:

$$G_n([x],1)=\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix}.$$

Denn 1) und 2) sind trivialerweise erfüllt und 3) folgt aus

$$E^{-1}\Delta\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix}=E^{-1}\frac{1}{q^x}\left(\begin{bmatrix} x+n \\ n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n \end{bmatrix}\right)=$$

$$=E^{-1}\begin{bmatrix} x+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+n-2 \\ n-1 \end{bmatrix}.$$

Im klassischen Fall $q=1$ gilt $A_n(x,r)=\dfrac{x}{x+nr}\dbinom{nr+x}{n}$.

Diese Formel hat kein offensichtliches Analogon für beliebige q. Wir müssen daher anders vorgehen.

Wir suchen q–Polynome

$$G_n([x],r)=\sum_{k=0}^{n} C_{nk}^{(r)} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } C_{nn}^{(r)}\neq 0, C_{n0}^{(r)}=\delta_{n0} \text{ und}$$

$$(E^{-k}\Delta)\,G_n([x],r)=G_{n-1}([x],r].$$

Diese Gleichung bedeutet

$$(*)\qquad E^r\sum C_{n-1,k}^{(r)} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}=\Delta\sum C_{nk}^{(r)} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Nun gilt die Vandermonde'sche Formel

$$q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}=\sum_k q^{ky} q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}.$$

Denn setzt man $q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}=\sum a_{nk} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$, so ist

$$a_{nk}=L\Delta^k q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}=L\Delta^k E^y q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$$

$$=Lq^{ky}E^y\Delta^k q^{\binom{n}{2}}\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}=q^{ky}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix}.$$

Dabei bedeutet $Lp[x] = p([0])$. Wendet man die Vandermonde'sche Formel auf (*) an, so ergibt sich

$$\sum_k C^{(r)}_{n,k+1} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \sum_r C^{(r)}_{n-1,l} q^{\binom{l}{2}} \begin{bmatrix} x+r \\ l \end{bmatrix}$$
$$= \sum_l C^{(r)}_{n-1,l} \sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ l-k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} q^{\binom{l-k}{2}} q^{kr}$$
$$= \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \sum_k \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}} q^{kr} C^{(r)}_{n-1,k+j}.$$

De die $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}$ linear unabhängig sind, liefert ein Koeffizientenvergleich die Rekursion

$$C^{(r)}_{n,k+1} = q^{kr} \sum_j \begin{bmatrix} r \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}} C^{(r)}_{n-1,k+j}. \tag{1}$$

Zusammen mit $C^{(r)}_{00} = 1$, $C^{(1)}_{n0} = \delta_{n0}$, $C^{(r)}_{nk} = 0$ für $k > n$ ist also die Existenz und Eindeutigkeit der q–Gould–Polynome $G_n([x], r)$ gleichbedeutend mit der Existenz und Eindeutigkeit der C^{r}_{nk} mit den obigen Nebenbedingungen. Diese ist aber evident.

Es ergibt sich

$$C = (C^{(r)}_{nk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & [r] & q^r & 0 & \cdots \\ 0 & [r]^2 + \begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} q^{r+1} & q^r[2r] & q^{3r} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$G_0([x], r) = 1$$
$$G_1([x], r] = [x]$$
$$G_2([x], r) = [r] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} + q^{r+1} \begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{[x]}{[2]}([r] + [r+x] - 1), \cdots$$

Wir können aber auch umgekehrt die q–Polynome $q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$ durch die $G_n([x], r)$ ausdrücken:

$$q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \sum a_{nk} G_k([x], r).$$

Es ergibt sich

$$a_{nk} = L(E^{-r}\Delta)^k q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = LE^{-kr} q^{-r\binom{k}{2}} \Delta^k q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}$$

$$= q^{-r\binom{k}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix}, \text{dh.}$$

$$q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} = \sum_k q^{-r\binom{k}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix} G_k([x], r). \tag{2}$$

Speziell ist z.B.

$$C^{-1} = \left(q^{-r\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} -kr \\ n-k \end{bmatrix} \right). \tag{3}$$

Mit derselben Methode ergibt sich, daß die $C_{nk}^{(r)}$ gegeben sind durch

$$C_{nk}^{(r)} = G_{n-k}([rk], r)\, q^{r(\binom{k}{2})}. \tag{4}$$

Außerdem ergibt sich genauso die folgende Formel:

$$G_n([x+t], r) = \sum_k q^{kt}\, G_{n-k}([t], r)\, G_k([x], r]. \tag{5}$$

Das ist das q–Analogon der Binomialeigenschaft für die klassischen Gould–Polynome.

Analog zeigt man

$$q^{nx} = \sum_k (q^n - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)\, q^{-r\binom{n}{2} + r\binom{n-k}{2}}\, G_k([x], r) \tag{6}$$

In der Praxis treten q–Analoga von Gould–Zahlen vor allem beim Abzählen von Gitterwegen auf. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [3] und [4]. Die hier betrachteten q–Gould–Polynome sind im wesentlichen identisch mit den $g_n'(r-1, t, q)$ von [4].

Genauer gilt folgendes: Sei $x > 0$. Dann ist $G_n([x], r)$ das Gewicht aller Wege von $(0, 0)$ nach $(rn + x, x)$, bei welchen $(r-1)n + x$ Aufstiege $(1, 1)$ und n „Abstiege" $(1, 1-r)$ auftreten und die niemals auf die x–Achse zurückkehren. Codiert man einen solchen Weg durch eine Folge $a = a_1 a_2 \cdots a_{rn+x}$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ wobei 0 einem Aufstieg und 1 einem Abstieg entspricht, so ist das Gewicht gegeben durch $q^{w(a)}$ mit $w(a) = A - (r-1)B - rC$, wobei A die Anzahl der Paare $a_i a_j, i < j$, mit $a_i = 0$, $a_j = 1$ ist, B die Anzahl der Paare $a_i a_j, i < j$, mit $a_i = a_j = 1$ und $C = n$ die Anzahl der $a_i = 1$ bedeutet.

Mit dieser Interpretation lassen sich alle Formeln auch rein kombinatorisch beweisen.

Für $r = 2$ ist $C_n := G_n([1]) = G_{n-1}([2])$ ein q–Analogon der Catalanzahlen. Aus (5) ergibt sich

$$C_{n+1} = G_n([2]) = G_n([1+1])$$

$$= \sum_{k+l=n} q^k G_k([1])\, G_l([1]) = \sum_{k+l=n} q^k C_k C_l .$$

Somit ist C_n mit den q–Catalanzahlen $\tilde{C}_n$ von [2] identisch.

Literatur

[1] Cigler, J.: Operatormethoden für q–Identitäten I. Mh. Math. **88**, 87–105, (1979).
[2] Fürlinger, J. Hofbauer, J.: q–Catalan Numbers, J. Comb. Th. A **40**, 248–264, (1985).
[3] Krattenthaler, C.: Counting Lattice Paths with a Linear Boundary I. ÖAW Sitzungsber. **198**, 87–107, (1989).
[4] Krattenthaler, C.: Counting Lattice Paths with a Linear Boundary II. ÖAW Sitzungsber. **198**, 171–199, (1988).
[5] Rota, G. C., Kahaner, D. Odlyzko, A.: Finite Operator Calculus. J. Math. Anal. Appl. **42**, 685–760, (1973).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Johann Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, A-1090 Wien.