Einige Bemerkungen über Hankeldeterminanten

Johann Cigler

Vortrag zum 50. Geburtstag von Christian Krattenthaler

1. Einleitung

Ich möchte eine Übersicht über einige konkrete Hankeldeterminanten geben, deren Werte man sehr einfach erraten und beweisen kann.
Zunächst möchte ich kurz skizzieren, wie Hankeldeterminanten mit orthogonalen Polynomen zusammenhängen. (Ausführlicher habe ich das in Mathematische Randbemerkungen 7 dargestellt).

Sei $(a(n))$ eine Folge von Elementen eines Körpers mit $a(0)=1.$
Ist $\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$ für alle $n \geq 1,$ dann sind die Polynome

$$p(n,x)=\frac{1}{\det(a(i+j))_{i,j=0}^{n-1}}\det\begin{pmatrix} a(0) & a(1) & \cdots & a(n-1) & 1 \\ a(1) & a(2) & \cdots & a(n) & x \\ a(2) & a(3) & \cdots & a(n+1) & x^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a(n) & a(n+1) & \cdots & a(2n-1) & x^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

orthogonal bezüglich des linearen Funktionals $F,$ das durch $F(x^n)=a(n)$ definiert ist.

Nach dem Satz von Favard erfüllen sie daher eine Rekursion der Gestalt

$$p(n,x)=(x-s(n-1))p(n-1,x)-t(n-2)p(n-2,x). \tag{1.2}$$

Definiert man Koeffizienten $a(n,k)$ durch

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} a(n,k)p(k,x), \tag{1.3}$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} &a(0,k)=[k=0] \\ &a(n,0)=s(0)a(n-1,0)+t(0)a(n-1,1) \\ &a(n,k)=a(n-1,k-1)+s(k)a(n-1,k)+t(k)a(n-1,k+1). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dabei ist $a(n,0)=F(x^n)=a(n).$

Unter der Hankeldeterminante der Ordnung k der Folge $\left(a(n)\right)$ verstehen wir die Determinante

$$d(n,k)=\det\left(a(i+j+k)\right)_{i,j=0}^{n-1}. \tag{1.5}$$

Dann gilt

$$d(n,0)=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{i-1}t(k) \tag{1.6}$$

und

$$d(n,1)=(-1)^n p(n,0)d(n,0). \tag{1.7}$$

Im einfachsten Fall, wo alle $s(n)$ und $t(n)$ konstant sind, kann man daraus sofort die entsprechenden Hankeldeterminanten ableiten. Seien x,y beliebige komplexe Zahlen und $s(n)=x+y, t(n)=xy$, dann erfüllt die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n$ die Identität

$$f(z)=1+(x+y)zf(z)+xyz^2 f(z)^2 \tag{1.8}$$

und man erhält für die Hankeldeterminanten

$$d(n,0)=(xy)^{\binom{n}{2}} \tag{1.9}$$

und

$$d(n,1)=(xy)^{\binom{n}{2}}\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}. \tag{1.10}$$

Falls alle diese Determinanten von Null verschieden sind, ist dadurch die ursprüngliche Folge eindeutig bestimmt.
Wenn x,y verschiedene $j-$te Einheitswurzeln sind, ist $d(jn-1,1)=0.$ Zum Beispiel erhält man für $(x,y)=\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$ die Motzkinzahlen $1,1,2,4,9,21,51,\cdots.$ Hier ist $d(n,0)=1$, während $\left(d(n,1)\right)_{n\geq 1}=1,0,-1,-1,0,1,1,0,-1,-1,0,1,\cdots$ periodisch mit Periode 6 ist.

Wenn man von einer Folge $(a(n))$ ausgeht, die abwechselnd Nullen hat, d.h. von der Form $a(2n)=c(n)$ und $a(2n+1)=0$ ist, dann ergibt sich mit Induktion, dass alle $s(n)=0$ und die $a(n,k)$ durch die Werte $\left(t(n)\right)$ eindeutig festgelegt sind.
Wir betrachten dann außer den Determinanten $\det\left(a(i+j)\right)$ auch die Determinanten, die zu den Folgen

$$\left(a_0(n)\right)=\left(a(2n,0)\right)=\left(c(n)\right) \tag{1.11}$$

und

$$\left(a_1(n)\right)=\left(a(2n+1,1)\right)=\left(t(0)c(n+1)\right) \tag{1.12}$$

gehören.

Man rechnet leicht nach, dass für die zu diesen Folgen gehörenden Werte

$$s_0(0)=t(0), s_0(n)=t(2n-1)+t(2n), t_0(n)=t(2n)t(2n+1) \tag{1.13}$$

sowie

$$s_1(0)=t(0)+t(1), s_1(n)=t(2n)+t(2n+1), t_1(n)=t(2n+1)t(2n+2) \tag{1.14}$$

gilt.

2. Catalanzahlen

Das Paradebeispiel für Hankeldeterminanten bilden die Catalanzahlen $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Man wird auf sie geführt, wenn man $s(n)=0$ und $t(n)=1$ wählt.
Die Matrix der $a(n,k)$ beginnt dann mit

1							
0	1						
1	0	1					
0	2	0	1				
2	0	3	0	1			
0	5	0	4	0	1		
5	0	9	0	5	0	1	
0	14	0	14	0	6	0	1

Dann kann $a(n,k)$ als die Anzahl der Dyckwege von $(0,0)$ nach (n,k) interpretiert werden.
Somit ergibt sich $a(2n,0)=C_n$.
Man erhält also das wohlbekannte Resultat, dass für die Folge $(1,0,1,0,2,0,5,0,14,\cdots)$ alle Hankeldeterminanten 1 sind.

Daraus folgt auch sofort, dass die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_{n\geq 0}C_n z^n$ durch die Identität

$$f(z)=1+zf(z)^2 \tag{2.1}$$

charakterisiert ist.
Die Matrix der $a(2n,2k)$ ist dann das bekannte Catalandreieck A039599, das wie folgt beginnt:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 3 & 1 & & \\ 5 & 9 & 5 & 1 & \\ 14 & 28 & 20 & 7 & 1 \end{array} \tag{2.2}$$

Hier ist $s(0)=1$ und $s(n)=2$ für $n>0$ und $t(n)=1.$

Daraus liest man ab, dass

$$\det\left(\left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1 \tag{2.3}$$

ist.

Für die Folge $a(2n+1,1)=C_{n+1}$ ergibt sich $s(n)=2$ und $t(n)=1$ für alle $n.$ Damit erhält man ein weiteres bekanntes Catalandreieck A039598 mit den Anfangswerten

$$\begin{array}{ccccc} 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 14 & 14 & 6 & 1 \\ 42 & 48 & 27 & 8 & 1 \end{array} \tag{2.4}$$

Das ergibt

$$\det\left(\left(C_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1. \tag{2.5}$$

Daraus ergibt sich wieder das wohlbekannte Resultat, dass die Catalanzahlen die eindeutig bestimmten Zahlen mit

$$\det\left(\left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=\det\left(\left(C_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=1 \tag{2.6}$$

sind.
Eine kombinatorische Deutung dieses Catalandreicks ergibt, dass $b(n,k)=a(2n+1,2k+1)$ das Gewicht der Motzkinwege von $(0,0)$ nach (n,k) ist, wobei Aufstiege und Abstiege das Gewicht 1 und horizontale Strecken das Gewicht 2 haben.
Daraus ergibt sich für die erzeugende Funktion der Folge $\left(C_{n+1}\right)$

$$f(z)=1+2zf(z)+z^2 f(z)^2. \tag{2.7}$$

Aus den obigen Überlegungen ergibt sich auch sofort die Hankeldeterminante

$$\det\left(\left(C_{i+j+2}\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=n+1. \tag{2.8}$$

3. Die q-Catalanzahlen von L. Carlitz

Im Jahr 1964 haben L. Carlitz und J. Riordan ein $q-$Analogon $C_n(q)$ der Catalanzahlen betrachtet, dessen erzeugende Funktion der Gleichung

$$f(z) = 1 + zf(z)f(qz) \tag{3.1}$$

genügt.

Diese $q-$Catalanzahlen beginnen mit

1

1

$q+1$

q^3+q^2+2q+1

$q^6+q^5+2q^4+3q^3+3q^2+3q+1$

$q^{10}+q^9+2q^8+3q^7+5q^6+5q^5+7q^4+7q^3+6q^2+4q+1$

Man kennt allerdings keine explizite Formel.

Die Folge $\left(C_0(q),0,C_1(q),0,C_2(q),0,C_3(q),0,\cdots\right)$ hat die erzeugende Funktion

$$f(z) = 1 + z^2 f(z) f(\sqrt{q}z) \tag{3.2}$$

Daraus ergibt sich

$$s(n) = 0 \tag{3.3}$$

und

$$t(n) = q^n. \tag{3.4}$$

Daher haben die Hankeldeterminanten dieser Folge den Wert $q^{\binom{n}{3}}$.

Die entsprechende Matrix der $a(n,k)$ beginnt folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & \\
0 & 1+q & 0 & 1 & & & \\
1+q & 0 & 1+q+q^2 & 0 & 1 & & \\
0 & 1+2q+q^2+q^3 & 0 & 1+q+q^2+q^3 & 0 & 1 & \\
1+2q+q^2+q^3 & 0 & 1+2q+2q^2+2q^3+q^4 & 0 & 1+q+q^2+q^3 & 0 & 1
\end{array}$$

Die entsprechenden Werte für die Folge $(C_n(q))$ sind (vgl. q-Catalan und q-Motzkinzahlen, Sitzungsber. ÖAW 208 (1999), 3-20)

$$s(0)=1, s(n)=q^{2n-1}(1+q), t(n)=q^{4n+1}. \tag{3.5}$$

Jene für die Folge $(C_{n+1}(q))$ sind

$$s(n)=q^{2n}(1+q), t(n)=q^{4n+3}. \tag{3.6}$$

Die erzeugende Funktion dieser Folge erfüllt

$$f(z)=1+(1+q)zf(z)+q^3z^2 f(z)f(q^2z). \tag{3.7}$$

Für die Hankeldeterminanten ergibt sich

$$\det\left(\left(C_{i+j}(q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{-\binom{n}{2}+2\sum_{k=0}^{n-1}k^2}=q^{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}, \tag{3.8}$$

$$\det\left(\left(C_{i+j+1}(q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{\binom{n}{2}+2\sum_{k=0}^{n-1}k^2}=q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}} \tag{3.9}$$

und

$$\det\left(\left(C_{i+j+2}(q)\right)_{i,j=0}^{n-1}\right)=q^{3\binom{n}{2}+2\sum_{k=0}^{n-1}k^2}\left[n+1\right]=q^{\frac{n(n-1)(4n+7)}{6}}\left[n+1\right]. \tag{3.10}$$

Da keine explizite Formel für diese $q-$Catalanzahlen bekannt ist, ist es nicht verwunderlich, dass das auch für die höheren Hankeldeterminanten der Fall ist.

Dem Fall für $q=1,$ wo alle $s(n)$ und $t(n)$ konstant sind, entspricht hier $s(n)=q^n(x+y), t(n)=q^{2n+1}xy$. Hier erfüllt die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n$ die Identität

$$f(z)=1+(x+y)zf(z)+qxyz^2 f(z)f(qz). \tag{3.11}$$

Das ergibt die Hankeldeterminanten

$$d(n,0)=(xy)^{\binom{n}{2}}q^{\sum_{k=0}^{n-1}k^2} \tag{3.12}$$

und

$$d(n,1)=(qxy)^{\binom{n}{2}}\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}q^{\sum_{k=0}^{n-1}k^2}. \tag{3.13}$$

4. Schröderzahlen und q-Schröderzahlen

Die Folge der *(großen) Schröderzahlen*

$$\left(a(n)\right)=\left(1,2,6,22,90,\cdots\right) \tag{4.1}$$

hat die erzeugende Funktion

$f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n,$
welche durch die Identität

$$f(z)=1+zf(z)+zf(z)^2 \tag{4.2}$$

charakterisiert ist.

Die Folge $\left(a(0),0,a(1),0,a(2),\cdots\right)$ hat daher die erzeugende Funktion
$f(z)=1+z^2f(z)+z^2f(z)^2.$
Schreibt man das in der Form
$f(z)-z^2f(z)^2=1-z^2f(z)+2z^2f(z)$
oder
$f(z)=1+2z^2f(z)g(z)$ mit $g(z)=\dfrac{1}{1-z^2f(z)}$,
so ist also
$f(z)=1+2z^2f(z)g(z)$
und
$g(z)=1+z^2f(z)g(z).$

Das bedeutet, dass für diese Folge gilt

$$\begin{aligned}&s(n)=0,\\&t(2n)=2, t(2n+1)=1.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Für die ursprüngliche Folge $\left(a(0),a(1),a(2),\cdots\right)$ ist daher

$$\begin{aligned}&s(0)=2, s(n)=3\\&t(n)=2.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Das ergibt das Schröderdreieck A133367

1				
2	1			
6	5	1		
22	23	8	1	
90	107	49	11	1

Daraus ergeben sich die bekannten Resultate

$$d(n,0)=2^{\binom{n}{2}} \tag{4.5}$$

$$d(n,1)=2^{\binom{n+1}{2}}. \tag{4.6}$$

Aus der Kondensationsformel (8.1) ergibt sich
$2^{\binom{n}{2}}d(n-2,2)-2^{\binom{n-1}{2}}d(n-1,2)+2^{2\binom{n}{2}}=0$.

Daraus folgt

$$d(n,2)=2^{\binom{n+1}{2}}\left(2^{n+1}-1\right). \tag{4.7}$$

Die *(kleinen) Schröderzahlen* $1,1,3,11,45,197,\cdots$ haben die erzeugende Funktion

$$h(z)=\frac{f(z)+1}{2}=1-zh(z)+2zh(z)^2. \tag{4.8}$$

Man kann wieder schreiben
$h(z^2)=1+z^2h(z^2)g(z^2)$
$g(z^2)=1+2z^2h(z^2)g(z^2)$
Das ergibt

$$s(n)=0 \tag{4.9}$$

und

$$t(2n)=1, t(2n+1)=2. \tag{4.10}$$

Für die Folge aller kleinen Schröderzahlen gilt daher

$$s(0)=1, s(n)=3 \tag{4.11}$$

und

$$t(n)=2. \tag{4.12}$$

Somit ist

$$d(n,0)=d(n,1)=2^{\binom{n}{2}}. \tag{4.13}$$

Daraus ergibt sich noch einmal (4.7). Denn bezeichnet man die Hankeldeterminanten der großen Schröderzahlen mit $D(n,k)$, dann gilt, wenn man nach der ersten Zeile entwickelt
$d(n,0)=\frac{1}{2^n}\left(D(n,0)+D(n-1,2)\right)$.

Die *(großen)* $q-$*Schröderzahlen* (Barcucci et al. Ann.Comb. 3 (1999),171-190)
$\big(a(n)\big)=(1,1+q,(1+q)(1+q+q^2),(1+q)(1+2q+3q^2+3q^3+q^4+q^5),\cdots)$
haben die erzeugende Funktion

$f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n,$ die durch

$$f(z)=1+zf(z)+qzf(z)f(qz) \tag{4.14}$$

festgelegt ist.

Hier ergibt sich aus Mathematische Randbemerkungen 7, (3.9),

$$\begin{aligned}&s(0)=1+q,s(n)=q^n(1+q^n(1+q))\\&t(n)=q^{3n+2}(1+q^{n+1}).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Daraus folgt für die Hankeldeterminanten $D(n,k)$

$$D(n,0)=q^{\frac{n^2(n-1)}{2}}(1+q)^{n-1}(1+q^2)^{n-2}\cdots(1+q^{n-1}) \tag{4.16}$$

$$D(n,1)=q^{\frac{(n+1)n(n-1)}{2}}(1+q)^{n}(1+q^2)^{n-1}\cdots(1+q^{n}) \tag{4.17}$$

Mit der Kondensationsformel verifiziert man, dass

$$D(n,2)=\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^{n+1-j}\left(q^{\frac{(n-1)n(n+2)}{2}}\prod_{j=1}^{n+1}(1+q^j)-q^{\frac{(n+2)(n^2+1)}{2}}\right) \tag{4.18}$$

gilt.
Aus (4.15) ergeben sich für die Folge
$\big(a(0),0,a(1),0,a(2),\cdots\big)$
die Werte

$$s(n)=0,t(2n)=q^n(1+q^{n+1}),t(2n+1)=q^{2n+2}, \tag{4.19}$$

wenn man (1.13) beachtet.

Die kleinen $q-$Schröderzahlen $(b(n))$ haben die erzeugende Funktion $g(z)=\dfrac{1+qf(z)}{1+q}$ und erfüllen daher die Identität

$$g(z)=1-zg(qz)+(1+q)zg(z)g(qz). \tag{4.20}$$

Beachtet man, dass $b(0)=\frac{1+q}{1+q}, b(n)=\frac{qa(n)}{1+q}$ ist, so ergibt sich für die entsprechenden Hankeldeterminanten $d(n,k)$

$$d(n,0)=\frac{q^{n-1}}{(1+q)^n}D(n-1,2)+\left(\frac{q}{1+q}\right)^n D(n,0) \tag{4.21}$$

und

$$d(n,1)=\left(\frac{q}{1+q}\right)^n D(n,1). \tag{4.22}$$

Daher ist

$$d(n,0)=q^{\frac{n(n-1)^2}{2}}(1+q^n)(1+q^{n-1})^2\cdots(1+q^2)^{n-1} \tag{4.23}$$

und

$$d(n,1)=q^{\frac{n(n^2+1)}{2}}(1+q^n)(1+q^{n-1})^2\cdots(1+q^2)^{n-1} \tag{4.24}$$

Für die Folge
$\left(b(0),0,b(1),0,b(2),\cdots\right)$
ergeben sich daraus die Werte

$$s(n)=0, t(2n)=q^{2n+1}, t(2n+1)=q^n(1+q^{n+2}). \tag{4.25}$$

5. Eine interessante Klasse von Folgen

Es stellt sich heraus (vgl. Mathematische Randbemerkungen 8: Einige $q-$Hankeldeterminanten und damit verknüpfte Identitäten), dass sich auch für

$$a(n)=a(n,b,c,q)=\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}=\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^j b)}{\prod_{j=0}^{n-1}(1-q^j c)} \tag{5.1}$$

alle angegebenen Werte leicht erraten und beweisen lassen.

Man findet zuerst die $s(k)$ und $t(k)$ und bildet damit $a(n,k).$ Deren explizite Gestalt lässt sich ebenfalls leicht erraten. Man braucht dann nur nachprüfen, dass (1.4) mit den erratenen Werten erfüllt ist. Damit kann man die beiden Hankeldeterminantenfolgen explizit berechnen.

Für die genannten Folgen gilt noch mehr:
Aus

$$d(n,k,b,c)=\det\left(a(i+j+k)\right)_{i,j=0}^{n-1}=\det\left(\frac{(b;q)_{i+j+k}}{(c;q)_{i+j+k}}\right)_{i,j=0}^{n-1}=\det\left(\frac{(b;q)_k\left(q^k b;q\right)_{i+j}}{(c;q)_k\left(q^k c;q\right)_{i+j}}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

$$=\left(\frac{(b;q)_k}{(c;q)_k}\right)^n d(n,0,q^k b,q^k c)$$

kann man sogar alle Hankeldeterminantenfolgen explizit berechnen.
Für $d(n,0,b,c)$ ergibt sich

$$d(n,0,b,c)=q^{2\binom{n}{3}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(b;q)_k}{(q^{k-1}c;q)_k}\frac{(q;q)_k}{(c;q)_{2k}}\prod_{j=0}^{k-1}(b-q^jc). \tag{5.2}$$

Für spezielle Werte von b und c ergeben sich einige interessante Folgen.

a) Wählt man $a(n)=a(n,q,0,q)=\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)$, so ergeben sich daraus die Hankeldeterminanten

$$\det\left([i+j+k]!\right)_{i,j=0}^{n-1}=q^{\frac{n(n-1)(2n-1+3k)}{6}}\prod_{j=0}^{n-1}\left([j]!\right)^2\prod_{i=0}^{k-1}\frac{[n+i]!}{[i]!}. \tag{5.3}$$

b) Aus

$$a(n,q^d,q,q)=\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{j+d})}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)}=\frac{(q^{d+1};q)_n}{(q;q)_n}$$

für beliebige reelle d kann man die Hankeldeterminanten

$$\det\left(\begin{bmatrix}i+j+m\\ m\end{bmatrix}\right)_{i,j=0}^{n-1}=(-1)^{\binom{n}{2}}q^{\frac{n(n-1)^2}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\begin{bmatrix}m+j\\ 2j\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2j-1\\ j\end{bmatrix}} \tag{5.4}$$

berechnen. Diese ergeben sich, wenn man für d eine natürliche Zahl m wählt.
Hier verschwindet für $n>m+1$ die rechte Seite. Das schaut auf den ersten Blick so aus, als ob unsere Ableitungen hier nicht anwendbar wären, weil die Grundvoraussetzung, dass alle Hankeldeterminanten $\neq 0$ sind, nicht erfüllt ist.
Es zeigt sich jedoch, dass die Formel für die Hankeldeterminanten stetig von d abhängt und dass daher der Grenzübergang für die Hankeldeterminanten korrekt ist.
Die Formel (5.4) wurde schon von L. Carlitz (Some determinants of q-binomial coefficients, J. reine angew. Math. 226 (1967), 216-220) bewiesen. Weitergehende Resultate finden sich im Artikel "Advanced Determinant Calculus" von Christian Krattenthaler, speziell in Theorem 26.

6. Die q-Catalanzahlen von George Andrews

George Andrews (J. Comb. Th.A 44, 267-273) hat 1987 ein $q-$Analogon gefunden, das sowohl eine explizite Formel als auch schöne Hankeldeterminanten besitzt. Das ergibt sich, wenn wir $b \to q, c \to q^4, q \to q^2$ setzen. Wir erhalten dann

$$a(n) = \frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n} = (-1)^n q^{n^2}(1+q)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}\frac{1+q}{1+q^{n+1}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}. \qquad (6.1)$$

Für $q \to 1$ strebt $a(n) \to \frac{C_n}{4^n}$.

Daher ist $Ca_n(q) = (2q)^{2n}\frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^4;q^2\right)_n}$ ein $q-$Analogon von C_n.

Die erzeugende Funktion $f(z) = \sum_n Ca_n(q)z^n$ dieser $q-$Catalanzahlen erfüllt

$$\frac{f(z)+f(qz)}{1+q} = 1 + \frac{4q^2}{(1+q)^2} zf(z)f(qz). \qquad (6.2)$$

Für die Folge $\left(a(0),0,a(1),0,a(2),0,\cdots\right)$ ergibt sich

$$t(n) = \frac{q^n}{(1+q^{n+1})(1+q^{n+2})}. \qquad (6.3)$$

Für die Hankeldeterminanten von $\left(a(n)\right)$ ergibt sich daraus

$$d(n,0) = \frac{q^{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}}{(1+q)^{n-1}\prod_{j=0}^{2n-3}(1+q^{j+2})^{2n-2-j}}, \qquad (6.4)$$

$$d(n,1) = \frac{q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}}{(1+q)^{n}\prod_{j=0}^{2n-2}(1+q^{j+2})^{2n-1-j}} \qquad (6.5)$$

und allgemein

$$d(n,k)=q^{2k\binom{n}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\left(-q^{j+1};q\right)_{2n}}\prod_{i=1}^{j}\frac{[2n+j+i]}{[j+i]}d(n,0). \tag{6.6}$$

Für $q=1$ ergibt sich das wohlbekannte Resultat

$$\det\left(C_{i+j+k}\right)_{i,j=0}^{n-1}=\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{j}\frac{2n+j+i}{j+i}. \tag{6.7}$$

Ein anderer Beweis findet sich in „Advanced determinant calculus“ und „Determinants of (generalised) Catalan numbers“ von Christian Krattenthaler.

7. Ein q-Analogon der zentralen Binomialkoeffizienten

Als weiteres Beispiel betrachten wir ein $q-$Analogon der zentralen Binomialkoeffizienten. Wir wählen $b\to q, c\to q^2, q\to q^2$ und erhalten

$$a(n)=\frac{\left(q;q^2\right)_n}{\left(q^2;q^2\right)_n}=\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{2j-1})}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{2j})}=\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}. \tag{7.1}$$

Für die Folge $\left(a(0),0,a(1),0,a(2),\cdots\right)$ ergibt sich

$$t(0)=\frac{1}{1+q} \tag{7.2}$$

und

$$t(n)=\frac{q^n}{(1+q^n)(1+q^{n+1})} \tag{7.3}$$

für $n>0$.

Das ergibt für die ursprüngliche Folge $(a(n))$

$$d(n,0)=q^{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2n-2}(1+q^j)^{2n-1-j}}, \tag{7.4}$$

$$d(n,1)=q^{\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{2n-1}(1+q^j)^{2n-j}} \tag{7.5}$$

und allgemein

$$d(n,k) == q^{2k\binom{n}{2}} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\left(-q^{j+1};q\right)_{2n-1}} \prod_{i=1}^{j} \frac{[2n+j+i-1]}{[j+i]} d(n,0). \tag{7.6}$$

Für $q=1$ findet man daraus die entsprechenden Informationen über $a(n)=\binom{2n}{n}$.

Für die Folge $\left(a(0),0,a(1),0,a(2),\cdots\right)$ ergibt sich $t(0)=2$ und $t(n)=1$ für $n>0$.
Das Gewicht der Dyckwege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, wo der Abstieg auf die $x-$Achse das Gewicht 2 und alle anderen Abstiege das Gewicht 1 haben, ist also $\binom{2n}{n}$.

Für die Folge $(a(n))$ sind die entsprechenden $s(n),t(n)$ gegeben durch
$s(n)=2$ und $t(0)=2$ sowie $t(n)=1$ für $n>0$.
Das entsprechende Dreieck A094527 beginnt hier mit

1				
2	1			
6	4	1		
20	15	6	1	
70	56	28	8	1

Die $k-$te Spalte ist durch $a(n,k)=\binom{2n}{n-k}$ gegeben, wie man sofort mit Induktion verifiziert.

Hier erhält man $d(n,0)=2^{n-1}$, $d(n,1)=2^{n}$ und allgemein

$$d(n,k)=2^{n-1+k} \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{i=1}^{j} \frac{2n+j+i-1}{j+i}. \tag{7.7}$$

Eng mit dem vorhergehenden Beispiel verknüpft ist die Folge

$$a(n)=\frac{(q^3;q^2)_n}{(q^4;q^2)_n}=\begin{bmatrix}2n+1\\n\end{bmatrix}\frac{1+q}{(1+q^{n+1})}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2} \tag{7.8}$$

Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} s(0)&=\frac{[3]}{(1+q)(1+q^2)}, s(n)=\frac{q^{2n}(1+q)}{(1+q^{2n})(1+q^{2n+2})} \\ t(n)&=\frac{q^{4n+3}}{(1+q^{2n+1})(1+q^{2n+2})^2(1+q^{2n+3})} \end{aligned} \tag{7.9}$$

Für $q=1$ reduziert sich das im wesentlichen auf
$a(n)=\binom{2n+1}{n}.$
Dabei ergibt sich

$$s(0)=3, s(n)=2, t(n)=1. \tag{7.10}$$

Das entsprechende Dreieck A111418 der $a(n,k)$ beginnt mit

1				
3	1			
10	5	1		
35	21	7	1	
126	84	36	9	1

Bezeichnet man mit $D(n,k)$ die Hankel Determinante von $\binom{2n}{n}$, dann gilt

$$d(n,k)=\frac{D(n,k+1)}{2^n}, d(n,-k)=2^{k+1-n}D(n,-k) \tag{7.11}$$

für $k \geq 0$.

8. Erweiterte Folgen

Was geschieht, wenn man eine Folge $(a(n))$ auf alle ganzen Zahlen n so erweitert, dass $a(n)=0$ für $n<0$ gilt?
Dann ist $d(n,k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert. Wir setzen überdies $d(0,k)=1$ für $k \geq 0$ und $d(0,k)=0$ für $k<0.$

Um das zu entscheiden, benötigen wir die Kondensationsformel für Determinanten (vgl. Chr. Krattenthaler, Advanced determinant calculus: a complement (4.1)). Sie gibt eine Beziehung zwischen Hankeldeterminanten verschiedener Ordnung

$$d(n,k-1)d(n-2,k+1)=d(n-1,k+1)d(n-1,k-1)-d(n-1,k)^2. \tag{8.1}$$

Diese Formel gilt auch für $n=2,$ wenn man $d(0,k)=1$ für $k \geq 1$ setzt.
Denn dann reduziert sie sich auf
$\det\begin{pmatrix} a(k-1) & a(k) \\ a(k) & a(k+1) \end{pmatrix} = a(k-1)a(k+1)-a(k)^2.$
Es ist klar, dass $d(n,-k)=0$ für $n \leq k$ gilt.

Es gilt nun

Satz 8.1

Sei $k \geq 0$ *und* $n \geq k+1$. *Dann gilt für die Folge* $\left(C_n\right)$ *der Catalanzahlen*

$$d(n,-k) = (-1)^{\binom{k+1}{2}} d(n-k-1,k+1). \qquad (8.2)$$

Wir beweisen das mit Induktion.
Für $k=0$ bedeutet es $d(n,0) = d(n-1,1)$. Das stimmt für $n \geq 1$.
Aus der Kondensationsformel (8.1) ergibt sich
$d(n,-1)d(n-2,1) = d(n-1,1)d(n-1,-1) - d(n-1,0)^2$, d.h.

$$d(n,-1) = d(n-1,-1) - 1 \qquad (8.3)$$

für $n \geq 2$.
Wegen $d(1,-1) = 0$ ergibt sich daraus $d(n,-1) = -(n-1)$ für $n \geq 1$. Das heißt
$d(n,-1) = -d(n-2,2) = -(n-1)$ für $n \geq 2$.

Die Formel (8.2) stimmt also für $k=0$ und $k=1$.
Wenn sie bereits für alle Werte $< k$ gilt, berechnen wir $d(n,-k)$ aus der Kondensationsformel

$$d(n,-k)d(n-2,-k+2) = d(n-1,-k)d(n-1,-k+2) - d(n-1,-k+1)^2. \qquad (8.4)$$

Wegen $d(k+1,-k) = (-1)^{\binom{k+1}{2}}$ sind die Werte $d(n,-k)$ für $n \geq k+1$ eindeutig festgelegt. Für $n \leq k$ ist $d(n,-k) = 0$.
Es genügt also zu zeigen, dass (8.4) bei Anwendung von (8.2) richtig bleibt. Das ist der Fall, denn sie reduziert sich auf

$$d(n-k,k-1)d(n-k-2,k+1) = d(n-k-1,k+1)d(n-k-1,k-1) - d(n-k-1,k)^2.$$

Zum Beispiel:

```
Table[d[n, 3], {n, 0, 24}]
{1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819,
 1015, 1240, 1496, 1785, 2109, 2470, 2870, 3311, 3795, 4324, 4900, 5525}
```

```
Table[d[n, -2], {n, 0, 24}]
{0, 0, 0, -1, -5, -14, -30, -55, -91, -140, -204, -285, -385, -506,
 -650, -819, -1015, -1240, -1496, -1785, -2109, -2470, -2870, -3311, -3795}
```

Etwas Ähnliches gilt auch für die Carlitz'schen $q-$Catalanzahlen.

Satz 8.2

Für die Folge der $q-$Catalanzahlen gilt

$$d(n,-k)=(-1)^{\binom{k+1}{2}}q^{(n-1)(n-k-1)}d(n-k-1,k+1). \tag{8.5}$$

Im einfachsten Fall bedeutet das

```
Table[d[n, 2], {n, 0, 5}]
```

```
{1, 1 + q, q^5 (1 + q + q^2), q^19 (1 + q) (1 + q^2), q^46 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4), q^90 (1 + q) (1 - q + q^2) (1 + q + q^2)}
```

```
Table[d[n, -1], {n, 2, 7}]
```

```
{-1, -q^2 (1 + q), -q^11 (1 + q + q^2), -q^31 (1 + q) (1 + q^2), -q^66 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4), -q^120 (1 + q) (1 - q + q^2) (1 + q + q^2)}
```

Die Formel (8.5) gilt für $k=0.$ Das folgt unmittelbar aus (3.8) und (3.9).

Für $k=1$ bedeutet es $d(n,-1)=-q^{2\binom{n-1}{2}}d(n-2,2)$ für $n\geq 2.$
Auf Grund der Kondensationsformel (8.1) genügt es zu zeigen, dass
$d(n,-1)d(n-2,1)=d(n-1,1)d(n-1,-1)-d(n-1,0)^2$
gilt, wenn man $d(n,-1)=-q^{2\binom{n-1}{2}}d(n-2,2)$ setzt. Das ist aber leicht zu verifizieren.

Denn
$-q^{2\binom{n-1}{2}}d(n-2,2)d(n-2,1)=-q^{\frac{4n^3-21n^2+35n-21}{3}}q[n-1],$
$q^{2\binom{n-2}{2}}d(n-3,2)d(n-1,1)=-q^{\frac{4n^3-21n^2+35n-21}{3}}q^2[n-2],$
$d(n-1,0)^2=q^{\frac{4n^3-21n^2+35n-18}{3}}.$
Daraus folgt alles.

Setzt man (8.5) in die Kondensationsformel für $k\geq 1$ ein,
$d(n,-k-1)d(n-2,-k+1)-d(n-1,-k+1)d(n-1,-k-1)+d(n-1,-k)^2=0,$
so ergibt sich für die linke Seite
$-q^{(n-1)(n-k-2)+(n-3)(n-k-2)}d(n-k-2,k+2)d(n-k-2,k)+q^{(n-2)(n-k-1)+(n-2)(n-k-3))}d(n-k-1,k)d(n-k-3,k+2)$
$+q^{2(n-k-2)(n-2)}d(n-k-2,k+1)^2$
Da alle $q-$Potenzen übereinstimmen, verschwindet die Summe.

Satz 8.3

Seien $D(n,k)$ die Hankeldeterminanten für die Folge der Catalanzahlen $A(n)=C_{n+1}$ für $n\geq 0$ und $A(n)=0$ für $n<0.$ Dann gilt

$$D(n,k)=d(n,k) \tag{8.6}$$

für $k\leq 0.$

Für $n=3, k=-1$ ergibt sich z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Es ist also keineswegs offensichtlich, dass sie die gleichen Determinanten haben.

Es genügt wieder zu zeigen, dass (8.6) für $k=0$ und $k=1$ gilt. Dann folgt es mit Induktion aus der Kondensationsformel. Aus

$D(n,-1)D(n-2,1) = D(n-1,1)D(n-1,-1) - D(n-1,0)^2$

folgt

$$(n-1)D(n,-1) = nD(n-1,-1) - 1. \tag{8.7}$$

Nun ist $D(1,-1)=0$. Daher ist allgemein $D(n,-1) = -(n-1)$. Denn

$-(n-1)^2 = -n(n-2)-1.$

Es beruht also im wesentlichen darauf, dass die Rekurrenzen (8.3) und (8.7) dieselbe Lösung besitzen.

Bemerkung

Dieser Satz liefert insbesondere Beispiele für Folgen, die durch die Hankeldeterminanten $d(n,0)$ und $d(n,1)$ nicht eindeutig bestimmt sind.

So haben etwa die Folgen $(0,1,1,2,5,14,\cdots)$ und $(0,1,2,5,14,\cdots)$ dieselben Hankeldeterminanten $d(n,0) = -(n-1)$ und $d(n,1) = 1.$

Für die Carlitz'schen $q-$Catalanzahlen gilt ein analoges Resultat.

Satz 8.4

Seien $D(n,k)$ die Hankeldeterminanten für die Folge $C_{n+1}(q)$ und $d(n,k)$ die Hankeldeterminanten für die Folge $C_n(q)$. Dann gilt für $k \geq 0$

$$D(n,-k) = q^{n(n-k-1)} d(n,-k). \tag{8.8}$$

Für $k=0$ ist $D(n,0) = d(n,1) = q^{2\binom{n}{2}} d(n,0)$ nach (3.7) und (3.8).

Alles andere ergibt sich wie oben aus der Kondensationsformel.

Satz 8.5

Seien $d(n,k)$ *die Hankeldeterminanten für die zentralen Binomialkoeffizienten und* $d_0(n,k)$ *die Hankeldeterminanten für die Catalanzahlen. Dann gilt*

$$d(n,-k)=2^{n-k-1}d_0(n,-k). \tag{8.9}$$

Beispielsweise ist die Folge $\left(d(n,-2)\right)_{n\geq 0}$ gegeben durch $0,0,0,-1,-10,-56,-240,-880,\cdots$ und stimmt mit der Folge $\left(2^{n-3}d_0(n,-2)\right)_{n\geq 0}$ überein.

Die Behauptung stimmt für $k=0$, weil $d(n,0)=2^{n-1}$ ist.
Aus der Kondensationsformel ergibt sich
$d(n,-1)2^{n-2}=2^{n-1}d(n-1,-1)-2^{2n-4}$,
d.h.
$d(n,-1)=2d(n-1,-1)-2^{n-2}$,
woraus aus $d(1,-1)=0$ sofort $d(n,-1)=-(n-1)2^{n-2}$ folgt.
Nun muss nur mehr die Kondensationsformel für beliebige k überprüft werden:

$$\begin{aligned}&d(n,-k-1)d(n-2,-k+1)-d(n-1,-k+1)d(n-1,-k-1)+d(n-1,-k)^2\\&=2^{(n-k-2)+(n-k-2)}d_0(n,-k-1)d_0(n-2,-k+1)-2^{(n-k-1)+(n-k-3)}d_0(n-1,-k+1)d_0(n-1,-k-1)\\&+2^{2(n-k-2)}d_0(n-1,-k)^2=0,\end{aligned}$$

weil alle Koeffizienten übereinstimmen.

9. Modifizierte Hankeldeterminanten

Die Hankeldeterminanten $d(n,-1)$ der vorangegangenen Beispiele ergeben sich auch aus der Betrachtung der Folgen $\left(1,ta(0),ta(1),ta(2),\cdots\right)$.
Denn die erste Zeile ist die Summe von $(1,0,0,\cdots)$ und $t(0,a(0),a(1),a(2),\cdots)$ und daher erfüllt die Hankeldeterminante $D(n,0)$ dieser Folge $D(n,0)=t^n d(n,-1)+t^{n-1}d(n-1,1)$.

Sei $\left(a(n)\right)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $a(0)=1$ und derart, dass alle Hankeldeterminanten $\neq 0$ sind. Seien $S(n)$ und $T(n)$ die Werte, die zur Folge $\left(a(n)\right)_{n\geq 0}$ und $t(n)$ die Werte, die zur Folge $\left(1,0,t,0,ta(1),0,\cdots\right)$ gehören.
Definiert man
$a(0,k)=[k=0]$
$a(n,0)=t(0)a(n-1,1)$
$a(n,k)=a(n-1,k-1)+t(k)a(n-1,k+1)$,
dann ist $a(0,0)=1$ und $a(2n+2,0)=ta(n)$.

Da $p(1,x)=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}=x$ und $p(2,x)=\frac{1}{t}\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & t & x\\ t & 0 & x^2\end{pmatrix}=x^2-t$ ist, ergibt sich $t(0)=t$.

Daraus ergibt sich $a(2n+1,1)=a(n)$. Daher ist $S(n)=s_1(n)=t(2n)+t(2n+1)$ und $T(n)=t_1(n)=t(2n+1)t(2n+2)$.

Daraus ergeben sich die Werte von $t(n)$ zu

$$\begin{aligned} &t(0)=t\\ &t(2n+1)=S(n)-t(2n)\\ &t(2n+2)=\frac{T(n)}{t(2n+1)}\end{aligned}\tag{9.1}$$

Nun ist $D(n,0)=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{i-1}t(2k)t(2k+1)$.

Wegen $t(2k+1)t(2k+2)=T(k)$ reduziert sich das auf

$$D(n,0)=t^{n-1}t(1)t(3)\cdots t(2n-1)\prod_{i=2}^{n-1}\prod_{k=0}^{i-2}T(k)=t^{n-1}t(1)t(3)\cdots t(2n-3)d(n-1,0).\tag{9.2}$$

Für die betrachteten Beispiele ergeben sich die folgenden Determinanten:

1) Für die Catalanzahlen ist $d(n,0)=1, S(0)=1$, $S(n)=2$ für $n>0$ und $T(n)=1$.
Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} &t(0)=t\\ &t(2n)=\frac{1-(n-1)t}{1-nt}\\ &t(2n+1)=\frac{1-(n+1)t}{1-nt}\end{aligned}\tag{9.3}$$

und daher $t(1)t(3)\cdots t(2n-3)=(1-(n-1)t)$.
Somit ist $D(n,0)=t^n d(n,-1)+t^{n-1}d(n-1,1)=(1-(n-1)t)t^{n-1}$.

2) Für die Folge $\left(C_{n+1}\right)_{n\geq 0}$ ist $d(n,0)=1$, $S(n)=2$ und $T(n)=1$.
Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} &t(0)=t\\ &t(2n)=\frac{n-(n-1)t}{n-1-nt}\\ &t(2n+1)=\frac{n+2-(n+1)t}{n+1-nt}\end{aligned}\tag{9.4}$$

und daher $t(1)t(3)\cdots t(2n-3)=(n-(n-1)t)$.
Somit ist $D(n,0)=t^n d(n,-1)+t^{n-1}d(n-1,1)=(n-(n-1)t)t^{n-1}$.

3) *Die Hankeldeterminanten der Folge* $\left(1, tC_0(q), tC_1(q), tC_2(q), tC_3(q), \cdots\right)$ *sind für* $n \geq 2$ *durch*

$$q^{\frac{(n-2)(4n^2-7n-3)}{6}}\left(q^{n-2}-[n-1]t\right)t^{n-1} \tag{9.5}$$

gegeben.
Hier ist

$$\begin{aligned} &t(0)=t \\ &t(2n)=\frac{q^{2n}(q^{n-2}-\left[n-1\right]t)}{q^{n-1}-\left[n\right]t} \\ &t(2n+1)=\frac{q^{2n-1}(q^{n}-\left[n+1\right]t)}{q^{n-1}-\left[n\right]t} \end{aligned} \tag{9.6}$$

Daher ist

$$D(n,0)=t^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-2)(4n-9)}{6}}t(1)t(3)\cdots t(2n-3)$$
$$=t^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-2)(4n-9)}{6}}q^{(n-2)^2}\left(q^{n-2}-[n-1]t\right)$$

4) *Die Hankeldeterminanten der Folge*

$$1, t, 2t, 6t, 20t, \cdots. \tag{9.7}$$

sind gegeben durch $(2t)^{n-1}-(n-1)2^{n-2}t^n$.

Für $t(n)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &t(0)=t, t(1)=2-t \\ &t(2n)=\frac{2-(n-1)t}{2-nt} \\ &t(2n+1)=\frac{2-(n+1)t}{2-nt} \end{aligned} \tag{9.8}$$

Daher ist

$$D(n,0)=t^{n-1}2^{n-2}(2-(n-1)t).$$

10. Eine Vermutung

Was kann man über die Hankeldeterminanten der Folgen $\left(\binom{2n}{n+b}\right)$ mit $b \in \mathbb{N}$, die als Spalten des Dreiecks für die zentralen Binomialkoeffizienten vorkommen, aussagen?

a) Ich betrachte zunächst den Fall $b = 1$.
Hier ergibt sich
$(d(n,0))_{n \geq 0} = (1, 0, -1, 0, \cdots)$
mit Periode 4 und
$(d(n,1))_{n \geq 0} = (1, 1, -1, -1, \cdots)$
mit Periode 4.

Da $a(0) = d(1,0) = 0$ ist, ist die obige Theorie nicht anwendbar. Man kann aber von der Folge $\left(\binom{2n+2}{n+2}\right)$ ausgehen. Zur Unterscheidung bezeichne ich alle vorkommenden Werte für diese Folge mit Großbuchstaben.
Für $S(n)$ und $T(n)$ sind
$S(2n) = 4, S(2n+1) = 0$ und $T(n) = -1.$

Das ergibt $D(n,0) = d(n,1) = (-1)^{\binom{n}{2}}$.
Aus $P(2n,0) = 1$ und $P(2n-1,0) = -4n$ ergibt sich $D(2n,1) = (-1)^n$ und
$D(2n-1,1) = (-1)^{n-1} 4n,$
also die Folge
$(D(n,1))_{n \geq 0} = (1, 4, -1, -8, 1, 12, -1, -16, 1, 20, -1, -24, \cdots).$

Für $d(n,0) = D(n,-1)$ ergibt sich aus der Kondensationsformel
$D(2n,-1) = (-1)^n$ und $D(2n+1,-1) = 0,$ wie oben angegeben.

b) Für die Folge $\left(\binom{2n}{n+2}\right)$ ergeben Computerexperimente

$(d(n,0))_{n \geq 0} = (1, 0, 0, -1, \cdots)$
mit Periode 4 und
$(d(n,1))_{n \geq 0} = (1, 0, -1, 0, \cdots)$
ebenfalls mit Periode 4.
Weiters
$(d(n,2))_{n \geq 0} = (1, 1, -8, 8, 1, 1, -16, 16, 1, 1, -24, 24, 1, 1, -32, 32, \cdots)$.

Vermutung

Sei $a(n,b)=0$ *für* $n<0$ *und* $a(n,b)=\binom{2n}{n+b}$ *für* $n>0$. *Sei* $d(n,k,b)$ *die Hankeldeterminante der Folge* $\left(a(n+k,b)\right)$. *Sei wieder* $d(0,k,b)=1$ *für* $k\geq 0$ *und* $d(0,k,b)=0$ *sonst.*

Setzt man $D_k(x,b)=\sum_{n\geq 0} d(n,k,b)x^n$, *dann gilt für* $b\geq 2$

$$D_0(x,b)=\frac{1+(-1)^{\binom{b+1}{2}}x^{b+1}}{1-(-1)^{\binom{b+1}{3}}x^{2b}} \tag{10.1}$$

und

$$D_1(x,b)=\frac{1+(-1)^{\binom{b}{2}}x^{b}}{1-(-1)^{b}x^{2b}}. \tag{10.2}$$