Mathematische Randbemerkungen 7.
Catalanzahlen und verwandte Zahlenfolgen

Johann Cigler

0. Einleitung

Sei $u(n)$ die Anzahl der Gitterwege in der $(x,y)-$Ebene, die von $(0,0)$ nach $(n,0)$ gehen, nie unter die $x-$Achse fallen und als deren Schritte nur Aufstiege $(1,1)$ und Abstiege $(1,-1)$ zugelassen sind. Man nennt solche Wege auch Dyckwege.
Es ist klar, dass $u(2n+1)=0$ ist. Für $u(2n)$ ergeben sich bekanntlich die Catalanzahlen

$$u(2n)=C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{0.1}$$

Die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_{n\geq 0} u(n)z^n=\sum_{n\geq 0} C_n z^{2n}$ der Folge
$\left(u(n)\right)_{n\geq 0}=\left(C_0,0,C_1,0,C_2,0,C_3,0,\cdots\right)=\left(1,0,1,0,2,0,5,0,14,0,42,0,132,0,\cdots\right)$
genügt der quadratischen Gleichung

$$f(z)=1+z^2 f(z)^2. \tag{0.2}$$

Daraus ergibt sich die Rekurrenzformel

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \tag{0.3}$$

mit $C_0=1$.
Die Folge $\left(u(n)\right)$ ist dadurch ausgezeichnet, dass alle Hankeldeterminanten

$$\det\left(\left(u(i+j)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1 \tag{0.4}$$

sind. Dadurch ist die Folge auch eindeutig festgelegt. Denn aus

$$\det\left(u(0)\right)=1,\det\begin{pmatrix} u(0) & 0 \\ 0 & u(2)\end{pmatrix}=1,\det\begin{pmatrix} u(0) & 0 & u(2) \\ 0 & u(2) & 0 \\ u(2) & 0 & u(4)\end{pmatrix}=1,\cdots$$

kann man der Reihe nach alle $u(2k)$ berechnen.
Die Folge $\left(C_n\right)_{n\geq 0}$ selbst hat als erzeugende Funktion $g(z)=\sum_n C_n z^n$, welche der Gleichung $g(z)=1+zg(z)^2$ genügt. In diesem Fall gilt

$$\det\left(\left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1 \tag{0.5}$$

und

$$\det\left(\left(C_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1. \tag{0.6}$$

Hier braucht man beide Folgen von Hankeldeterminanten, um die Folge $\left(C_n\right)_{n\geq 0}$ eindeutig festzulegen.

Diese Resultate besitzen interessante $q-$Analoga. Um diese zu erhalten, ordnen wir jedem Weg ein Gewicht auf folgende Weise zu: Jeder Aufstieg, der auf der Höhe k beginnt, und jeder Abstieg, der auf der Höhe k endet, habe das Gewicht q^k. Das Gewicht eines Weges sei das Produkt der Gewichte seiner Schritte. Sei nun $u(n,q)$ die Summe der Gewichte aller Dyckwege von $(0,0)$ nach $(n,0)$.
Die entsprechende Folge $\left(u(n,q)\right)_{n\geq 0}$ beginnt mit

1, 0, 1, 0, q^2+1, 0, $q^6+q^4+2q^2+1$, 0, $q^{12}+q^{10}+2q^8+3q^6+3q^4+3q^2+1$, 0

Dann ist $u(2n,q)$ ein schönes $q-$Analogon der Catalanzahlen.
Allerdings kennt man keine explizite Formel für diese Polynome in q.
Die Rekurrenzformel lautet

$$u(n,q)=\sum_{k=0}^{n-2} q^k u(k,q)u(n-2-k,q) \tag{0.7}$$

mit $u(0,q)=1, u(1,q)=0.$
Die erzeugende Funktion erfüllt die Gleichung

$$f(z,q)=1+z^2 f(z,q)f(qz,q). \tag{0.8}$$

Auch diese Folge ist durch die Werte der Hankeldeterminanten eindeutig festgelegt. Diese sind hier durch

$$\det\left(\left(u(i+j,q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{\binom{n-1}{2}+\sum_{k=0}^{n-2}k^2} \tag{0.9}$$

gegeben.

Im Jahr 1964 haben L. Carlitz und J. Riordan ein $q-$Analogon $C_n(q)$ der Catalanzahlen betrachtet, dessen erzeugende Funktion der Gleichung

$$g(z,q)=1+zg(z,q)g(qz,q) \tag{0.10}$$

genügt. Diese $q-$Catalanzahlen beginnen mit
1
1
$q+1$
q^3+q^2+2q+1
$q^6+q^5+2q^4+3q^3+3q^2+3q+1$
$q^{10}+q^9+2q^8+3q^7+5q^6+5q^5+7q^4+7q^3+6q^2+4q+1$

Es gilt $u(2n,q)=C_n(q^2),$ weil $f(z,q)=g(z^2,q^2)$ ist.
Die Rekurrenzformel lautet hier

$$C_n(q)=\sum_{k=0}^{n-1} q^k C_k(q)C_{n-1-k}(q) \tag{0.11}$$

mit $C_0(q)=1$.
Erstaunlicherweise gibt es hier eine Formel, die im Fall $q=1$ kein Analogon besitzt.
Bezeichnet man nämlich mit $E_r(z)$ die verallgemeinerte $q-$Exponentialreihe

$$E_r(z)=\sum_{k\geq 0} q^{r\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}, \tag{0.12}$$

dann gilt

$$g(z,q)=\frac{E_2(-qz)}{E_2(-z)}. \tag{0.13}$$

Denn aus dem Ansatz $g(z,q)=\dfrac{h(qz)}{h(z)}$ ergibt sich $h(qz)=h(z)+zh(q^2z)$.
Koeffizientenvergleich liefert

$$h(z)=\sum_k (-1)^k q^{2\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(1-q)\cdots(1-q^k)} = E_2(-z).$$

Für die Hankeldeterminanten ergibt sich

$$\det\left(\left(C_{i+j}(q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{\frac{n(n-1)(4n-3)}{6}} \tag{0.14}$$

und

$$\det\left(\left(C_{i+j+1}(q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}. \tag{0.15}$$

Diese Resultate lassen sich in vielfacher Weise verallgemeinern. Besonders schöne Formeln erhält man für Folgen, deren erzeugende Funktionen durch

$f(z)=1+(x+y)zf(z)+xyz^2f(z)^2$
oder
$g(z)=1+xzg(z)+yzg(z)^2$
bzw. durch
$f(z)=1+(x+y)zf(z)+qxyz^2f(z)f(qz)$
oder
$g(z)=1+xzg(z)+yzg(z)g(qz)$
gegeben sind.
Während sich im Fall $q=1$ die beiden Fälle aufeinander zurückführen lassen, scheint das im allgemeinen Fall nicht zu gehen.
Ich möchte im Folgenden einige wohlbekannte elementare Resultate aus diesem gemeinsamen Gesichtspunkt betrachten.
Es existiert eine fast unüberschaubare Literatur über derartige Folgen. Viele konkrete Beispiele enthält die Online Encyclopedia of Integer Sequences (EIS, http://www.research.att.com/~njas/sequences/). Dort finden sich auch Hinweise auf relevante Arbeiten.

Die Catalanzahlen und ihre Verallgemeinerungen treten vor allem bei einer Unmenge kombinatorischer Probleme auf. Sehr viele davon findet man im Buch „Enumerative Combinatorics, Vol.2“ von Richard P. Stanley und weitere auf der Homepage von Richard Stanley (http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/). Auf diese Dinge möchte ich hier nicht eingehen, sondern mich auf die algebraisch-rechnerischen Aspekte beschränken.
Während man früher sehr viel rechnen musste, kann man jetzt die meisten dieser Resultate mit Hilfe von Computerprogrammen erraten bzw. beweisen. Ein diesbezügliches Mathematica Package für den Fall $q=1$ wurde in der Diplomarbeit „Algorithmic manipulations and transformations of univariate holonomic functions and sequences“ von Christian Mallinger in Linz erstellt. Es kann von http://www.risc.uni-linz.ac.at/research/combinat/software/ herunter geladen werden. Ein anderes sehr nützliches Programm zum Erraten von Rekurrenzen oder Gleichungen für erzeugende Funktionen, das auch für $q-$Analoga funktioniert, stammt von Martin Rubey („Extended Rate, more gfun“, arXiv:math. CO/0702086v1). Es verwendet das Computeralgebrasystem Axiom.

1. Catalanzahlen und verwandte Zahlenfolgen

Viele Verallgemeinerungen der Catalanzahlen gehören zu der Klasse von Folgen, die durch den folgenden Satz charakterisiert ist:

Satz 1.1
Die folgenden Aussagen über die Folge

$$\left(w(n,x,y)\right)_{n\geq 0} \tag{1.1}$$

sind äquivalent:
1) Die erzeugende Funktion

$$F(z,x,y)=\sum_{n\geq 0} w(n,x,y)z^n \tag{1.2}$$

erfüllt

$$F(z,x,y)=1+(x+y)zF(z,x,y)+xyz^2F(z,x,y)^2. \tag{1.3}$$

2)

$$w(n,x,y)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}\frac{1}{n+1}x^{k-1}y^{n+1-k} \tag{1.4}$$

3) $w(n,x,y)$ *erfüllt die Rekursion*

$$(n+4)w(n+2,x,y)-(x+y)(2n+5)w(n+1,x,y)+(x-y)^2(n+1)w(n,x,y)=0 \tag{1.5}$$

mit den Anfangswerten $w(0,x,y)=1, w(1,x,y)=x+y.$
4) Es gilt

$$w(n,x,y)=(x+y)w(n-1,x,y)+xy\sum_{k=0}^{n-2}w(k,x,y)w(n-k-2,x,y) \tag{1.6}$$

mit $w(0,x,y)=1.$

5)

$$F(z,x,y)=\frac{1-(x+y)z-\sqrt{(1-(x+y)z)^2-4xyz^2}}{2xyz^2}. \qquad (1.7)$$

Die ersten Terme dieser Folge sind

$1,\ x+y,\ x^2+3xy+y^2,\ x^3+6x^2y+6xy^2+y^3,$
$x^4+10x^3y+20x^2y^2+10xy^3+y^4,\ x^5+15x^4y+50x^3y^2+50x^2y^3+15xy^4+y^5$

Beweis
Die Äquivalenz von 1) und 4) ergibt sich sofort durch Koeffizientenvergleich.

Um 2) zu beweisen, verwenden wir die Formel von Lagrange in der Version, wie sie in meinem Skriptum „Konkrete Analysis", Satz 9.5 vorkommt: Sei $\varphi(t)$ eine formale Potenzreihe mit $\varphi(0)=1$. Dann sind die Koeffizienten in der Darstellung

$f(t)=\sum_k \frac{c_k}{k!}\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^k$ gegeben durch $c_n=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\varphi(t)^n f'(t)\Big|_{t=0}$.

Setzt man $t=zF(z,x,y)$, dann gilt $t=z+(x+y)zt+xyzt^2$ und daher $t=z(1+xt)(1+yt)$.

Daher ist $t=\sum_n \frac{c_n}{n!}\left(\frac{t}{(1+xt)(1+yt)}\right)^n$, wobei nach der Formel von Lagrange

$c_n=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}(1+xt)^n(1+yt)^n\Big|_{t=0}$ gilt.

Daraus folgt

$$F(z,x,y)=\sum_{n\geq 0} w(n,x,y)z^n$$

mit

$$w(n,x,y)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}\frac{1}{n+1}x^{k-1}y^{n+1-k}.$$

Nun gilt

$$\left((x-y)^2z^3-2(x+y)z^2+z\right)F'(z)+\left((x-y)^2z^2-3(x+y)z+2\right)F(z)-2=0. \qquad (1.8)$$

Denn aus (1.3) folgt

$$F'(z)=(x+y)zF'(z)+(x+y)F(z)+2xyzF(z)^2+2xyz^2F(z)F'(z).$$

Das impliziert wieder unter Benutzung von (1.3)

$$zF'(z)(1-(x+y)z-2xyz^2F(z))=z\left((x+y)F(z)+2xyzF(z)^2\right)=2F(z)-2-(x+y)zF(z).$$

Nun erhält man aus dem Euklidischen Algorithmus angewandt auf die Polynome $1+(x+y)zF+xyz^2F^2$ und $1-(x+y)z-2xyz^2F$ in den Unbestimmten z und F

$$4xyz^2\left(1+(x+y)zF+xyz^2F^2\right)-\left(1-(x+y)z-2xyz^2F\right)\left(1-(x+y)z-2xyz^2F\right)$$
$$=-1+2(x+y)z-(x-y)^2z^2$$

Daraus folgt

$z\left(1-(x+y)z-2xyz^2F(z)\right)\left(1-(x+y)z-2xyz^2F(z)\right)$

$=z-2(x+y)z^2+(x-y)^2z^3$

Das gibt

$\left(z-2(x+y)z^2+(x-y)^2z^3\right)F'(z)=\left(2F(z)-2-(x+y)zF(z)\right)\left(1-(x+y)z-2xyz^2F(z)\right)$

$=2-F(z)\left(2-3(x+y)z+(x-y)^2z^2\right)$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich sofort die Rekursion (1.5).

Bemerkung

Die Identität (1.8) bedeutet, dass $F(z)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten genügt. Man sagt dann, dass $F(z)$ eine holonome Funktion ist. Stanley verwendet stattdessen den Ausdruck D-finite.

Analog bedeutet die Identität (1.5), dass die Folge $\left(w(n,x,y)\right)$ einer homogenen linearen Rekurrenz mit Polynomkoeffizienten genügt. Man sagt dann, dass sie eine holonome Folge bildet. Bei Stanley heißt das P-recursive. Nach Proposition 6.4.3 im oben zitierten Buch von Stanley ist eine formale Potenzreihe genau dann holonom, wenn die Folge der Koeffizienten holonom ist. Wir bezeichnen die Identität (1.5) als die Polynom-Rekurrenz von $\left(w(n,x,y)\right)$.

Die Zahlen $\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}\frac{1}{n+1}$ heißen Narayana- oder Runyon-Zahlen.

Bezeichnet man mit $zg(z)$ die bezüglich der Komposition inverse Reihe zu $zF(z)$, dann gilt

$g(z)=\dfrac{1}{1+(x+y)z+xyz^2}.$

Für einige Werte ergeben sich Vereinfachungen:

Für $y=0$ ist $w(n,x,0)=x^n$. Die obigen Aussagen bleiben aber auch in diesem trivialen Fall richtig.

Wenn $y=-x$ ist, ist $w(n,x,-x)=(-x)^n\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}\frac{1}{n+1}$. Aus 3) ergibt sich

$w(2n,x,-x)=(-1)^n x^{2n}C_n$ und $w(2n+1,x,-x)=0$.

Im allgemeinen Fall scheint es keine explizite Formel für $w(n,x,y)$ zu geben.

Im Fall $q=1$ wird manches einfacher, wenn wir für $x+y=a$ und $xy=b$ setzen, d.h.

$$x(a,b)=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\ y(a,b)=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}. \qquad (1.9)$$

Schreiben wir $f(z,a,b)=F(z,x(a,b),y(a,b))$ und $w(n,x(a,b),y(a,b))=u(n,a,b)$, dann ergibt sich

$$u(n,a,b)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k-1}\frac{1}{n+1}b^{k-1}\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)^{n+2-2k}. \tag{1.10}$$

Die erzeugende Funktion ist dann

$$f(z,a,b)=1+azf(z,a,b)+bz^2 f(z,a,b)^2. \tag{1.11}$$

Die Polynom-Rekursion lautet in dieser Notation

$$(n+4)u(n+2,a,b)-(2n+5)au(n+1,a,b)+(a^2-4b)(n+1)u(n,a,b)=0. \tag{1.12}$$

Die Rekurrenzformel mit konstanten Koeffizienten schreibt sich dann in der Form

$$u(n,a,b)=au(n-1,a,b)+b\sum_{k=0}^{n-2}u(k,a,b)u(n-k-2,a,b). \tag{1.13}$$

Diese Folgen treten in der Kombinatorik bei den verschiedensten Problemen auf. Ich möchte hier nur die Interpretation erwähnen, welche die oben angegebene verallgemeinert.

Wir betrachten Gitterpunktwege, die aus Aufstiegen $(n,k)\to(n+1,k+1)$, horizontalen Schritten $(n,k)\to(n+1,k)$ und Abstiegen $(n,k+1)\to(n+1,k)$ aufgebaut sind, im Nullpunkt $(0,0)$ beginnen und niemals unter die $x-$ Achse fallen. Solche Wege werden auch Motzkinwege genannt. Wir ordnen jedem dieser Schritte ein Gewicht folgendermaßen zu: Jeder Aufstieg, der auf der Höhe k beginnt, habe das Gewicht r_k, jeder horizontale Schritt, der auf der Höhe k liegt, das Gewicht s_k und jeder Abstieg, der auf der Höhe k endet, das Gewicht t_k. Das Gewicht eines Weges sei das Produkt aller seiner Schritte.
Bezeichnet man mit $a(n,k)$ die Summe der Gewichte aller Wege, die vom Nullpunkt zum Punkt (n,k) gehen, und schaut mit welchem Schritt ein solcher Weg endet, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&a(0,k)=[k=0]\\
&a(n,0)=s_0a(n-1,0)+t_0a(n-1,1)\\
&a(n,k)=r_{k-1}a(n-1,k-1)+s_ka(n-1,k)+t_ka(n-1,k+1)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Speziell ist $a(n,n)=r_0r_1\cdots r_{n-1}$.
Sei nun $\varphi(z)=\sum_{n\geq 0}a(n,0)z^n$ die erzeugende Funktion aller derartigen Wege, die auf der $x-$ Achse enden. Der triviale Weg der Länge 0, der im Nullpunkt endet, hat das Gewicht 1. Jeder Weg, der in $(n,0)$ endet und mit einem horizontalen Schritt beginnt, hat das Gewicht $s_0a(n-1,0)$. Jeder andere Weg hat eine eindeutige Zerlegung der folgenden Gestalt: ein Aufstieg, dann ein maximaler Weg, der auf der Höhe 1 endet, ein Abstieg auf die $x-$ Achse, sowie ein weiterer nichtnegativer Weg, der auf der $x-$ Achse beginnt und endet.

Daher ist

$$\varphi(z)=1+s_0z\varphi(z)+r_0t_0z^2\psi(z)\varphi(z), \tag{1.15}$$

wobei $\psi(z)$ die erzeugende Funktion aller Wege ist, die im Punkt $(1,1)$ beginnen, auf der Höhe 1 enden und nie auf die $x-$Achse fallen.
Die Gewichte $a(n,k)$ haben eine besonders schöne Eigenschaft. Es gilt

$$\sum_k a(n,k)a(m,k)\prod_{j=0}^{k-1}\frac{t_j}{r_j} = a(m+n,0). \tag{1.16}$$

Denn jeder Weg der Länge $m+n$, der auf die $x-$Achse zurückkehrt, ist nach n Schritten auf irgendeiner Höhe k. Bei festem k ist das Gewicht aller Wege vom Nullpunkt nach (n,k) gegeben durch $a(n,k)$. Wenn wir die Wege von (n,k) nach $(m+n,0)$ von rechts nach links betrachten, so können wir sie als gespiegelte Wege von $(0,0)$ nach (m,k) interpretieren. Der einzige Unterschied ist, das jetzt die Aufstiege von (ℓ,k) nach $(\ell,k+1)$ das Gewicht t_k und die Abstiege das Gewicht r_k besitzen.
Wenn wir mit $b(n,k)$ das Gewicht dieser gespiegelten Wege vom Nullpunkt nach (n,k) bezeichnen, dann gilt also

$$\sum_k a(n,k)b(m,k) = a(m+n,0).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} b(0,k) &= [k=0] \\ b(n,0) &= s_0 b(n-1,0) + r_0 b(n-1,1) \\ b(n,k) &= t_{k-1}b(n-1,k-1) + s_k b(n-1,k) + r_k b(n-1,k+1) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Vergleicht man (1.14) mit (1.17), so sieht man, dass $b(n,k)\prod_{j=0}^{k-1} r_j = a(n,k)\prod_{j=0}^{k-1} t_j$ ist.

Aus dieser Beobachtung lassen sich sofort die Hankeldeterminanten $\det\left(\left(a(i+j,0)\right)_{i,j=0}^{n}\right)$ und $\det\left(\left(a(i+j+1,0)\right)_{i,j=0}^{n}\right)$ berechnen. Ich verwende dabei einige Methoden aus Arbeiten von Christian Radoux (z.B. Addition formulas for polynomials built on classical combinatorial sequences, J. Comp. Appl. Math. 115(2000), 471-477, und andere Artikel auf seiner Homepage http://users.skynet.be/radoux/articles), sowie von Martin Aigner (z.B. Catalan-like numbers and determinants, J. Comb. Th. A 87,33-51, (1999)). Weitere Methoden zur Berechnung derartiger Hankeldeterminanten findet man im Übersichtsartikel „Advanced determinant calculus: a complement“, Linear Alg. Appl. 411 (2005), 68-166, von Christian Krattenthaler.

Die Identität (1.16) kann auch in Matrixform geschrieben werden: Sei

$$A_n = \begin{pmatrix} a(0,0) & 0 & 0 & \cdots \\ a(1,0) & a(1,1) & 0 & \cdots \\ a(2,0) & a(2,1) & a(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \left(a(i,j)\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{t_0}{r_0} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{t_0 t_1}{r_0 r_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \left([i=j] \prod_{k=0}^{i-1} \frac{t_k}{r_k} \right)_{i,j=0}^{n-1}$$ die Diagonalmatrix mit Einträgen

$\prod_{k=0}^{i-1} \frac{t_k}{r_k}, i = 0,1,2,\cdots,n-1,$ und $H_n = \begin{pmatrix} a(0,0) & a(1,0) & a(2,0) & \cdots \\ a(1,0) & a(2,0) & a(3,0) & \cdots \\ a(2,0) & a(3,0) & a(4,0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \left((a(i+j,0) \right)_{i,j=0}^{n-1}.$

Dann gilt

$$A_n D_n A_n^t = H_n.$$

Geht man zu den Determinanten über, so ergibt sich aus $a(n,n) = r_0 \cdots r_{n-1}$ sofort, dass

$$\det H_n = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{i-1} r_k t_k \qquad (1.18)$$

ist.

Um $\det\left(\left(a(i+j+1,0) \right)_{i,j=0}^{n-1} \right)$ zu berechnen, müssen wir statt A_n die Matrix

$$\hat{A}_n = \begin{pmatrix} a(1,0) & a(1,1) & 0 & \cdots \\ a(2,0) & a(2,1) & a(2,2) & \cdots \\ a(3,0) & a(3,1) & a(3,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \left(a(i+1,j) \right)_{i,j=0}^{n-1}$$

betrachten.
Nun ist

$$\hat{A}_n = A_n \begin{pmatrix} s_0 & r_0 & 0 & 0 & \cdots \\ t_0 & s_1 & r_1 & 0 & \cdots \\ 0 & t_1 & s_2 & r_2 & \cdots \\ 0 & 0 & t_2 & s_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = A_n G_n \qquad (1.19)$$

und daher ist

$$\det\left(\left(a(i+j+1,0) \right)_{i,j=0}^{n-1} \right) = \det H_n \det G_n. \qquad (1.20)$$

Um die erzeugende Funktion (1.11) zu erhalten, müssen wir $s_k = a$ und $r_k t_k = b$ für alle $k \geq 0$ wählen. Denn dann ist $\varphi(z) = \psi(z) = f(z,a,b)$.

Wir betrachten zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall wählen wir $r_k = 1, t_k = b$. Hier ergibt sich für $a(n,k) = a(n,k,a,b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 + b & 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 + 3ba & 3a^2 + 2b & 3a & 1 & 0 & 0 \\ a^4 + 6ba^2 + 2b^2 & 4a^3 + 8ba & 6a^2 + 3b & 4a & 1 & 0 \\ a^5 + 10ba^3 + 10b^2a & 5a^4 + 20ba^2 + 5b^2 & 10a^3 + 15ba & 10a^2 + 4b & 5a & 1 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Hier stehen in der 0-ten Spalte die Zahlen $a(n,0,a,b) = u(n,a,b)$, d.h. die Koeffizienten von $f(z,a,b)$. In der $k-$ten Spalte die Koeffizienten von $z^k f(z,a,b)^{k+1}$. Denn jeder Weg von $(0,0)$ auf die Höhe k kann eindeutig folgendermaßen zerlegt werden: Zuerst der längste Weg, der auf die Höhe 0 zurückkehrt. Dann ein Aufstieg und der längste Weg, der auf die Höhe 1 zurückkehrt, dann wieder ein Aufstieg, usw. Man braucht also insgesamt k Aufstiege und $k+1$ nichtnegative Wege, die auf die Ausgangshöhe zurückkehren. Deren erzeugende Funktion ist $z^k f(z,a,b)^{k+1}$.

Im zweiten Fall wählen wir $r_k = x(a,b) = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, t_k = y(a,b) = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Wir nennen die entsprechenden Elemente $a^*(n,k) = a^*(n,k,a,b)$.
Dabei ergibt sich die folgende Tabelle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right) & 0 & 0 & 0 \\ a^2+b & a\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right) & \frac{1}{4}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^2 & 0 & 0 \\ a^3+3ba & \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)(3a^2+2b) & \frac{3}{4}a\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^2 & \frac{1}{8}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^3 & 0 \\ a^4+6ba^2+2b^2 & 2a\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)(a^2+2b) & \frac{1}{16}(-3)\left(\sqrt{a^2-4b}-3a\right)\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^2\left(3a+\sqrt{a^2-4b}\right) & \frac{1}{2}a\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^3 & \frac{1}{16}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)^4 \end{pmatrix}$$

Hier gilt

$$a^*(n,k,a,b) = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)^k a(n,k,a,b). \tag{1.22}$$

Denn die k Aufstiege haben in diesem Fall das Gewicht $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)^k$.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel die Matrix $\left(a(n,k,0,1)\right)$.
Die Formel von Lagrange liefert sofort, dass

$$a(2n+k,k,0,1) = \frac{k+1}{n+k+1}\binom{2n+k}{n} = \left(\binom{2n+k}{n} - \binom{2n+k}{n-1}\right).$$

und $a(2n+k+1,k,0,1) = 0$

ist, d.h. dass $a(2n,2k,0,1)=\binom{2n}{n-k}-\binom{2n}{n-k-1}$, $a(2n,2k+1,0,1)=0$,
$a(2n+1,2k+1,0,1)=\binom{2n+1}{n-k}-\binom{2n+1}{n-k-1}$ und $a(2n+1,2k,0,1)=0$ ist.
Diese Matrix beginnt also folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 14 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & 28 & 0 & 20 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Daraus ergibt sich speziell

$$\sum_{k=0}^{n} a(n,k,0,1)=\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}. \tag{1.24}$$

Die erzeugende Funktion der Folge (1.24) genügt der Gleichung
$f(z)=1+2zf(z)+(2z^2-z)f(z)^2$ und fällt daher selbst nicht mehr in den Rahmen der im Satz 1.1 charakterisierten Folgen. Sie besitzt die Polynom- Rekurrenz
$w(n)=\dfrac{2w(n-1)+4(n-1)w(n-2)}{n+1}$.

Die erzeugende Funktion von $\left(u(n,0,1)\right)$ ist $f(z,0,1)=1+z^2 f(z,0,1)^2$.

Hier ist $(x,y)=(i,-i)$ und $w(2n,i,-i)=a(2n,0,0,1)=u(2n,0,1)=C_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die $n-$te Catalanzahl, während $w(2n+1,i,-i)=0$ ist.
Aus (1.6) folgt auch die bekannte Formel

$$C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}. \tag{1.25}$$

Da hier $w(2n+1,i,-i)=0$ ist, ist die Folge $\left(w(n,i,-i)\right)=\left(u(n,0,1)\right)$ schon durch die erste Hankeldeterminante eindeutig festgelegt. Diese ist nach (1.18) gegeben durch
$\det\left(u(i+j,0,1)\right)_{i,j=0}^{n-1}=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Weitere Informationen über viele der hier betrachteten Folgen findet man in der On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (EIS).
Die Folge $(u(n,0,1)) = (1,0,1,0,2,0,5,0,14,\cdots)$ hat dort die Nummer A097331. Das entsprechende Catalandreick (1.23) hat die Nummer A053121.
Die Folge (1.24), also $(1,1,2,3,6,10,20,35,70,126,\cdots)$, hat die Nummer A001405.

Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die Folge $(a(n,0,2,1)) = (1,2,5,14,42,132,\cdots)$.
Hier lautet die erzeugende Funktion $f(z,2,1) = 1 + 2zf(z,2,1) + z^2 f(z,2,1)^2$.
Das bedeutet, dass

$$f(z,2,1) = \frac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2} \tag{1.26}$$

ist.
Sei $g(z) = zf(z,2,1)$. Dann ergibt sich $g(z) = z(1+g(z))^2$. In diesem Fall ergibt sich aus der Formel von Lagrange, dass

$$a(n,k,2,1) = \frac{k+1}{n+1}\binom{2n+2}{n-k}$$

ist. Speziell ist also $a(n,0,2,1) = \frac{1}{n+1}\binom{2n+2}{n} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = C_{n+1}$.

Das entsprechende Catalandreieck (A039598) beginnt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 14 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 42 & 48 & 27 & 8 & 1 & 0 \\ 132 & 165 & 110 & 44 & 10 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Als weiteres Beispiel seien die Motzkinzahlen $M_n = u(n,1,1)$ mit $(u(n,1,1)) = (1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835,\cdots)$, A001006, genannt.
Ihre erzeugende Funktion erfüllt
$f(z,1,1) = 1 + zf(z,1,1) + z^2 f(z,1,1)^2$.
Hier gibt es keine geschlossene Formel. Man berechnet sie am einfachsten mit der Polynom-Rekursion (1.12)

$$M_n = \frac{(2n+1)M_{n-1} + 3(n-1)M_{n-2}}{n+2}. \tag{1.28}$$

Die entsprechende Dreiecksmatrix A064189 beginnt mit

(1.29)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 21 & 30 & 25 & 14 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Computerexperimente legen folgendes nahe: Sei $d(n,k,a) = \det\left(u(i+j+k,a,1)\right)_{i,j=0}^{n-1}$ und $d(0,k,a) = 1.$ Dann haben die erzeugenden Funktionen

$$D_k(x,0) = \sum_{n\geq 0} d(n,k,0)x^n$$

folgende Eigenschaft:

$$D_{2k}(x,0) = \frac{(1+x)p_k(x)}{(1-x^2)^{k^2+1}},$$

wobei $p_k(x)$ ein symmetrisches Polynom vom Grad $2k^2 - 2k$ ist. Die ersten Polynome lauten

$p_0(x) = 1, p_1(x) = 1, p_2(x) = 1 + x + 4x^2 + x^3 + x^4, \cdots.$

Es ist also z.B. $D_2(x,0) = \dfrac{1+x}{(1-x^2)^2} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots.$

Analog gilt

$$D_{2k+1}(x,0) = \frac{q_k(x)}{(1+x^2)^{k^2+k+1}},$$

wobei $q_k(x)$ ein Polynom vom Grad $2k^2$ ist, das für gerades k symmetrisch ist, während es für ungerades k von der Gestalt $q_k(x) = (1-x)r_k(x)$ mit symmetrischem $r_k(x)$ ist.

Die ersten Polynome sind

$q_0(x) = 1, q_1(x) = (1-x)(1+x), q_2(x) = 1 - 18x^2 + 42x^4 - 18x^6 + x^8, \cdots.$

Z.B. ist

$$D_3(x,0) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^3} = 1 - 4x^2 + 9x^4 - 16x^6 + 25x^8 - + \cdots.$$

Sei nun $D_k(x,a) = \sum_{k\geq 0} d(n,k,a)x^k.$

Dann gilt für $a = 1$

$$D_{2k}(x,1) = \frac{p_k(x)}{(1-x^3)^{k^2+1}},$$

wobei $p_k(x)$ ein symmetrisches Polynom vom Grad $3k^2 - 2k + 2$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Die ersten derartigen Polynome sind

$p_0(x) = 1 + x + x^2,$

$p_1(x) = (1 + x + x^2)(1 + x),$

$p_2(x)=(1+x+x^2)(1+8x+9x^2+14x^3+32x^4+14x^5+9x^6+8x^7+x^8).$
Weiters ist

$$D_{2k+1}(x,1)=\frac{\left(1+(-1)^k x\right)q_k(x)}{(1+x^3)^{k^2+k+1}},$$

wobei $q_k(x)$ ein symmetrisches Polynom vom Grad $3k^2+k$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist.
Z.B. ist $q_0(x)=1$ und $q_1(x)=(1+x)^2(1+3x+x^2)$.

Für $a=2$ erhalten wir

$$D_k(x,2)=\frac{r_k(x)}{(1-x)^{1+\binom{k}{2}}},$$

wobei $r_k(x)$ ein symmetrisches normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad $\binom{k-1}{2}$ ist. Die Folge beginnt mit

$$\left(r_k(x)\right)_{k\geq 1}=\left(1,1,1+x,1+7x+7x^2+x^3,1+31x+187x^2+330x^3+187x^4+31x^5+x^6,\cdots\right).$$

Für beliebige $a\in\mathbb{Z}$ habe ich bis jetzt keine einfache Verallgemeinerung gefunden. Ich kenne nur die ersten Werte:

$$D_0(x,a)=\frac{1}{1-x},$$

$$D_1(x,a)=\frac{1}{1-ax+x^2},$$

$$D_2(x,a)=\frac{(1+x)}{(1-x)^2(x^2+(2-a^2)x+1)},$$

$$D_3(x,a)=\frac{(1+x)(1-x)(1+3ax+x^2)}{(1-ax+x^2)^3(x^2+(3-a^2)ax+1)},$$

$$D_4(x,a)=\frac{p_{10}(x)}{(1-x)^5(1-(a^2-2)x+x^2)^4(x^2+(a^4-4a^2+2)x+1)},$$

wobei $p_{10}(x)$ ein symmetrisches Polynom vom Grad 10 in x ist.

Allgemeiner wollen wir die durch so eine Dreiecksmatrix definierten Polynome $\sum_{k=0}^{n}a(n,k,a,b)t^k$ betrachten.

Dazu definieren wir

$$a(n,k,a,b;t)=\sum_{j=0}^{n-k}a(n,k+j,a,b)t^j. \tag{1.30}$$

Dann ist $a(n,n,a,b;t)=a(n,n,a,b)=1$.

Man prüft durch Koeffizientenvergleich sofort nach, dass

$$a(n,0,a,b;t)=(a+t)a(n-1,0,a,b;t)+ba(n-1,1,a,b;t) \tag{1.31}$$

und

$$a(n,k,a,b;t)=a(n-1,k-1,a,b;t)+aa(n-1,k,a,b;t)+ba(n-1,k+1,a,b;t) \tag{1.32}$$

gilt.
Es liegt also dieselbe Situation wie in (1.14) vor mit $s_0=a+t,$ $s_k=a$ für $k\ge 1$ und $t_k=b$ für alle $k\ge 0.$

Wir setzen wieder $a(n,0,a,b;t)=u(n,a,b;t)$
Die erzeugende Funktion $f(z,a,b;t)=\sum_{n\ge 0}a(n,0,a,b;t)z^n=\sum_{n\ge 0}u(n,a,b;t)z^n$ erfüllt daher $f(z,a,b;0)=f(z,a,b)$ und

$$f(z,a,b;t)=1+(a+t)zf(z,a,b;t)+bz^2f(z,a,b;t)f(z,a,b) \tag{1.33}$$

oder

$$f(z,a,b;t)=\frac{1}{1-(a+t)z-bz^2f(z,a,b,0)}.$$

Man kann das auch in der Form

$$f(z,a,b;t)=\frac{f(z,a,b)}{1-tzf(z,a,b)} \tag{1.34}$$

schreiben. Denn

$$f(z,a,b)=1+azf(z,a,b)+bz^2f(z,a,b)^2$$

impliziert

$$1-tzf(z,a,b)=f(z,a,b)\left(1-(a+t)z-bz^2f(z,a,b)\right),$$

d.h.

$$\frac{1}{1-(a+t)z-bz^2f(z,a,b)}=\frac{f(z,a,b)}{1-tzf(z,a,b)}.$$

Die Formel (1.34) ergibt sich aber auch unmittelbar aus der Definition (1.30), wenn man sie in der Form

$$f(z,a,b;t)=f(z,a,b)+tzf(z,a,b)^2+t^2z^2f(z,a,b)^3+\cdots$$

schreibt. Denn durch Koeffizientenvergleich ist das äquivalent mit

$$u(n,a,b;t)=a(n,0,a,b;t)=\sum_{j=0}^{n}a(n,j,a,b)t^j.$$

Aus (1.33) ergibt sich ein Analogon von (1.6) für $u(n,a,b;t)=a(n,0,a,b;t),$ nämlich

$$u(n,a,b;t)=(a+t)u(n-1,a,b;t)+b\sum_{k=0}^{n-2}u(k,a,b)u(n-k-2,a,b;t)$$

mit $u(0,a,b;t)=1.$

Es gilt

$$f(z,a,b;t) = 1 + (a+2t)zf(z,a,b;t) + z\left((t^2+at+b)z - t\right) f(z,a,b;t)^2. \tag{1.35}$$

Denn wenn man (1.34) in diese Gleichung einsetzt, ergibt sich die Gleichung für $f(z,a,b,0)$.

Im Beispiel (1.23) ergibt sich für die ersten Zeilen der Matrix $\left(a(n,k,0,1;t)\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^2+1 & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t^3+2t & t^2+2 & t & 1 & 0 & 0 \\ t^4+3t^2+2 & t^3+3t & t^2+3 & t & 1 & 0 \\ t^5+4t^3+5t & t^4+4t^2+5 & t^3+4t & t^2+4 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Die erzeugende Funktion der ersten Spalte, d.h. der Polynome $u(n,0,1;t)$, genügt der Gleichung
$f(z,0,1;t) = 1 + 2tzf(z,0,1;t) + z\left((t^2+1)z - t\right) f(z,0,1;t)^2.$

Einen weiteren einfachen Zusammenhang mit $f(z,a,b)$
liefert die Formel

$$f(z,a,b;t) = \frac{1 - tzf(z,a,b)}{1-(a+2t)z + (t^2-b)z^2 f(z,a,b)}. \tag{1.36}$$

Denn setzt man auf der linken Seite (1.34) ein, so sieht man sofort, dass (1.36) äquivalent mit

$$\frac{f(z,a,b)}{\left(1 - tzf(z,a,b)\right)^2} = \frac{1}{1-(a+2t)z + (t^2-b)z^2 f(z,a,b)} \tag{1.37}$$

und indem man mit den Nennern multipliziert und vereinfacht, identisch mit (1.11) ist.
Aus (1.37) folgt

$$\frac{f(z,a,b^2)}{(1 - bzf(z,a,b^2))^2} = \frac{1}{1-(a+2b)z}. \tag{1.38}$$

Das bedeutet

$$f(z,a,b^2) + 2bzf(z,a,b^2) + 3b^2z^2 f(z,a,b^2) + \cdots = \frac{1}{1-(a+2b)z}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt das etwas überraschende Ergebnis

$$\sum_{k=0}^{n} a(n,k,a,b^2)(k+1)b^k = (a+2b)^n. \tag{1.39}$$

Für $b = 1, t = -1$ reduziert sich (1.36) auf

$$f(z,a,1;-1) = \frac{1 + zf(z,a,1)}{1-(a-2)z}. \tag{1.40}$$

Es gilt also

$$u(n+1,a,1;-1)-(a-2)u(n,a,1;-1)=u(n,a,1). \tag{1.41}$$

Für $a=2$ ergibt sich speziell

$$u(n+1,2,1;-1)=u(n,2,1). \tag{1.42}$$

Für die Folge $\left(u(n,1,1;-1)\right)=\left(1,0,1,1,3,6,15,36,91,\cdots\right)$, A005043, bedeutet das

$$u(n,1,1;-1)+u(n+1,1,1;-1)=M_n. \tag{1.43}$$

In analoger Weise gilt für $t=1$

$$(a+2)u(n,a,1;1)-u(n+1,a,1;1)=u(n,a,1). \tag{1.44}$$

Aus $u(2n+1,0,1)=0, u(2n,0,1)=C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ folgt mit Induktion sofort, dass

$u(n,0,1;1)=\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ ist. Damit ist (1.24) noch einmal bewiesen.

Genau so folgt aus $u(n,2,1)=C_{n+1}$, dass

$$u(n,2,1;1)=\binom{2n+1}{n+1} \tag{1.45}$$

gilt.

Denn das gilt für $n=0$ und allgemein folgt es aus $4\binom{2n+1}{n+1}-C_{n+1}=\binom{2n+3}{n+2}$.

Analog ergibt sich die Folge $\left(u(n,1,1;1)\right)=\left(1,2,5,13,35,96,\cdots\right)$, A005773, durch $u(n+1,1,1;1)=3u(n,1,1;1)-M_n$.

Als einfache Beziehung zwischen diesen Folgen ergibt sich für jedes $m\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}u(k,a,b;t)=u(n,a+m,b;t). \tag{1.46}$$

Eine Unmenge konkreter Beispiele dazu findet man in EIS.
Wenn wir etwa $a=0, b=1, m=1$ wählen, erhalten wir

$u(n,1,1;t)=\sum_{k}\binom{n}{k}u(k,0,1;t).$

Für $t=0$ folgt daraus die wohlbekannte Formel für die Motzkinzahlen

$M_n=u(n,1,1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u(k,0,1)=\sum_{k}\binom{n}{2k}C_k$

oder die Formel von Touchard für die Catalanzahlen

$$\sum_k \binom{n}{2k} 2^{n-2k} C_k = \sum \binom{n}{k} 2^{n-k} u(k,0,1) = u(n,2,1) = C_{n+1}.$$

Um (1.46) zu beweisen, sei $Tf(z) = \frac{1}{1-z} f(\frac{z}{1-z})$ die sogenannte Binomialtransformierte der Reihe $f(z) = \sum_k x(k) z^k$. Dann ist

$$T^m f(z) = \frac{1}{1-mz} f(\frac{z}{1-mz}) = \sum x(n) \frac{z^n}{(1-mz)^{n+1}} = \sum_n x(n) z^n \sum_k \binom{n+k}{n} (mz)^k$$
$$= \sum_n z^n \sum_k \binom{n}{k} x(k) m^{n-k}.$$

Man rechnet sofort nach, dass

$$Tf(z,a,b;t) = \frac{1}{1-z} + \frac{(a+t)z}{1-z} Tf(z,a,b;t) + \frac{bz^2}{1-z} Tf(z,a,b;t) Tf(z,a,b;0)$$

und daher

$$Tf(z,a,b;t) = 1 + (a+1+t) z Tf(z,a,b;t) + bz^2 Tf(z,a,b;t) Tf(z,a,b).$$

ist. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Als Korollar ergibt sich als Verallgemeinerung der Formel für die Motzkinzahlen die folgende Summendarstellung

$$a(n,j,a,b) = \sum_k \binom{n}{k} a^{n-k} a(k,j,0,b) = \sum_k \binom{n}{2k+j} a^{n-2k-j} a(2k+j,j,0,b)$$
$$= \sum_k \binom{n}{2k+j} a^{n-2k-j} \frac{j+1}{k+j+1} \binom{2k+j}{k} b^k.$$

Wenn man von den Gewichten $a^*(n,k,a,b)$ ausgeht, erhält man analog formale Potenzreihen $\sum_{n\geq 0} u^*(n,a,b;t) z^n$ mit $u^*(n,a,b;t) = \sum_{j=0}^{n} a(n,j,a,b)(x(a,b)t)^j = u(n,a,b;x(a,b)t)$. Es ist also $\sum_{n\geq 0} u^*(n,a,b;t) z^n = f(z,a,b;x(a,b)t)$.

Diese erfüllen

$$f(z,a,b;x(a,b)t) = 1 + (a + 2x(a,b)t) z f(z,a,b;x(a,b)t)$$
$$+ z\left((x(a,b)^2 t^2 + a x(a,b) t + b) z - x(a,b) t\right) f(z,a,b;t)^2.$$

Da $x(a,b)$ die Gleichung $w^2 - aw + b = 0$ erfüllt, ergibt sich für $t = -1$

$$\begin{aligned} f(z,a,b;-x(a,b)) &= 1 + (a - 2x(a,b)) z f(z,a,b;-x(a,b)) + x(a,b) z f(z,a,b;-x(a,b))^2 \\ &= 1 + (y(a,b) - x(a,b)) z f(z,a,b;-x(a,b)) + x(a,b) z f(z,a,b;-x(a,b))^2. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Für jede Wahl von a,b gilt nun

$$f(z,a,b;-x(a,b)) = 1 + y(a,b) z f(z,a,b). \tag{1.48}$$

Wegen der Symmetrie ist natürlich auch

$$f(z,a,b;-y(a,b)) = 1 + x(a,b) z f(z,a,b).$$

Denn setzt man in (1.47) $f(z,a,b;-x(a,b)) = 1 + y(a,b)zg(z,a,b)$, dann erhalten wir
$1 + y(a,b)zg(z,a,b) = 1 + (a - 2x(a,b))z\left(1 + y(a,b)zg(z,a,b)\right)$
$+x(a,b)z\left(1 + y(a,b)zg(z,a,b)\right)^2 = 1 + az - 2x(a,b)z + az^2 y(a,b)g(z,a,b)$
$-2x(a,b)z^2 y(a,b)g(z,a,b) + x(a,b)z + 2x(a,b)z^2 y(a,b)g(z,a,b) + x(a,b)z^3 y(a,b)^2 g(z,a,b)^2$
$= 1 + az - x(a,b)z + ay(a,b)z^2 g(z,a,b) + y(a,b)bz^3 g(z,a,b)^2$
Daraus folgt
$y(a,b)zg(z,a,b) = az - x(a,b)z + ay(a,b)z^2 g(z,a,b) + y(a,b)bz^3 g(z,a,b)^2$
oder
$g(z,a,b) = 1 + azg(z,a,b) + bz^2 g(z,a,b)^2.$

Beispielsweise ist wegen $x(0,1) = i$
$f(z,0,1;-i) = 1 - 2izf(z,0,1;-i) + izf(z,0,1;-i)^2 = 1 - izf(z,0,1).$

Die Identität (1.48) bedeutet konkret, dass

$$\sum_k (-1)^k \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^{k+1} a(n+1,k,a,b) = a(n,0,a,b) = u(n,a,b). \tag{1.49}$$

Für $(a,b) = (2,1)$ stimmt das mit (1.41) überein.

Eine Folge $\left(x(0), x(1), x(2), \cdots\right)$ ist durch die Werte der Hankeldeterminanten $\det((x(i+j))_{i,j=0}^n$ und $\det((x(i+j+1))_{i,j=0}^n$ eindeutig festgelegt, falls alle diese Determinanten $\neq 0$ sind.
Wir wollen nun die Hankeldeterminanten für die Folge $(u(n,a,b))$ berechnen.
Aus (1.18) folgt $\det\left(\left(u(i+j,a,b\right)_{i,j=0}^{n-1}\right) = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{i-1} b = b^{\binom{n}{2}}.$
Aus (1.20) folgt $\det\left(\left(u(i+j+1,a,b\right)_{i,j=0}^{n-1}\right) = b^{\binom{n}{2}} \det G_n.$
Dabei ist

$$G_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b & a & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & b & a & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & b & a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sei $d_n = \det(G_n)$. Dann ist $d_1 = a$, $d_2 = a^2 - b$ und allgemein $d_n = ad_{n-1} - bd_{n-2}$. Man kann daher d_n durch die Fibonaccipolynome ausdrücken. Denn die Fibonaccipolynome $F_n(x,s) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} s^k x^{n-1-2k}$ erfüllen die Rekursion $F_n(x,s) = xF_{n-1}(x,s) + sF_{n-2}(x,s)$ mit $F_0(x,s) = 0, F_1(x,s) = 1.$ Das ergibt $F_2(x,s) = x$ und $F_3(x,s) = x^2 + s.$

Daher ist $d_n = F_{n+1}(a,-b) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{k} (-b)^k a^{n-2k}$.

Das kann auch in der Gestalt $d_n = \frac{\left(x(a,b)\right)^{n+1} - \left(y(a,b)\right)^{n+1}}{x(a,b) - y(a,b)}$ geschrieben werden.

Denn wenn man von der ursprünglichen Formulierung ausgeht, wo $a = x + y$ und $b = xy$ ist, ergibt sich $d_1 = x + y$, $d_2 = x^2 + xy + y^2$ und $d_n = (x+y)d_{n-1} - xyd_{n-2}$. Daraus ergibt sich $d_n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$.

Daher gilt

$$\det\left(\left(w(i+j+1,x,y)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right) = (xy)^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} = (xy)^{\binom{n}{2}} \left(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n\right). \quad (1.50)$$

Im Fall der Folge $\left(u(n,2,1)\right) = \left(w(n,1,1)\right)$ sind also die Hankeldeterminanten $\det\left((u(i+j,2,1))_{i,j=0}^{n-1}\right) = 1$ und $\det\left((u(i+j+1,2,1))_{i,j=0}^{n-1}\right) = n+1$.

Betrachtet man etwas allgemeiner die Folge $\left(w(n,1,q)\right)$ mit der erzeugenden Funktion

$h(z,1,q) = 1 + (1+q)zh(z,1,q) + qz^2h(z,1,q)^2$,

die mit

$\{1,\ q+1,\ q^2+3q+1,\ q^3+6q^2+6q+1,\ q^4+10q^3+20q^2+10q+1\}$

beginnt, so ergibt sich für die Hankeldeterminanten

$$\det\left(w(i+j,1,q)\right)_{i,j=0}^{n-1} = q^{\binom{n}{2}}$$

und

$$\det\left(w(i+j+1,1,q)\right)_{i,j=0}^{n-1} = q^{\binom{n}{2}}\left[n+1\right] = q^{\binom{n}{2}} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Die Folge $\left(w(n,1,q)\right)$ kann durch die Rekurrenz

$$w(n,1,q) = \frac{(2n+1)(1+q)w(n-1,1,q) + (n-1)(1-q)^2 w(n-2,1,q)}{n+2}$$

mit $w(0,1,q) = 1, w(1,1,q) = 1+q$ berechnet werden.

Für $q = 2$ ergeben sich die kleinen Schröderzahlen A001003, $\{1,3,11,45,197,903,4279,20793,...\}$.
Für $q = 3$ ergibt sich die Folge A007564: $\{1,4,19,100,562,3304,20071,124996,...\}$.
Für $q = -1$ ergibt sich die Folge $\{1, 0, -1, 0, 2, 0, -5, 0, 14, 0, -42, 0, 132, ...\}$ der Catalanzahlen mit alternierenden Vorzeichen und für $q = -2$ die Folge A091593.

Falls $x \neq 0, y \neq 0$ kann die Hankeldeterminante $\det\left(w(i+j+1,x,y)\right)_{i,j=0}^{n-1}$ nur dann 0 werden, wenn $x \neq y$ ist und $x^j = y^j$ für ein j gilt.
Für $(x,y) = (1,-1)$ ergibt sich $w(2n+1,1,-1) = 0$ und $w(2n,1,-1) = (-1)^n C_n$.

Für $(x,y)=\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ oder gleichbedeutend $(a,b)=(1,1)$ erhält man die Folge der Motzkinzahlen $M_n=1,1,2,4,9,21,51,\ldots$

Ihre erzeugende Funktion erfüllt $f(z)=1+zf(z)+z^2f(z)^2$. Hier sind x und y 6-te Einheitswurzeln. Die Rekurrenz (1.6) lautet hier

$M_n=M_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}M_kM_{n-k-2}$.

Hier ist $\det\left(M_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}=1,$ während $\det\left(M_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{n-1}=1,1,0,-1,-1,0,1,\cdots,$ eine Folge ist, die periodisch mit Periode 6 ist. In diesem Ausnahmefall und allgemeiner, wenn x und y verschiedene $j-$te Einheitswurzeln sind, ist die Folge $w(n,x,y)$ durch die beiden Folgen von Hankeldeterminanten nicht eindeutig bestimmt.

Satz 1.2

Für die Hankeldeterminanten der Polynome $u(n,a,b;t)=\sum_{k=0}^{n}u(n,k,a,b)t^k$ *ergibt sich*

$$\det\left((u(i+j,a,b;t))_{i,j=0}^{n-1}\right)=b^{\binom{n}{2}} \tag{1.51}$$

und

$$\det\left((u(i+j+1,a,b;t))_{i,j=0}^{n-1}\right)=b^{\binom{n}{2}}\left(F_{n+1}(a,-b)+tF_n(a,-b)\right). \tag{1.52}$$

Im klassischen Fall $(a,b)=(2,1)$ ergibt sich $\det\left((u(i+j,2,1;t))_{i,j=0}^{n-1}\right)=1$ und $\det\left((u(i+j+1,2,1;t))_{i,j=0}^{n-1}\right)=\left(n+1+nt\right)$.

Im Fall der Polynome $u(n,1,1;t)$ ist $\det\left((u(i+j+1,1,1;t))_{i,j=0}^{n-1}\right)$ die periodische Folge $1+t,t,-1,-1-t,-t,1,1+t,t,\cdots$.

Durch diese beiden Folgen von Hankeldeterminanten sind also auch die Motzkinzahlen eindeutig festgelegt.

Aus (1.24) ergibt sich für $u(n,0,1;1)=\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$

$\det\left(u(i+j,0,1;1)\right)_{i,j=0}^{n}=1$ und $\det\left(u(i+j+1,01;1)\right)_{i,j=0}^{n-1}=(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$.

Setzt man

$$U(n,a,b,t,x)=1+\sum_{n\geq 1}\det\left(u(i+j+1,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}\frac{x^n}{b^{\binom{n}{2}}}=\sum_{n\geq 0}\left(F_{n+1}(a,-b)+tF_n(a,-b)\right)x^n,$$

so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$U(n,a,b,t,x)=\frac{1+tx}{1-ax+bx^2}.$$

Die erzeugende Funktion der Hankeldeterminanten hat also eine sehr einfache Gestalt.

Bemerkung

Computerexperimente mit Rubey's Programm Guess lassen vermuten, dass

$$\det\left((a(i+j,k,a,b))_{i,j=0}^{(k+1)n-1}\right)=(-1)^{n\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}b^{(k+1)^2\binom{n}{2}}$$

und $=0$ sonst.

Für $k=1$ ergibt sich beispielsweise die Folge der Determinanten

$0,-1,0,b^4,0,-b^{12},0,b^{24},0,\cdots$

und für $k=5$

$0,0,0,0,1,0,0,0,0,b^{16},0,0,0,0,b^{48},0,0,0,0,\cdots.$

Für $k=1$ ergibt sich allgemeiner

$$\det\left(a(i+j,1,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=b^{\binom{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor}(-1)^{n-j-1}\binom{n-j-2}{j}b^jt^{n-2-2j}=-b^{\binom{n-1}{2}}F_{n-1}(-t,-b). \qquad (1.53)$$

Das ist also die Folge

$0,-1,bt,b^4-b^3t^2,-2b^7t+b^6t^2,-b^{12}+3b^{11}t^2-b^{10}t^4,\cdots.$

Der Beweis ergibt sich aus

$ba(n,1,a,b;t)=a(n+1,0,a,b;t)-(a+t)a(n,0,a,b;t).$

Daraus folgt nämlich

$$\left(ba(i+j,1,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=\left(a(i+j+1,0,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}-\left((a+t)a(i+j,0,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

d.h. nach (1.19)

$$\left(ba(i+j,1,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=A_nG_nA_n^t-(a+t)A_nA_n^t=A_n\left(G_n-(a+t)I_n\right)A_n^t.$$

Nun ist $G_n-(a+t)I_n$

eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & -t \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich, wenn man nach der letzten Spalte entwickelt, für
$d(n)=\det\left(G_n-(a+t)I_n\right)$
$d(n)=-td(n-1)-bd(n-2),$
woraus alles folgt.

Wir wollen nun die Folgen

$$u_0(n,a,b):=u(n,a,b;-y(a,b)) \tag{1.54}$$

genauer untersuchen.

Setzt man

$$f_0(z,a,b)=\sum_n u_0(n,a,b)z^n, \tag{1.55}$$

dann ist nach (1.48)

$$f_0(z,a,b)=1+x(a,b)zf(z,a,b). \tag{1.56}$$

Dann gilt nach (1.47) und (1.48)

$$f_0(z,a,b)=1+(x(a,b)-y(a,b))zf_0(z,a,b)+y(a,b)zf_0{}^2(z,a,b). \tag{1.57}$$

Man beachte, dass hier der Term $zf_0{}^2(z,a,b)$ und nicht $z^2f_0{}^2(z,a,b)$ auftritt.
Nach (1.33) gilt auch

$$f_0(z,a,b)=1+x(a,b)zf_0(z,a,b)+bz^2f_0(z,a,b)f(z,a,b). \tag{1.58}$$

Wegen $\left(1+x(a,b)zf(z,a,b)\right)\left(1+y(a,b)zf(z,a,b)\right)=1+azf(z,a,b)+bz^2f(z,a,b)^2$
gilt auch

$$f_0(z,a,b)=\frac{f(z,a,b)}{1+y(a,b)zf(z,a,b)}. \tag{1.59}$$

Aus $f_0(z,a,b)=\sum_n u_0(n,a,b)z^n$
ergibt sich
$$u_0(n,a,b)=(x(a,b)-y(a,b))u_0(n-1,a,b)+y(a,b)\sum_{k=0}^{n-1}u_0(k,a,b)u_0(n-k-1,a,b).$$
Es ist klar, dass $u_0(n,a,b)=x(a,b)u(n-1,a,b)$ für $n\geq 1$ gilt.

Die zugehörigen $a(n,k)$, die wir $a_0(n,k,a,b)$ nennen wollen, erfüllen

$$\begin{aligned}&a_0(0,0)=1\\&a_0(n,0)=x(a,b)a_0(n-1,0)+ba_0(n-1,1)\\&a_0(n,k)=a_0(n-1,k-1)+aa_0(n-1,k)+ba_0(n-1,k+1).\end{aligned} \tag{1.60}$$

Für $(a,b)=(2,1)$, d.h. $x(a,b)=y(a,b)=1$, ergibt sich $u_0(n,2,1)=C_n$, denn jetzt ist $f_0(z,2,1)=1+zf_0{}^2(z,2,1)$. Die Folge $\left(u_0(n,2,1)\right)$ hat Nr. A000108.

Wir wollen für diesen Spezialfall $a_0(n,k,2,1)$ berechnen.
Aus $f_0(z,2,1)=1+zf(z,2,1)$
folgt $z^k f_0(z,2,1) f^k(z,2,1) = z^k(1+zf(z,2,1)) f^k(z,2,1)$.
Setzt man $g(z)=zf(z,2,1)$, so ist also
$(1+g(z))g(z)^k = \sum_n a_0(n,k,2,1)z^n$. Dabei gilt $g(z)=z(1+g(z))^2$.
Aus der Formel von Lagrange ergibt sich daher

$$a_0(n,k,2,1)=\frac{1}{n}D^{n-1}(1+x)^{2n}(kx^{k-1}+(k+1)x^k)\Big|_{x=0}=\frac{k\binom{2n}{n-k}+(k+1)\binom{2n}{n-k-1}}{n}$$

$$=\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n-k}=\binom{2n}{n-k}-\binom{2n}{n-k-1}.$$

Die zugehörige Matrix beginnt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 28 & 20 & 7 & 1 & 0 \\ 42 & 90 & 75 & 35 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Speziell ist

$$\sum_{k=0}^{n} a_0(n,k,2,1)=\binom{2n}{n}. \qquad (1.61)$$

Für die Hankeldeterminante ergibt sich

$$\det\left(u_0(i+j,a,b)\right)_{i,j=0}^{n-1}=b^{\binom{n}{2}}. \qquad (1.62)$$

Interessant ist auch die Folge $\left(u_0(n,0,1)\right)$. Hier erfüllt die erzeugende Funktion die Gleichung $f_0(z,0,1)=1+2izf_0(z,0,1)-izf_0(z,0,1)^2$. Setzt man $f_0(z,0,1)=1+izh(z)$, so ergibt sich $h(z)=1+z^2h(z)$, d.h. $h(z)=f(z,2,1)$. Somit ist
$f_0(z,0,1)=1+izf(z,2,1)=1+i\sum_{n\geq 0} C_n z^{2n+1}$.
Genau so leicht verifiziert man durch Vergleich der Rekursionen, dass
$a_0(2n+1,2k+1,0,1)=a_0(n,k,2,1)$,
$a_0(2n+1,2k,0,1)=ia_0(n,k,2,1)$,
$a_0(2n+2,2k+2,0,1)=a(n,k,2,1)$,
$a_0(2n+2,2k+1,0,1)=ia(n,k,2,1)$

gilt. Das sieht man auch aus der entsprechenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 2 & 3i & 3 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5i & 5 & 4i & 4 & i & 1 & 0 & 0 \\ 5i & 5 & 9i & 9 & 5i & 5 & i & 1 & 0 \\ 0 & 14i & 14 & 14i & 14 & 6i & 6 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.3
Sei

$$u_0(n,a,b;t)=\sum_{k=0}^{n} a_0(n,k,x,y)t^k. \tag{1.63}$$

Dann gilt für die Hankeldeterminanten

$$\det\left(u_0(i+j,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=x(a,b)^{\binom{n-1}{2}}y(a,b)^{\binom{n}{2}}(x(a,b)+t)^{n-1}=b^{\binom{n-1}{2}}\left(b+y(a,b)t\right)^{n-1} \tag{1.64}$$

und

$$\det\left(u_0(i+j+1,a,b;t)\right)_{i,j=0}^{n-1}=x(a,b)^{\binom{n}{2}}y(a,b)^{\binom{n}{2}}(x(a,b)+t)^{n}=b^{\binom{n}{2}}(x(a,b)+t)^{n}.$$

Dazu definiert man $a_0(n,k,a,b;t)=\sum_{j=0}^{n-k} a_0(n,k+j,a,b)t^j$. Dabei ist $a_0(n,0,x,y;t)=u_0(n,a,b;t)$ und $a_0(n,n,a,b;t))=a_0(n,n,a,b)=1.$

Man prüft durch Koeffizientenvergleich sofort nach, dass

$$a_0(n,0,a,b;t)=(x(a,b)+t)a_0(n-1,0,a,b;t)+y(a,b)(x(a,b)+t)a_0(n-1,1,a,b;t) \tag{1.65}$$

und

$$a_0(n,k,a,b;t)=a_0(n-1,k-1,a,b;t)+aa_0(n-1,k,a,b;t)+ba_0(n-1,k+1,a,b;t) \tag{1.66}$$

gilt.

Es ist also $r_0t_0=y(a,b)(x(a,b)+t)$ und $r_kt_k=b$ für $k\geq 1.$ Daher folgt die Aussage des Satzes aus (1.18) und (1.20). Denn man rechnet sofort nach, dass in diesem Fall $\det(G_n)=x(a,b)^{n+1}+tx(a,b)^n$ ist.

Weiters ergibt sich

$$f_0(z,a,b;t) := \sum_n u_0(n,a,b;t) z^n$$
$$= 1 + (x(a,b)+t) z f_0(z,a,b;t) + y(a,b)(x(a,b)+t) z^2 f_0(z,a,b;t) f(z,a,b). \quad (1.67)$$

Es gilt

$$f_0(z,a,b;t) = \frac{f(z,a,b;t)}{1+y(a,b)zf(z,a,b)} = \frac{f(z,a,b)}{(1-tzf(z,a,b))(1+y(a,b)zf(z,a,b))} = \frac{f_0(z,a,b)}{1-tzf(z,a,b)}. \quad (1.68)$$

Denn sei
$G(z) = f_0(z,a,b;t)(1+y(a,b)zf(z,a,b)).$
Dann folgt aus (1.67)
$$G(z) = \frac{1+y(a,b)zf(z,a,b)}{1-(x(a,b)+t)z - y(a,b)(x(a,b)+t)z^2 f(z,a,b)}.$$
Es genügt also zu zeigen, dass
$$\frac{1+y(a,b)zf(z,a,b)}{1-(x(a,b)+t)z - y(a,b)(x(a,b)+t)z^2 f(z,a,b)} = \frac{f(z,a,b)}{(1-tzf(z,a,b))}$$
gilt. Das reduziert sich auf (1.11), indem man mit den Nennern multipliziert und vereinfacht.

Als Beispiel betrachten wir
$f(z,3,2) = 1 + 3zf(z,3,2) + 2z^2 f(z,3,2)^2 = (1+2zf(z,3,2))(1+zf(z,3,2)).$
Hier ergibt sich $f_0(z,3,2) = 1 + 2zf(z,3,2)$. Das ist die Folge A006318 der (großen) Schröderzahlen
$\left(u_0(n,3,2)\right) = \left(1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, \cdots\right).$
In „Some q-analogues of the Schröder numbers arising from combinatorial statistics on lattice paths" (J. Stat. Planning and Inference 34(1993), 35-55) bezeichnen J. Bonin, L- Shapiro und R. Simion die Folge $\left(u_0(n,2+q,1+q)\right)$, deren erzeugende Funktion
$f_0(z,2+q,1+q) = 1 + (1+q)zf(z,2+q,1+q)$ ist, als $q-$Analogon der Schröderzahlen.

Hier ergibt sich
$$f_0(z,2+q,1+q;-1) = \frac{f_0(z,2+q,1+q)}{1+zf(z,2+q,1+q)} = 1 + qzf_0(z,2+q,1+q).$$
Denn

$$\left(1+zf(z,2+q,1+q)\right)\left(1+qzf_0(z,2+q,1+q)\right) = \left(1+zf(z,2+q,1+q)\right)\left(1+qz+q(1+q)z^2 f(z,2+q,1+q)\right) =$$
$$= 1 + zf(z,2+q,1+q) + qz + qz^2 f(z,2+q,1+q) + q(1+q)z^2 f(z,2+q,1+q) + q(1+q)z^3 f(z,2+q,1+q)^2$$
$$= 1 + qz + zf(z,2+q,1+q) + q(2+q)z^2 f(z,2+q,1+q) + q(1+q)z^3 f(z,2+q,1+q)^2$$
$$= 1 + zf(z,2+q,1+q) + qzf(z,2+q,1+q) = 1 + (1+q)zf(z,2+q,1+q) = f_0(z,2+q,1+q).$$

Trivial ist
$$f_0(z,a,b;-x(a,b)) = 1. \quad (1.69)$$
Also zum Beispiel $f_0(z,3,2;-2) = 1$ oder etwas allgemeiner $f_0(z,2+q,1+q;-1-q) = 1.$

Die Matrix $\left(a_0(n,k,3,2;t\right)$ beginnt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t+2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (t+2)\,(t+3) & t+5 & 1 & 0 & 0 \\ (t+2)\,(t^2+6\,t+11) & t^2+8\,t+23 & t+8 & 1 & 0 \\ (t+2)\,(t^3+9\,t^2+31\,t+45) & t^3+11\,t^2+49\,t+107 & t^2+11\,t+49 & t+11 & 1 \end{pmatrix}$$

Speziell gilt

$\det\left(u_0(i+j,2,1;t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = (1+t)^{n-1}$

und

$\det\left(u_0(i+j+1,2,1;t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = (1+t)^{n}.$

Das ist eine Verallgemeinerung der Tatsache, dass die Folge $u(n,2,1) = C_n, n \geq 0,$ dadurch charakterisiert ist, dass beide Folgen von Hankeldeterminanten identisch 1 sind.
Beachtet man (1.61) so ergibt sich

$$\det\left(\binom{2i+2j}{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1} = 2^{n-1}. \tag{1.70}$$

Für die Schröderzahlen erhalten wir

$\det\left(u_0(i+j,3,2;t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = 2^{\binom{n-1}{2}}(2+t)^{n-1}$

$\det\left(u_0(i+j+1,3,2;t)\right)_{i,j=0}^{n-1} = 2^{\binom{n}{2}}(2+t)^{n}.$

2. q-Analoga

Satz 2.1

Die folgenden Aussagen über die Folge

$$\left(w(n,x,y,q)\right)_{n\geq 0} \tag{2.1}$$

sind äquivalent:

1) *Die erzeugende Funktion*

$$F(z,x,y,q) = \sum_{n\geq 0} w(n,x,y,q)z^n \tag{2.2}$$

erfüllt

$$F(z,x,y,q) = 1+(x+y)zF(z,x,y,q)+qxyz^2F(z,x,y,q)F(qz,x,y,q). \tag{2.3}$$

2)

$$w(n,x,y,q) = (x+y)w(n-1,x,y,q)+qxy\sum_{k=0}^{n-2} q^k w(k,x,y,q)w(n-k-2,x,y,q) \tag{2.4}$$

3)

$$F(z,x,y,q)=\frac{\rho(qz,x,y,q)}{\rho(z,x,y,q)}, \tag{2.5}$$

wobei

$$\rho(z,x,y,q):=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{r_k(x,y,q)}{(q)_k}(-z)^k \tag{2.6}$$

ist. Dabei bedeute $(q)_n=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ *und* $r_n(x,y,q)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}$ *die Rogers-Szegö Polynome.*

Die ersten Terme dieser Folge sind

$\{1,\ x+y,\ x^2+2\,x\,y+q\,x\,y+y^2,\ x^3+3\,x^2\,y+2\,q\,x^2\,y+q^2\,x^2\,y+3\,x\,y^2+2\,q\,x\,y^2+q^2\,x\,y^2+y^3,\ x^4+4\,x^3\,y+3\,q\,x^3\,y+2\,q^2\,x^3\,y+q^3\,x^3\,y+6\,x^2\,y^2+6\,q\,x^2\,y^2+5\,q^2\,x^2\,y^2+2\,q^3\,x^2\,y^2+q^4\,x^2\,y^2+4\,x\,y^3+3\,q\,x\,y^3+2\,q^2\,x\,y^3+q^3\,x\,y^3+y^4\}$

Man kann $w(n,x,y,q)=\sum_{k=1}^{n+1} Nar(n,k)x^{k-1}y^{n+1-k}$ schreiben. Es scheint jedoch keine explizite Formel für diese $q-$Narayanazahlen $Nar(n,k)$ zu geben.

Die erzeugende Funktion $F(z,x,y,q)$ besitzt die Darstellung (2.5), für die es im Fall $q=1$ kein Analogon gibt.

Die Rogers-Szegö Polynome $r_n(x,y,q)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}$ genügen der Rekurrenz $r_n(x,y,q)=(x+y)r_{n-1}(x,y,q)+xy(q^{n-1}-1)r_{n-2}(x,y,q)$.

Daher ergibt sich

$$\rho(z,x,y,q)-\rho(qz,x,y,q)=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}}\frac{r_k(x,y,q)}{(1\div q)^{k-1}}(-z)^k=-(x+y)z\rho(qz,x,y,q)-qxyz^2\rho(q^2z,x,y,q)$$

also

$$\rho(qz,x,y,q)=\rho(z,x,y,q)+z(x+y)\rho(qz,x,y,q)+qxyz^2\rho(q^2z,x,y,q).$$

Wenn wir nun

$$F(z,x,y,q)=\frac{\rho(qz,x,y,q)}{\rho(z,x,y,q)}$$

setzen, ergibt sich

$$F(z,x,y,q)=1+(x+y)zF(z,x,y,q)+qxyz^2F(z,x,y,q)F(qz,x,y,q).$$

Daraus ergibt sich eine weitere Rekurrenz für $w(n,x,y,q)$:

$$w(n,x,y,q)=\frac{q^{\binom{n+1}{2}}r_n(x,y,q)(-1)^n}{(q)_n}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{q^{\binom{k}{2}}r_k(x,y,q)}{(q)_k}w(n-k,x,y,q)$$

Im Spezialfall $(x,y)=(i,-i)$ erhalten wir

$F(z,i,-i,q)=1+qz^2F(z,i,-i,q)F(qz,i,-i,q).$

Die entsprechenden $q-$ Analoga der Catalanzahlen sind die Zahlen $q^nC_n(q^2)$:

$\{1,0,q,0,q^2(q^2+1),0,q^3(q^6+q^4+2q^2+1),0,$
$q^4(q^2+1)(q^{10}+2q^6+q^4+2q^2+1),0,q^5(q^6+q^2+1)(q^{14}+q^{12}+q^{10}+q^8+3q^6+3q^4+3q^2+1)\}$

Hier ist $\rho(z,i,-i,q)=\sum_k\frac{q^{2k^2-k}(-1)^kz^{2k}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2k})}$

Im Fall $(x,y)=(1,1)$ erhalten wir ein anderes $q-$ Analogon der Catalanzahlen C_{n+1}, nämlich
$\{1,2,q+4,2(q^2+2q+4),q^4+4q^3+9q^2+12q+16,2(q^6+2q^5+6q^4+10q^3+15q^2+16q+16)\}$

Im Fall $(x,y)=\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ erhalten wir ein $q-$ Analogon der Motzkinzahlen
$\{1,1,q+1,q^2+2q+1,q^4+q^3+3q^2+3q+1,q^6+2q^5+3q^4+4q^3+6q^2+4q+1\}$

Um ein Analogon der $a(n,k)$ zu bekommen, betrachten wir wieder Gitterpunktwege, die von $(0,0)$ ausgehen, horizontale Schritte sowie Aufstiege und Abstiege der Höhe 1 besitzen und nie unter die $x-$ Achse fallen. Wenn ein horizontaler Schritt auf der Höhe k verläuft, so sei sein Gewicht $q^k(x+y)z$, jeder Aufstieg habe das Gewicht 1 und jeder Abstieg, der auf der Höhe k endet, habe das Gewicht $q^{2k+1}xy$.
Sei $c(n,k,x,y,q)$ das Gewicht aller Wege von $(0,0)$ nach (n,k).
Dann gilt, wenn wir wieder $c(n,k)$ für $c(n,k,x,y,q)$ schreiben,

$$c(0,k)=[k=0]$$
$$c(n,0)=(x+y)c(n-1,0)+qxyc(n-1,1) \tag{2.7}$$
$$c(n,k)=c(n-1,k-1)+q^k(x+y)c(n-1,k)+q^{2k+1}xyc(n-1,k+1)$$

Man beachte, dass hier die Abhängigkeit von x und y angegeben ist im Gegensatz zum ersten Teil, wo die Abhängigkeit von $a=x+y$ und $b=xy$ betont haben.

Genauso wie oben gilt hier
$\sum_k c(n,k,x,y,q)c(m,k,y,x,q)q^{k^2}(xy)^k=c(m+n,0,x,y,q)$.

Daher ergibt sich für die erste Hankeldeterminante der Folge $\left(w(n,x,y,q)\right)$

$$\det(w(i+j,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1} = (xy)^{\binom{n}{2}} q^{\sum_{k=0}^{n-1} k^2} = (xy)^{\binom{n}{2}} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$$

Bei der Berechnung der zweiten Hankeldeterminante tritt hier

$$D_n(x,y,q) = C_n(x,y,q)\begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ qxy & q(x+y) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & q^3xy & q^2(x+y) & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & q^5xy & q^3(x+y) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

auf.

Sei $d_n(x,y,q)$ die Determinante der rechten Matrix. Dann ist $d_1(x,y,q)=x+y$ und $d_n(x,y,q)=(x+y)d_{n-1}(qx,qy,q)-qxyd_{n-2}(q^2x,q^2y,q).$

Daraus ergibt sich sofort $d_n(x,y,q)=q^{\binom{n}{2}}d_n.$

Somit erhalten wir die zweite Hankeldeterminante

$$\det(w(i+j+1,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1} = (qxy)^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.$$

Wir erhalten daher

Satz 2.2

Die Hankeldeterminanten der Folge $\left(w(n,x,y,q)\right.$ *sind*

$$\det(w(i+j,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1} = (xy)^{\binom{n}{2}} q^{\sum_{k=0}^{n-1} k^2} = (xy)^{\binom{n}{2}} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} \tag{2.8}$$

und

$$\det(w(i+j+1,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1} = (qxy)^{\binom{n}{2}} \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}. \tag{2.9}$$

Genau so wie im Fall $q=1$ lässt sich auch hier die Hankeldeterminante $\det(c(i+j,1,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1}$ leicht berechnen. Es ergibt sich wegen $qbc(n,1,x,y,q)=c(n+1,0,x,y,q)-(x+y)c(n,0,x,y,q)$

$$\det(c(i+j,1,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1} = (xy)^{\binom{n}{2}} q^{\sum_{k=0}^{n-1} k^2} (qxy)^{-n} d(n,x,y),$$

wobei $d(n,x,y)=(q^{n-1}-1)(x+y)d(n-1,x,y)-q^{2n-3}xyf(n-2,x,y)$
mit den Anfangswerten $d(1,x,y)=0$ und $d(2,x,y)=-qxy$ ist.
Die ersten Werte sind also
$0,-1,q^3(1-q^2)(x+y)xy, q^{16}(xy)^4-q^{11}(1-q)^2(1+q)(1+q+q^2)(x+y)^2(xy)^3,\cdots.$
Setzt man $(x+y)=a$ und xyb, dann hängen diese Werte nicht nur wie im Fall $q=1$ von b, sondern auch von a ab.

Im Spezialfall $(x,y)=(ib,-ib)$ oder $(a,b)=(0,b)$ erhalten wir
$\det(c(i+j,1,ib,-ib,q))_{i,j=0}^{2n}=0$
und

$$\det(c(i+j,1,ib,-ib,q))_{i,j=0}^{2n-1}=(-1)^n q^{16\binom{n+1}{3}} b^{4\binom{n}{2}}. \tag{2.10}$$

Im Fall der Hankeldeterminanten $\det(c(i+j,2,x,y,q))_{i,j=0}^{n-1}$ ergeben sich kompliziertere Formeln. Zum Beispiel beginnt die Folge $\det(c(i+j,2,ib,-ib,q))_{i,j=0}^{n-1}$ mit
$0,0,-1,q^6(1-q^6)b^2,-q^{19}(1-q^6)(1-q^6-q^8)b^5,q^{41}(1-q^6-q^8)(1-q^6-q^8-q^{10}+q^{16})b^9,\cdots.$

Das Analogon von $a^*(n,k,x,y)$ ist $c^*(n,k,x,y,q)=q^{\binom{k}{2}}x^k c(n,k,x,y,q).$ Die entsprechenden Rekursionen lauten hier

$$\begin{aligned}
&c^*(0,k)=[k=0]\\
&c^*(n,0)=(x+y)c^*(n-1,0)+qyc^*(n-1,1)\\
&c^*(n,k)=q^{k-1}xc^*(n-1,k-1)+q^k(x+y)c^*(n-1,k)+q^{k+1}yc^*(n-1,k+1)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Setzt man $F_0(z,x,y,q)=1+xzF(z,x,y,q),$ dann ergibt sich

$$F_0(z,x,y,q)=1+xzF_0(z,x,y,q)-yzF_0(qz,x,y,q)+yzF_0(z,x,y,q)F_0(qz,x,y,q) \tag{2.12}$$

Das impliziert

$$F_0(z,x,y,q)=\frac{1-yzF_0(qz,x,y,q)}{1-yzF_0(qz,x,y,q)-xz}=\frac{1}{1-\dfrac{xz}{1-yzF_0(qz,x,y,q)}}=\frac{1}{1-}\frac{xz}{1-}\frac{yz}{1-}\frac{qxz}{1-}\cdots=$$

$$=\frac{1}{1-xzF_0(z,y,qx,q)}.$$

Es ist also
$F_0(z,x,y,q)\left(1-xzF_0(z,y,qx,q)\right)=1,$
d.h.
$F_0(z,x,y,q)=1+xzF_0(z,x,y,q)F_0(z,y,qx,q)$
oder

$$F_0(z,x,y,q)=1+xzF_0(z,x,y,q)+xyz^2F_0(z,x,y,q)F(z,y,qx,q). \tag{2.13}$$

Setzt man also

$$F_0(z,x,y,q)=\sum_n w_0(n,x,y,q)z^n, \tag{2.14}$$

dann ist klar, dass $w_0(n,x,y,q)=xw(n,x,y,q)$ für $n\geq 1$ gilt.

Wegen (2.13) und (1.14) erfüllen die $c_0(n,k)$, die durch

$$c_0(n+k,k,x,y)=q^{\binom{k}{2}}\left[z^n\right] f_0(z,x,y,q)\,f(z,y,qx,q)\,f(qz,y,qx,q)\cdots f(q^{k-1}z,y,qx,q) \qquad (2.15)$$

definiert sind, die Rekursionen

$$\begin{aligned} &c_0(n,0)=xc_0(n-1,0)+xyc_0(n-1,1)\\ &c_0(n,k)=q^{k-1}c_0(n-1,k-1)+q^{k-1}(qx+y)c_0(n-1,k)+q^k xyc_0(n-1,k+1). \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Daher ergibt sich wieder für die Hankeldeterminante $\det\left(w_0(i+j,x,y)\right)_{i,j=0}^{n-1}=(xy)^{\binom{n}{2}}q^{2\binom{n}{3}}$.

In Analogie zu (1.69) gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^k c_0(n,k,x,y)=\left[n=0\right]. \qquad (2.17)$$

Das folgt sofort aus (2.16). Denn

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1}(-x)^k c_0(n+1,k,x,y)=xc_0(n,0,x,y)+xyc_0(n,1,x,y)\\ &+\sum_{k=1}^{n+1}(-x)^k\left(q^{k-1}c_0(n,k-1)+q^{k-1}(qx+y)c_0(n,k)+q^k xyc_0(n,k+1)\right)\\ &=\sum_{k=2}^{n}\left((-x)^{k+1}q^k+(-x)^k q^{k-1}(qx+y)+(-x)^{k-1}q^{k-1}xy\right)c_0(n,k)=0. \end{aligned}$$

Sei nun $C_0(x,y,q)=1$ and $C_{n+1}(x,y,q)=xw(n,x,y,q)$, dann impliziert (2.12) die weitere Rekurrenz

$$C_n(x,y,q)=xC_{n-1}(x,y,q)+y\sum_{k=0}^{n-2}q^k C_k(x,y,q)C_{n-1-k}(x,y,q). \qquad (2.18)$$

Die Folge $C_n(1,s,q)$ ist die Folge der Polya-Gessel-Catalanzahlen. Sie beginnt mit
$\{1,\ 1,\ s+1,\ s^2+q\,s+2\,s+1,\ s^3+q^2\,s^2+2\,q\,s^2+3\,s^2+q^2\,s+2\,q\,s+3\,s+1\}$
Es gibt noch andere q – Analoga der Catalanzahlen sowie weitere Eigenschaften der hier betrachteten. Mehr darüber findet man in der Arbeit „q-Catalan numbers“ von J. Fürlinger und J. Hofbauer, J. Comb. Th. A 40/2, 1985, 248-264, und in „ A noncommutative generalization and q-analog of the Lagrange inversion formula“ von I. Gessel, Trans. AMS 257 (1980), 455-482.

3. Weitere q-Analoga.

Sei $(x \dot{+} y)^k := (x+y)(x+qy)\cdots(x+q^{k-1}y)$
und

$$\sigma(z,x,y,q) = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{(x \dot{+} y)^k}{(q)_k}(-z)^k. \tag{3.1}$$

Wir betrachten nun die Reihe

$$g(z,x,y,q) = \frac{\sigma(qz,x,y,q)}{\sigma(z,x,y,q)}. \tag{3.2}$$

Aus

$$\sigma(z,x,y,q) - \sigma(qz,x,y,q) = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{(x \dot{+} y)^k}{(q)_k}(-z)^k(1-q^k) =$$

$$= -z\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k-1}{2}} \frac{(x \dot{+} y)^{k-1}(x+q^{k-1}y)}{(q)_{k-1}}(-qz)^{k-1}$$

folgt

$$\sigma(z,x,y,q) - \sigma(qz,x,y,q) = -xz\sigma(qz,x,y,q) - yz\sigma(q^2z,x,y,q)$$

d.h.

$$g(z,x,y,q) = 1 + xzg(z,x,y,q) + yzg(z,x,y,q)g(qz,x,y,q) \tag{3.3}$$

und

$$\sigma(z,x,y,q) - \sigma(qz,x,y,q) = -z\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k-1}{2}} \frac{(x+y)(x \dot{+} qy)^{k-1}}{(q)_{k-1}}(-qz)^{k-1} = -(x+y)z\sigma(qz,x,qy,q).$$

Sei nun

$$h(z,x,y,q) = \frac{\sigma(qz,x,qy,q)}{\sigma(z,x,y,q)}. \tag{3.4}$$

Dann gilt

$$g(z,x,y,q) = 1 + (x+y)zh(z,x,y,q). \tag{3.5}$$

Setzt man das in die Identität (3.3) ein, so ergibt sich, dass $h(z,x,y,q)$ die Identität
$h(z,x,y,q) = 1 + (x+y)zh(z,x,y,q) + qyzh(qz,x,y,q) + qy(x+y)z^2h(z,x,y,q)h(qz,x,y,q)$
erfüllt.

Diese ist wegen

$$\frac{h(qz,x,y,q)}{h(z,x,y,q)} = \frac{\sigma(q^2z,x,qy,q)}{\sigma(qz,x,y,q)}\frac{\sigma(z,x,y,q)}{\sigma(qz,x,qy,q)} = \frac{g(qz,x,qy,q)}{g(z,x,y,q)}. \tag{3.6}$$

äquivalent mit

$$h(z,x,y,q) = 1 + (x+y+qy)zh(z,x,y,q) + q^2y(x+qy)z^2h(z,x,y,q)h(qz,x,qy,q). \tag{3.7}$$

Denn (3.6) impliziert

$$qyzh(qz,x,y,q)(1+(x+y)zh(z,x,y,q)) = qyzh(qz,x,y,q)g(z,x,y,q)$$
$$= qyzh(z,x,y,q)g(qz,x,qy,q) = qyzh(z,x,y,q)(1+(x+qy)qzh(qz,x,qy,q)).$$

Also ergibt sich, wenn man $g(qz,x,y,q)$ durch (3.5) ausdrückt,

$$\begin{aligned} g(z,x,y,q) &= 1 + xzg(z,x,y,q) + yzg(z,x,y,q)g(qz,x,y,q) \\ &= 1+(x+y)zg(z,x,y,q) + q(x+y)yz^2 g(z,x,y,q)h(qz,x,y,q). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für die entsprechenden $a(n,k)$ folgt daraus

$$\begin{aligned} &a(0,k) = [k=0] \\ &a(n,0) = (x+y)a(n-1,0) + qy(x+y)a(n-1,1) \\ &a(n,k) = a(n-1,k-1) + q^k(x+q^{k-1}(1+q)y)a(n-1,k) + q^{3k+1}y(x+q^k y)a(n-1,k+1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Daraus folgt wie oben

$$\det\left(\left(a(i+j,0,x,y,q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)^2}{2}} y^{\binom{n}{2}} (x+y)^{n-1}(x+qy)^{n-2}\cdots(x+q^{n-2}y). \tag{3.10}$$

Die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} x+y & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q(x+y)y & q(x+(1+q)y) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & q^4 y(x+qy) & q^2(x+q(1+q)y) & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & q^7 y(1+q^2 y) & q^3(x+q^2(1+q)y) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ergibt sich zu

$$(x+y)\cdot q(x+qy)\cdot q^2(x+q^2y)\cdots q^{n-1}(1+q^{n-1}y) = q^{\binom{n}{2}}(x+y)(x+qy)\cdots(x+q^{n-1}y)$$

Dazu subtrahiere man qy mal der ersten Zeile von der zweiten Zeile, dann $q^3 y$ mal der neuen zweiten Zeile von der dritten Zeile usw.
Somit erhalten wir

$$\det\left(\left(a(i+j+1,0,x,y,q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right) = q^{\frac{n^2(n-1)}{2}} y^{\binom{n}{2}} (x+y)^n (x+qy)^{n-1}\cdots(x+q^{n-2}y)(x+q^{n-1}y). \tag{3.11}$$

Wenn man diese $q-$Analoga mit den entsprechenden Formeln für $q=1$ vergleicht, so sieht man, dass es bei $F(z,x,y,q)$ wenig Sinn macht, $(x+y,xy)=(a,b))$ zu setzen, da sich dadurch keine Vereinfachungen ergeben und (2.6) ziemlich kompliziert wird. Das gilt in noch stärkerem Maße für $g(z,x,y,q)$.

Als letztes Beispiel sei noch einmal auf $g(z,0,1,q)$ hingewiesen, das wir in der Einleitung mit $g(z,q)$ bezeichnet haben. Hier gilt $g(z,0,1,q)=1+zh(z,0,1,q),$ wobei
$h(z,0,1,q)=1+zh(z,0,1,q)+qzh(qz,0,1,q)+qz^2h(z,0,1,q)h(qz,0,1,q)$
ist.