7. Das Lemma von Bailey und die Identitäten von Rogers-Ramanujan

In diesem Kapitel zeigen wir, dass sich aus dem harmlos erscheinenden $q-$binomischen Lehrsatz sehr viele wichtige Identitäten, wie etwa die Tripelproduktidentität von Jacobi und das Lemma von Bailey herleiten lassen. Mit deren Hilfe werden einfache Beweise der Identitäten von Rogers-Ramanujan und verwandter Resultate gegeben.

7.1. Die Tripelproduktidentität von Jacobi

Zu Beginn setzen wir im $q-$binomischen Lehrsatz

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}x^k$$

$n\to 2N, x\to q^{-N}z.$ Dann erhalten wir

$$(1+q^{-N}z)(1+q^{-N+1}z)\cdots(1+q^{-1}z)(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{N-1}z)$$
$$=\sum_{k=0}^{2N} q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} 2N\\ k\end{bmatrix}\left(q^{-N}z\right)^k=\sum_{j=-N}^{N} q^{\binom{j+N}{2}-N(j+N)}\begin{bmatrix} 2N\\ j+N\end{bmatrix}z^{j+N}.$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit $q^{\binom{N+1}{2}}z^{-N}=\dfrac{q^N}{z}\dfrac{q^{N-1}}{z}\cdots\dfrac{q}{z}.$ Das ergibt

$$(1+\frac{q^N}{z})(1+\frac{q^{N-1}}{z})\cdots(1+\frac{q}{z})(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{N-1}z)=\sum_{j=-N}^{N} q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix} 2N\\ j+N\end{bmatrix}z^j, \tag{7.1}$$

weil $\binom{j+N}{2}-N(j+N)+\binom{N+1}{2}=\binom{j}{2}$ ist.

Für $N\to\infty$ erhalten wir daraus die

Tripelproduktidentität von Jacobi

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1}z)(1+\frac{q^n}{z})=\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}}z^k \tag{7.2}$$

oder

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}}z^k=(1\underset{\cdot}{+}z)^{\infty}(1\underset{\cdot}{+}\frac{q}{z})^{\infty}(1\div q)^{\infty}.$$

Wir fassen diese formalen Potenzreihen als Elemente von $\mathbb{C}\left[z,\frac{1}{z}\right][[q]],$ also als formale Potenzreihen in q auf, deren Koeffizienten rationale Funktionen in z sind.

Die gleiche Methode liefert ein weiteres Resultat von Jacobi

$$\left(\prod_{j\geq 1}(1-q^j)\right)^3 = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)q^{\binom{k+1}{2}}. \tag{7.3}$$

Zum Beweis setzen wir $f(z)=(1+\frac{q^n}{z})(1+\frac{q^{n-1}}{z})\cdots(1+\frac{q}{z})(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)$.
Aus (7.1) wissen wir, dass

$$(1+z)f(z)=\sum_{j=-n}^{n} q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}2n\\ j+n\end{bmatrix}z^j$$

ist. Wenn wir diese Identität im üblichen Sinn differenzieren, erhalten wir

$$(1+z)f'(z)+f(z)=\sum_{j=-n}^{n} jz^{j-1}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}2n\\ n+j\end{bmatrix}.$$

Für $z=-1$ ergibt sich daraus

$$(1\div q)^n(1\div q)^{n-1}=\sum_{j=-n}^{n} j(-1)^{j-1}q^{\binom{j}{2}}\begin{bmatrix}2n\\ n+j\end{bmatrix}.$$

Für $n\to\infty$ folgt das gewünschte Resultat

$$(1-q)^3(1-q^2)^3(1-q^3)^3\cdots=\left(\prod_{j\geq 1}(1-q^j)\right)^3=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{j-1}jq^{\binom{j}{2}}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(2k+1)q^{\binom{k+1}{2}}.$$

Es gibt viele verschiedene kombinatorische Beweise der Tripelprodukt- Identität, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Ein weiterer rechnerischer Beweis kann folgendermaßen geführt werden:
Wir gehen von der $q-$Exponentialfunktion

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1}z)=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}z^k}{(1\div q)^k}$$

aus. Die rechte Seite kann auch in der Gestalt

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}z^k}{(1\div q)^k}=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{k\geq 0}q^{\binom{k}{2}}z^k(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\ldots$$

geschrieben werden. Nun ist $(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\ldots=0$ für $k<0,$ weil dann ein Faktor 0 ist.
Daher können wir die rechte Seite auch in der Gestalt

$$\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\binom{k}{2}}z^k(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\ldots$$

schreiben.
Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ ist aber wieder aus der Formel für die $q-$Exponentialfunktion

$$(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\ldots=\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1\div q)^j}\left(q^{k+1}\right)^j.$$

Also ergibt sich

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}z^k}{(1\div q)^k}=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\binom{k}{2}}z^k\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1\div q)^j}\left(q^{k+1}\right)^j.$$

Wenn wir hier die Reihenfolge der Summation ändern und beachten, dass $\binom{k}{2}+(k+1)j+\binom{j}{2}=j+\binom{k+j}{2}$ ist, erhalten wir

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}z^k}{(1\div q)^k}=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{j\geq 0}\frac{\left(-\frac{q}{z}\right)^j}{(1\div q)^j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\binom{k+j}{2}}z^{k+j}.$$

Wenn wir die $q-$Exponentialfunktionen wieder als unendliches Produkt schreiben, ergibt sich schließlich die gesuchte Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1}z)=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n z^{-1})}\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\binom{k}{2}}z^k.$$

7.2 Einige Spezialfälle

Die Tripelproduktidentität hat viele wichtige Spezialfälle.
Wenn wir $q\to q^3, z\to -q^2$ setzen, ergibt sich

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{3\binom{k}{2}}\left(-q^2\right)^k=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})$$

oder

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}=(1\div q)^\infty, \tag{7.4}$$

d.h. wir erhalten noch einmal den **Euler'schen Pentagonalzahlensatz**.

Wenn wir $q\to q^2, z\to qz$ übergehen lassen, ergibt sich

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1}z)(1+\frac{q^{2n+1}}{z})(1-q^{2n+2})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k^2}z^k. \tag{7.5}$$

Ersetzt man jetzt $q\to q^a, z\to q^b,$ so folgt

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2an+a+b})(1+q^{2an+a-b})(1-q^{2an+2a})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{ak^2+bk}. \tag{7.6}$$

Setzt man $q\to q^a, z\to -q^b,$ so ergibt sich

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2an+a+b})(1-q^{2an+a-b})(1-q^{2an+2a})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{ak^2+bk}. \tag{7.7}$$

$a=1, b=0$ liefert

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k^2}$$
und
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{k^2}.$$

Beachtet man die schon früher bewiesene Identität
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}, \tag{7.8}$$
so ergibt sich eine

Identität von Gauß
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{k^2}. \tag{7.9}$$

Für $a=2, b=0$ ergibt sich
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{4n+2})(1-q^{4n+2})(1-q^{4n+4})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{2k^2}.$$
Die linke Seite kann vereinfacht werden zu
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{4n-2})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n)(1-q^{2n-1})(1+q^{2n-1})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{2n-1}).$$
Daher erhalten wir schließlich
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{2n-1})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{2k^2}. \tag{7.10}$$

Für $a=b=\frac{1}{2}$ in (7.6) ergibt sich
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+1})(1+q^n)(1-q^{n+1})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\frac{k^2+k}{2}}$$
oder
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n)(1-q^{2n+2})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{\binom{k+1}{2}}.$$
Beachtet man, dass $\binom{-k}{2}=\frac{(-k)(-k-1)}{2}=\binom{k+1}{2}$ und

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$ gilt, so ergibt sich schließlich eine weitere

Identität von Gauß
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^{2n})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}=\sum_{k\geq 0}q^{\binom{k+1}{2}}=1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots. \tag{7.11}$$
Diese haben wir schon früher aus der Identität von Lebesgue bewiesen.

Wir können nun die Identitäten von Rogers-Ramanujan in andere Gestalt bringen:
Die erste Identität lautet

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1\div q)^k}=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}}.$$

Die Reihe auf der rechten Seite kann mit der Tripelproduktidentität in ein unendliches Produkt umgewandelt werden.

Wir brauchen nur $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2}$ wählen und erhalten

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{\frac{j(5j-1)}{2}}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})(1-q^{5n+5}).$$

Daher ergibt sich insgesamt die

Produktversion der 1. Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1\div q)^k}=\frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}. \tag{7.12}$$

Für die zweite Identität

$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+k}}{(1\div q)^k}=\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}$ wählen wir $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{3}{2}$ und erhalten

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})(1-q^{5n+5}).$$

Daher ergibt sich insgesamt die

Produktversion der 2. Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+k}}{(1\div q)^k}=\frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}. \tag{7.13}$$

Bemerkung

Es erhebt sich die Frage, warum hier so oft unendliche Produkte vorkommen und wie man diese Produkte am einfachsten berechnen kann.

Dazu betrachten wir das Produkt $\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{-b_n}, b_n\in\mathbb{Z},$ wo wir aus Gründen, die sich gleich zeigen werden, den Exponenten in der Form $-b_n$ geschrieben haben. Wenn wir das Produkt in eine unendliche Reihe entwickeln, ist diese von der Gestalt $A(q)=1+\sum_{n\geq 1}a_n q^n$.

Dann ergibt sich

$\log A(q)=\sum_{n\geq 1}-b_n\log(1-q^n)$ und daraus durch Differentiation

$$\frac{A'(q)}{A(q)}=\sum_{n\geq 1}\frac{nb_nq^{n-1}}{1-q^n}.$$

Daher ist

$$q\frac{A'(q)}{A(q)}=\sum_{n\geq 1}\frac{nb_nq^n}{1-q^n}=\sum_{n,k\geq 1}nb_nq^{nk}=\sum_{n\geq 1}q^n\sum_{d|n}db_d.$$

Wir schreiben nun $B_n=\sum_{d|n}db_d$.

Dann ist also

$qA'(q)=A(q)\sum_{n\geq 1}B_nq^n$. Das bedeutet

$$\sum_{n\geq 1}na_nq^n=\left(1+\sum_{k\geq 1}a_kq^k\right)\sum_{j\geq 1}B_jq^j.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$na_n=B_n+\sum_{k=1}^{n-1}B_{n-k}a_k.$$

Ist umgekehrt eine Folge $\{a_n\}_{n\geq 0}$ mit $a_0=1$ gegeben, so kann man daraus die b_n eindeutig zurückgewinnen. Denn $nb_n=B_n-\sum_{d|n,d<n}db_d$ und $B_n=na_n-\sum_{k=1}^{n-1}B_ka_{n-k}$.

Es ist also $b_1=B_1=a_1, B_2=2a_2-B_1a_1,\cdots$.

Jede Reihe mit konstantem Term 1 ist also in ein Produkt der Gestalt $\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{-b_n}$ entwickelbar. Die Produktdarstellung an und für sich ist also keineswegs überraschend. Überraschend ist dagegen, dass sich die b_n sehr oft als sehr einfache ganze Zahlen ergeben. Mit Hilfe von Softwareprogrammen wie Mathematica kann man die Produktdarstellung der linken Seiten der Identitäten von Rogers-Ramanujan, d.h. die entsprechenden Zahlen b_n sehr einfach sukzessive berechnen und daraus die allgemeine Gestalt erraten. In diesem Sinne sind die Identitäten von Rogers-Ramanujan heutzutage relativ leicht zu vermuten. Ganz anders ist die Situation allerdings, wenn man diese Vermutungen beweisen will. Das haben wir schon beim Pentagonalzahlensatz gesehen. Hier hat Euler die Reihenentwicklung sehr schnell erraten, brauchte jedoch 10 Jahre bis er einen Beweis dafür hatte.

7.3 Weitere nützliche Formeln

Die Methode, die zur Jacobi'schen Tripelproduktidentität führte, kann man auch auf die Gauß'sche Formel $\sum_{k=0}^{2s}(-1)^k\begin{bmatrix}2s\\k\end{bmatrix}=(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2s-1})$ anwenden. Wir schreiben sie zuerst in der äquivalenten Form

$$\sum_{0\leq j\leq 2s}\frac{(-1)^j}{(1\div q)^j(1\div q)^{2s-j}}=\frac{(1-q)\cdots(1-q^{2s-1})}{(1\div q)^{2s}}$$

und machen sie nun symmetrisch zum Nullpunkt, indem wir $j\to s+j$ ersetzen:

$$\sum_{|j|\leq s}\frac{(-1)^{s+j}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}}=\frac{(1-q)\cdots(1-q^{2s-1})}{(1\div q)^{2s}}.$$

In dieser Formel können wir nicht mit $s\to\infty$ gehen. Daher ersetzen wir $q\to\frac{1}{q}$. Dann ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\sum_{|j|\le s}\frac{(-1)^j q^{j^2}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}}=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}. \tag{7.14}$$

Wenn wir hier $s\to\infty$ gehen lassen, ergibt sich

$$\left(\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\right)^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{j^2}=\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}.$$

Daraus folgt wieder die Gauß'sche Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{k^2}.$$

Wir wollen nun auch die analoge Summe $\sum_{|j|\le s}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}}$ berechnen.

Hier ergibt sich

$$\sum_{|j|\le s}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}}=\sum_{k=0}^{2s}(-1)^{k-s}\frac{q^{\frac{(k-s)^2-(k-s)}{2}}}{(1\div q)^k(1\div q)^{2s-k}}$$

$$=\frac{(-1)^s q^{\binom{s+1}{2}}}{(1\div q)^{2s}}\sum_{k=0}^{2s}(-1)^k\begin{bmatrix}2s\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}\left(q^{-s}\right)^k=\frac{(-1)^s q^{\binom{s+1}{2}}}{(1\div q)^{2s}}(1-q^{-s})\cdots(1-q^0)\cdots(1-q^{s-1}).$$

Daher erhalten wir

$$\sum_{|j|\le s}\frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}}=[s=0]. \tag{7.15}$$

Aus der Vandermonde'schen Formel ergibt sich

$$\sum_{s\ge i}q^{(s-i)(s+i)}\begin{bmatrix}n+2i\\s+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2i\\s-i\end{bmatrix}=\sum_{j\ge 0}q^{j(2i+j)}\begin{bmatrix}n+2i\\n-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2i\\j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}.$$

Wenn wir hier $n\to\infty$ gehen lassen, so folgt für jedes $i\in\mathbb{N}$

$$\sum_{s\ge i}\frac{q^{(s-i)(s+i)}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}. \tag{7.16}$$

Wir geben noch einen weiteren Beweis, der gleich mehr zeigt:

$$\sum_{s=i\geq 0}^{\infty}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}x^{s-i}=\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\frac{(1\div x)^j}{(1\div q)^j}. \tag{7.17}$$

Für $x=1$ reduziert sich das auf (7.16).

Wir entwickeln die rechte Seite nach x und vergleichen Koeffizienten.

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\frac{(1\div x)^j}{(1\div q)^j}=\sum_{j\geq 0,k\geq i}(-1)^{j+k-i}q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\frac{\begin{bmatrix} j\\ k-i\end{bmatrix}q^{\binom{k-i}{2}}}{(1\div q)^j}x^{k-i}.$$

Dann ist der Koeffizient von x^{k-i} gegeben durch

$$\sum_{j\geq k-i}(-1)^{j+k-i}q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\frac{q^{\binom{k-i}{2}}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{j-k+i}}=\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}}\sum_{j\geq k-i}(-1)^{j+k-i}q^{\binom{j-k+i}{2}}\frac{q^{(i+1+k)(j-k+i)}}{(1\div q)^{j-k+i}}$$
$$=\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}}\sum_{j\geq 0}(-1)^{\ell}q^{\binom{\ell}{2}}\frac{q^{(i+1+k)\ell}}{(1\div q)^{j-k+i}}=\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}}(1-q^{i+k+1})(1-q^{i+k+2})\cdots.$$

Dabei haben wir die Produktentwicklung von $E(x)$ benutzt. Daher ist der Koeffizient von x^{k-i} von

$$\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\frac{(1\div x)^j}{(1\div q)^j}$$

gegeben durch $\dfrac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}$. Damit ist alles gezeigt.

Speziell ergibt sich für $m\in\mathbb{Z}$

$$\sum_{s\geq i\geq 0}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}q^{m(s-i)}=\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\begin{bmatrix} j+m-1\\ j\end{bmatrix}. \tag{7.18}$$

Für $m\leq 0$ bricht die Reihe rechts ab.
Für $m=-1$ ergibt sich

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\begin{bmatrix} j-2\\ j\end{bmatrix}=1+q^{2i},$$

für $m=-2$

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j+1}{2}}q^{2ij}\begin{bmatrix} j-3\\ j\end{bmatrix}=1+(1+q)q^{2i-1}+q^{4i}.$$

Sei nun $b_s = \sum_{|i|\le s} \frac{a_i}{(1\div q)_{s-i}(1\div q)_{s+i}}$.

Dann ist also nach (7.16)

$$\sum_{s\ge 0} q^{s^2} b_s = \sum_{s\ge 0} q^{s^2} \sum_{|i|\le s} \frac{a_i}{(1\div q)_{s-i}(1\div q)_{s+i}} = \frac{1}{(1\div q)_\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} q^{i^2} a_i. \tag{7.19}$$

Für $a_i = z^i$ folgt daraus nach (7.5)

$$\sum_{s\ge 0} q^{s^2} \sum_{|i|\le s} \frac{z^i}{(1\div q)_{s-i}(1\div q)_{s+i}} = \frac{1}{(1\div q)_\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} q^{i^2} z^i = \prod_{n\ge 1} (1+q^{2n-1}z)(1+\frac{q^{2n-1}}{z})(1+q^n). \tag{7.20}$$

Wenden wir die Formel (7.19) auf $a_i = (-1)^i q^{\binom{i}{2}}$ an, so folgt aus (7.15)

$$1 = \frac{1}{(1\div q)_\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^{\binom{i}{2}+i^2} = \frac{1}{(1\div q)_\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}.$$

Damit haben wir den Pentagonalzahlensatz nochmals bewiesen.

7.4 Das Lemma von Bailey

Wir gehen von der $q-$Vandermonde'schen Formel

$$\begin{bmatrix} n+r \\ n+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+r \\ r-2i \end{bmatrix} = \sum_k q^{k(k+2i)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ r-k-2i \end{bmatrix}$$

aus und lassen $r \to \infty$ gehen. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{(1\div q)_{n+2i}} = \sum_k q^{k(k+2i)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{(1\div q)_{k+2i}}.$$

Sei nun $N = n+i$. Dann folgt

$$\frac{1}{(1\div q)_{N+i}} = \sum_k \begin{bmatrix} N-i \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k^2+2ik}}{(1\div q)_{k+2i}}. \tag{7.21}$$

Für $s = k+i$ schreibt sich das als

$$\frac{1}{(1\div q)_{N+i}} = \sum_{s=i}^{N} \begin{bmatrix} N-i \\ s-i \end{bmatrix} \frac{q^{(s-i)^2+2i(s-i)}}{(1\div q)_{s+i}}. \tag{7.22}$$

Das kann schließlich folgendermaßen formuliert werden: Für $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{(1\div q)^{N+i}(1\div q)^{N-i}}=\sum_{s=|i|}^{N}\frac{1}{(1\div q)^{N-s}}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}. \tag{7.23}$$

Für $N\to\infty$ strebt das wieder gegen

$$\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}=\sum_{s=i}^{\infty}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}.$$

Wenn wir beide Seiten von (7.23) mit $q^{i^2}c_i$ multiplizieren und summieren, erhalten wir

$$\sum_{i=-n}^{n}\frac{q^{i^2}c_i}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=\sum_{i=-n}^{n}q^{i^2}c_i\sum_{s=|i|}^{n}\frac{1}{(1\div q)^{n-s}}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}.$$

Wenn wir die Reihenfolge der Summationen ändern, ergibt sich das

Lemma von Bailey

$$\sum_{i=-n}^{n}\frac{q^{i^2}c_i}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\sum_{i=-s}^{s}\frac{c_i}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}. \tag{7.24}$$

Die Bedeutung dieser Formel liegt darin, dass man einen Ausdruck der Gestalt $\sum_{i=-n}^{n}\frac{q^{i^2}c_i}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}$ auf $\sum_{i=-n}^{n}\frac{c_i}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}$, wo eine kleinere $q-$Potenz auftritt, zurückführen kann, der sehr oft einfacher zu berechnen ist.
Insbesondere erhalten wir dadurch die wohl einfachsten Beweise für die Identitäten von Rogers-Ramanujan. Dazu gehen wir schrittweise vor:

Für $c_i=(-1)^i q^{\binom{i}{2}}$ ist $\sum_{i=-n}^{n}\frac{c_i}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=[n=0]$ nach (7.15). Hier ergibt sich

$q^{i^2}c_i=q^{i^2}(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}=(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}$.

Daher ist

$$\sum_{i=-n}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\sum_{i=-s}^{s}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}=\frac{1}{(1\div q)^{n}}. \tag{7.25}$$

Das ist eine endliche Version des **Pentagonalzahlensatzes**, denn für $n\to\infty$ ergibt sich

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}=(1\div q)^{\infty}.$$

Für $c_i=(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}$ erhalten wir aus (7.25)

$$\sum_{i=-n}^{n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\sum_{i=-s}^{s}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\frac{1}{(1\div q)^{s}}. \tag{7.26}$$

Man beachte, dass alle diese Identitäten für $q\to 1$ sinnlos werden. Durch Multiplikation mit $(1\div q)^{2n}$ sieht man, dass sie $q-$Analoga der trivialen Identität $\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i\binom{2n}{i}=[n=0]$ sind.

Für $n\to\infty$ ergibt sich aus (7.26) die **erste Identität von Rogers-Ramanujan**

$$\frac{1}{(1\div q)^{\infty}}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{s}}.$$

Diese kann noch etwas verschärft werden zu

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{s}}z^s=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}\sum_{k\geq|i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}z^k. \tag{7.27}$$

Denn betrachten wir den Koeffizienten von z^s auf der rechten Seite. Er ergibt sich zu

$$\sum_{|i|\leq s}(-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=q^{s^2}\sum_{|i|\leq s}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{s}}$$

nach (7.25).

Sei nun $n\in\mathbb{N}$ und F_n das lineare Funktional auf den Polynomen, das durch

$F_n(z^s)=(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-s+1})=\frac{(1\div q)^n}{(1\div q)^{n-s}}$ oder damit gleichbedeutend durch

$F_n\left(\frac{z^s}{(1\div q)^s}\right)=\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-s+1})}{(1\div q)^s}=\frac{(1\div q)^n}{(1\div q)^s(1\div q)^{n-s}}=\begin{bmatrix}n\\ s\end{bmatrix}$ definiert ist. Dann ist nach (7.23)

$$F_n\left(\sum_{k\geq|i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}z^k\right)=\sum_{k\geq|i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}F_n(z^k)=\sum_{k\geq|i|}\frac{q^{k^2-i^2}(1\div q)^n}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}(1\div q)^{n-k}}$$

$$=\frac{(1\div q)^n}{(1\div q)^{n-i}(1\div q)^{n+i}}.$$

Wenn wir daher F_n auf (7.27) anwenden, so ergibt sich

$$\sum_{s=0}^{n}q^{s^2}\begin{bmatrix}n\\ s\end{bmatrix}=\sum_{|i|\leq n}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}(1\div q)^n}{(1\div q)^{n-i}(1\div q)^{n+i}}, \tag{7.28}$$

d.h. wir erhalten wieder (7.26).

Bemerkung

Diese Polynomidentität lässt sich auch sehr einfach mit Hilfe des q-Zeilbergeralgorithmus mechanisch beweisen. Man erhält dadurch einen reinen Computerbeweis der Identitäten von Rogers-Ramanujan. Man vgl. Peter Paule „Short and easy computer proofs of the Rogers-Ramanujan identities and of identities of similar type" in Electronic J. Comb. 1 (1994), 1-9.

Für die zweite Identität von Rogers-Ramanujan gehen wir von $c_i = (-1)^i q^{\binom{i}{2}-i}$ aus.

Wir erhalten

$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}-j}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \sum_{k=0}^{2s} (-1)^{k-s} \frac{q^{\frac{(k-s)^2-3(k-s)}{2}}}{(1\div q)^k (1\div q)^{2s-k}}$$

$$= \frac{(-1)^s q^{\frac{s^2+3s}{2}}}{(1\div q)^{2s}} \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k \begin{bmatrix} 2s \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} q^{-(s+1)k} = \frac{(-1)^s q^{\frac{s^2+3s}{2}}}{(1\div q)^{2s}} (1-q^{-s-1})(1-q^{-s})\cdots(1-q^{s-2}).$$

Für $s=0$ ergibt sich dabei 1, für $s=1$ erhält man $\frac{(-1)^1 q^{\frac{1+3}{2}}}{(1\div q)^2}(1-q^{-2})(1-q^{-1}) = -\frac{1}{q}$ und für $s>1$ verschwindet der Ausdruck, weil ein Faktor verschwindet. Es ergibt sich insgesamt

$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}-j}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \begin{cases} 1, s=0 \\ -\frac{1}{q}, s=1 \\ 0, s>1 \end{cases} \tag{7.29}$$

Daher ist nach dem Lemma von Bailey

$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^j q^{\frac{i(3i-3)}{2}}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \frac{1}{(1\div q)^n} - \frac{1}{q}\frac{q}{(1\div q)^{n-1}} = \frac{q^n}{(1\div q)^n}. \tag{7.30}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\sum_{|j|\le s} \frac{(-1)^j q^{\frac{i(5i-3)}{2}}}{(1\div q)^{s+j}(1\div q)^{s-j}} = \sum_{s\ge 0} \frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}} \frac{q^s}{(1\div q)^s}. \tag{7.31}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich also die **zweite Identität von Rogers-Ramanujan**

$$\sum_{s\ge 0} \frac{q^{s^2+s}}{(1\div q)^s} = \frac{1}{(1\div q)^\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i-3)}{2}}.$$

Auch diese Identität kann verschärft werden zu

$$\sum_{s\geq 0}\frac{q^{s^2+s}}{(1\div q)^s}z^s=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{\frac{i(5i-3)}{2}}\sum_{k\geq |i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}z^k. \tag{7.32}$$

Denn betrachten wir den Koeffizienten von z^s auf der rechten Seite. Er ergibt sich zu

$$\sum_{|i|\leq s}(-1)^i q^{\frac{i(5i-3)}{2}}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=q^{s^2}\sum_{|i|\leq s}\frac{(-1)^i q^{\frac{i(3i-3)}{2}}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=\frac{q^{s^2+s}}{(1\div q)^s}$$

nach (7.30).

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, dass auch der Euler'sche Pentagonalzahlensatz in gleicher Weise zu

$$1=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}\sum_{k\geq |i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}z^k \tag{7.33}$$

verschärft werden kann. Denn der Koeffizient von z^s auf der rechten Seite ist

$$\sum_{|i|\leq s}(-1)^i q^{\frac{i(3i-1)}{2}}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=q^{s^2}\sum_{|i|\leq s}\frac{(-1)^i q^{\binom{i}{2}}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=\left[s=0\right]$$

nach (7.15).

Bemerkung

Sei $F(z)=F_\infty(1,z,q)=\lim_{n\to\infty}F_n(1,z,q)=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2-k}z^k}{(1\div q)^k}$. Dann erfüllt

$F(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2-s}}{(1\div q)^s}z^s$ die Funktionalgleichung $F(z)=F(qz)+zF(q^2z)$ und ist durch diese und $F(0)=1$ eindeutig bestimmt. Denn

$$F(z)-F(qz)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2-s}(1-q^s)}{(1\div q)^s}z^s=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{q^{s^2-s}}{(1\div q)^{s-1}}z^s=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2-s+2s}}{(1\div q)^s}z^{s+1}=zF(q^2z).$$

Daraus ergibt sich

$$F(z)=\det\begin{pmatrix}1 & z & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -1 & 1 & qz & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & -1 & 1 & q^2z & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & 1 & q^3z & \cdots\\ & & & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}.$$

Denn wenn wir diese unendliche Determinante nach der ersten Zeile entwickeln, ergibt sich $F(z)=F(qz)+zF(q^2z)$.

Genau so überlegt man sich, dass auch die q – Fibonacci-Polynome eine derartige Determinantendarstellung besitzen. Genauer ist leicht zu verifizieren, dass

$$F_n(1,z,q)=\det\begin{pmatrix} 1 & z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & qz & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q^{n-2}z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aus der Formel von Cassini –Euler (4.23)

$$F_{n-1}(x,qs,q)F_{n+k}(x,s,q)-F_n(x,s,q)F_{n+k-1}(x,qs,q)=(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}} s^{n-1}F_k(x,q^n s,q)$$

und $F_n(x,s,q)=\sum_{k=0}^{n-1} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} s^k x^{n-2k-1}$ ergibt sich folgendes:

Geht man in der Formel von Cassini-Euler mit $k \to \infty,$ so erhält man

$$F_{n-1}(1,qs,q)F(s)-F_n(1,s,q)F(qs)=(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}} s^{n-1}F(q^n s).$$

Das bedeutet für $s=q$, dass man $\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+nk}}{(1\div q)^k}$ als Linearkombination von $\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1\div q)^k}$ und $\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+k}}{(1\div q)^k}$ darstellen kann, wobei die Koeffizienten durch Fibonacci-Polynome gegeben sind.

Zum Beispiel ist $F_1(1,q^2,q)F(q)-F_2(1,q,q)F(q^2)=(-1)^2 q^{\binom{2-1}{2}} q^{2-1}F(q^2q)$
oder anders ausgedrückt

$$q\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+2k}}{(1\div q)^k}=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1\div q)^k}-\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+k}}{(1\div q)^k}.$$

Ein anderes Beispiel erhalten wir für $s=1, n=2$: Hier ergibt sich

$$F_1(1,q,q)F(1)-F_2(1,1,q)F(q)=F(q^2)$$

oder

$$\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2-k}}{(1\div q)^k}=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1\div q)^k}+\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2+k}}{(1\div q)^k}.$$

Als letztes Beispiel wollen wir das Bailey-Lemma auf $c_i=(-1)^i q^{2i^2}$ anwenden. Aus (7.14) ergibt sich

$$\sum_{i=-n}^{n}\frac{(-1)^i q^{2i^2}}{(1\div q)^{n+i}(1\div q)^{n-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\sum_{i=-s}^{s}\frac{(-1)^i q^{i^2}}{(1\div q)^{s+i}(1\div q)^{s-i}}=\sum_{s=0}^{n}\frac{q^{s^2}}{(1\div q)^{n-s}}\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}.$$

Für $n\to\infty$ strebt das gegen

$$\frac{1}{(1\div q)^\infty}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{2i^2}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}. \qquad (7.34)$$

Aus der Produktformel für die $q-$Exponentialfunktion

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1\div q)^k}x^k$$

folgt sofort, dass $\sum_{s=0}^{\infty}\frac{q^{s^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}=(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots$ ist. Daher erhält man wieder (7.10).

Man kann natürlich (7.34) genau so verschärfen wie früher die Identitäten von Rogers-Ramanujan. Man erhält dann

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i q^{2i^2}\sum_{k\geq|i|}\frac{q^{k^2-i^2}}{(1\div q)^{k-i}(1\div q)^{k+i}}z^k=\prod_{i=0}^{\infty}(1+q^{2i+1}z)=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}z^k. \qquad (7.35)$$

Denn der Koeffizient von z^s auf der linken Seite ergibt sich nach (7.14) zu

$$\sum_{|i|\leq s}(-1)^i q^{2i^2}\frac{q^{s^2-i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=q^{s^2}\sum_{|i|\leq s}\frac{(-1)^i q^{i^2}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}}=\frac{q^{s^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2s})}$$

und stimmt daher mit dem auf der rechten Seite überein.

7.5 Eine Identität von Cauchy

Als weitere Folgerung des $q-$binomischen Lehrsatzes wollen wir die folgende Identität von Cauchy zeigen:

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^j z}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div qz)^k}. \qquad (7.36)$$

Diese ist ein $q-$Analogon der trivialen Formel $\frac{1}{(1-z)^n}=\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^n=\sum_k\binom{n}{k}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k$.

Wir wissen, dass

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k$$

ist. Setzt man $x\to\varepsilon\frac{z}{1-z}$, dann ist

$$(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1+q\varepsilon\frac{z}{1-z})\cdots(1+q^{n-1}\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\left(\varepsilon\frac{z}{1-z}\right)^k(1).$$

Die rechte Seite ergibt $\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div qz)^k}$.

Für die linke Seite verwenden wir Induktion. Wir behaupten

$$(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1+q\varepsilon\frac{z}{1-z})\cdots(1+q^{n-1}\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=(1+q^{n-1}\varepsilon\frac{z}{1-z})\cdots(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^j z}.$$

Für $n=1$ stimmt das, weil $(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=1+\frac{qz}{1-qz}=\frac{1}{1-qz}$ ist. Ist es für n bereits gezeigt, so erhalten wir

$$(1+q^n\varepsilon\frac{z}{1-z})\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^j z}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^j z}+\frac{q^{n+1}z}{1-qz})\prod_{j=2}^{n+1}\frac{1}{1-q^j z}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^j z}\left(1+\frac{q^{n+1}z}{1-q^{n+1}z}\right)=\prod_{j=1}^{n+1}\frac{1}{1-q^j z}.$$

Für $n\to\infty$ ergibt sich daraus

$$\frac{1}{(1\div qz)^{\infty}}=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div q)^k(1\div qz)^k}. \tag{7.37}$$

Aus der Identität von Cauchy kann man ebenfalls das Lemma von Bailey ableiten. Denn setzen wir in (7.36) $z=q^{2i}$ und multiplizieren beide Seiten mit $\frac{1}{(1\div q)^{2i}}$, so ergibt sich die Identität

$$\frac{1}{(1\div q)^{n+2i}}=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k^2+2ik}}{(1\div q)^{k+2i}},$$

aus welcher alles weitere folgt.

Bemerkung

Wie so oft sind die in der Literatur gebräuchlichen Zuordnungen etwas irreführend. Wie W.P. Johnson in seiner Arbeit „How Cauchy missed Ramanujan's ${}_1\psi_1$ – Summation", AMMonthly 111(2004), 791-800, zeigte, wurde (7.36) in der etwas allgemeineren Form

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-q^k ax}{1-q^k bx}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{\binom{k}{2}}x^k}{(1\div bx)^k}(b-a)(qb-a)\cdots(q^{k-1}b-a) \tag{7.38}$$

von Jacobi bewiesen, während Cauchy unabhängig davon die Formel

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1-q^k ax}{1-q^k bx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{k}{2}}x^k}{(1\div q)^k(1\div bx)^k}(b-a)(qb-a)\cdots(q^{k-1}b-a) \tag{7.39}$$

bewiesen hat, die sich aus (7.38) ergibt, wenn man $n\to\infty$ gehen lässt.

Zum Beweis von (7.38) wende man ε auf die Unbestimmte b an. Man zeigt dann wie oben

$$(1+\frac{(b-a)x}{1-bx}\varepsilon)(1+q\frac{(b-a)x}{1-bx}\varepsilon)\cdots(1+q^{n-1}\frac{(b-a)x}{1-bx}\varepsilon)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k\left(\frac{(b-a)}{1-bx}\varepsilon\right)^k,$$

woraus sich alles ergibt.

Abschließend möchte ich noch die so genannte Ramanujan'sche ${}_1\psi_1-$ Summationsformel beweisen. Sie lautet

$$f(b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1\div a)^n}{(1\div b)^n}z^n=\frac{(1\div az)^\infty\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty\left(1\div\frac{b}{a}\right)^\infty}{(1\div b)^\infty\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty(1\div z)^\infty\left(1\div\frac{b}{az}\right)^\infty}. \tag{7.40}$$

Die Reihe konvergiert, wenn $|z|<1$, $\left|\frac{b}{az}\right|<1$ und außerdem $|q|<1$ ist.

Dabei bedeutet $(1\div x)^n=\frac{(1\div x)^\infty}{(1\div q^n x)^\infty}$ nach (2.19) für alle $n\in\mathbb{Z}$. Für $n\in\mathbb{N}$ ist also
$(1\div x)^{-n}=\frac{1}{(1-q^{-n}x)(1-q^{-n+1}x)\cdots(1-q^{-1}x)}$.
Mit dieser Definition gilt $(1\div x)^{m+n}=(1\div x)^m(1\div q^m x)^n$ für alle $m,n\in\mathbb{Z}$, wie in (2.21) gezeigt.
Ersetzt man in der Ramanujan'schen Formel $z\to\frac{z}{a}$ und $b\to 0$ und lässt dann $a\to\infty$ gehen, so ergibt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}z^n=(1\div z)^\infty\left(1\div\frac{q}{z}\right)^\infty(1\div q)^\infty,$$

also wieder die Tripelproduktidentität von Jacobi.

Es gibt sehr viele verschiedene Beweise. Der folgende Computerbeweis stammt von William Y.C. Chen, Quin-Hu Hou und Yan-Ping Mu in arXiv:math.CO/0509281. Die Idee dahinter besteht darin, in $f(b)$ die Konstante b durch $q^n b$ zu ersetzen und den $q-$ Zeilbergeralgorithmus darauf anzuwenden.
Sei also

$$u_{n,k}=\frac{(1\div a)^k}{(1\div q^n b)^k}z^k. \tag{7.41}$$

Dann ist

$$f(q^n b)=\sum_{k\in Z}u_{n,k}z^k. \tag{7.42}$$

Der $q-$ Zeilbergeralgorithmus ergibt

$$z(q^n b-a)u_{n+1,k}+(az-q^n b)(1-q^n b)u_{n,k}=g_{n,k+1}-g_{n,k} \tag{7.43}$$

mit

$$g_{n,k}=(1-q^n b)q^n b u_{n,k}. \tag{7.44}$$

Das lässt sich auch sehr einfach direkt zeigen. Dazu beachte man, dass

$$\frac{u_{n+1,k}}{u_{n,k}}=\frac{(1\div q^nb)^k}{\left(1\div q^{n+1}b\right)^k}=\frac{(1-q^nb)\left(1\div q^{n+1}b\right)^{k-1}}{\left(1\div q^{n+1}b\right)^{k-1}(1-q^{n+1+k-1}b)}=\frac{(1-q^nb)}{(1-q^{n+k}b)}$$

und

$$\frac{u_{n,k+1}}{u_{n,k}}=\frac{(1\div a)^{k+1}}{(1\div q^nb)^{k+1}}z\frac{(1\div q^nb)^k}{(1\div a)^k}=z\frac{1-q^ka}{1-q^{n+k}b}$$

für alle $k\in\mathbb{Z}$ gilt.

Die Identität (7.43) reduziert sich daher auf

$$\frac{z(q^nb-a)(1-q^nb)}{(1-q^{n+k}b)}+(az-q^nb)(1-q^nb)=(1-q^nb)q^nbz\frac{1-q^ka}{(1-q^{n+k}b)}-(1-q^nb)q^nb,$$

die sofort verifiziert werden kann.

Nun ist $\lim\limits_{k\to\pm\infty}u_{n,k}=0$ wenn $|z|<1$ und $\left|\frac{b}{az}\right|<1$ und außerdem $|q|<1$ ist.

Für $k>0$ folgt das aus $|z|<1$ und für $k=-m$, $m\in\mathbb{N}$ ist

$$u_{n,k}=\frac{(1-q^{n-1}b)(1-q^{n-2}b)\cdots(1-q^{n-m}b)}{(1-q^{-m}a)(1-q^{-m+1}a)\cdots(1-q^{-1}a)z^m}=\left(\frac{q^nb}{az}\right)^m\frac{\left(1-\frac{q}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{q^m}{b}\right)}{\left(1-\frac{q}{a}\right)\cdots\left(1-\frac{q^m}{a}\right)}.$$

Aus (7.43) und (7.44) ergibt sich somit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(z(q^nb-a)u_{n+1,k}+(az-q^nb)(1-q^nb)u_{n,k}\right)=0.$$

Das bedeutet

$z(q^nb-a)f(q^{n+1}b)=(q^nb-az)(1-q^nb)f(q^nb)$

und daher

$$f(b)=\frac{1-\frac{b}{a}}{\left(1-\frac{b}{az}\right)(1-b)}f(qb). \tag{7.45}$$

Daraus ergibt sich wieder $f(b)=\dfrac{\left(1\div\frac{b}{a}\right)^\infty}{\left(1\div\frac{b}{az}\right)^\infty(1\div b)^\infty}f(0).$

Nun ist nach (2.18)

$$f(q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1\div a)^n}{(1\div q)^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1\div a)^n}{(1\div q)^n}z^n=\frac{(1\div az)^\infty}{(1\div z)^\infty},$$

weil die negativen Terme wegen $\frac{1}{(1\div q)^n}=\frac{(1\div q^n)^\infty}{(1\div q)^\infty}=0$ für $n<0$ verschwinden.

Daher ergibt sich

$$f(b)=\frac{\left(1\div\frac{b}{a}\right)^\infty}{\left(1\div\frac{b}{az}\right)^\infty(1\div b)^\infty}\frac{\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty}{\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty}f(q)=\frac{\left(1\div\frac{b}{a}\right)^\infty}{\left(1\div\frac{b}{az}\right)^\infty(1\div b)^\infty}\frac{\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty}{\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty}\frac{(1\div az)^\infty}{(1\div z)^\infty}.$$

Das ist die Summationsformel von Ramanujan.

Mit Hilfe dieser Summationsformel kann man Aussagen über die Anzahl der Darstellungen natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten ableiten.

Wir wählen in der Ramanujan'schen Identität

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1\div a)^n}{(1\div b)^n}z^n=\frac{(1\div az)^\infty\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty\left(1\div\frac{b}{a}\right)^\infty}{(1\div b)^\infty\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty(1\div z)^\infty\left(1\div\frac{b}{az}\right)^\infty}$$

$b=qa$. Das ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1\div a)^n}{(1\div qa)^n}z^n=\frac{(1\div az)^\infty\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty(1\div q)^\infty}{(1\div qa)^\infty\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty(1\div z)^\infty\left(1\div\frac{q}{z}\right)^\infty}.$$

Division durch $1-a$ ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{(1-q^na)}=\frac{(1\div az)^\infty\left(1\div\frac{q}{az}\right)^\infty(1\div q)^\infty(1\div q)^\infty}{(1\div a)^\infty\left(1\div\frac{q}{a}\right)^\infty(1\div z)^\infty\left(1\div\frac{q}{z}\right)^\infty}.$$

Nun ersetzen wir $q\to q^2$ und $z\to q$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^{2n}a)}=\frac{(1\div aq)_{q^2}^\infty\left(1\div\frac{q}{a}\right)_{q^2}^\infty\left((1\div q^2)_{q^2}^\infty\right)^2}{(1\div a)_{q^2}^\infty\left(1\div\frac{q^2}{a}\right)_{q^2}^\infty\left((1\div q)_{q^2}^\infty\right)^2}.$$

Für $a=-1$ folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{(1+q^{2n})} = \frac{\left((1 \dot{-} (-q))_{q^2}^{\infty}\right)^2 \left((1 \dot{-} q^2)_{q^2}^{\infty}\right)^2}{(1 \dot{-} (-1))_{q^2}^{\infty} \left(1 \dot{-} (-q^2)\right)_{q^2}^{\infty} \left((1 \dot{-} q)_{q^2}^{\infty}\right)^2}$$

oder

$$2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{(1+q^{2n})} = \frac{\left((1 \dot{-} (-q))_{q^2}^{\infty}\right)^2 \left((1 \dot{-} q^2)_{q^2}^{\infty}\right)^2}{\left(\left(1 \dot{-} (-q^2)\right)_{q^2}^{\infty}\right)^2 \left((1 \dot{-} q)_{q^2}^{\infty}\right)^2}.$$

Nun ist $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^s = \sum_{n\geq 0} r_s(n) q^n$,

wobei $r_s(n)$ die Anzahl angibt, wie oft n als Summe von s Quadraten dargestellt werden kann.

Aus der Jacobi'schen Tripelproduktidentität folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\cdots.$$

Daher ist

$$\sum_{n\geq 0} r_2(n) q^n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^2 = \left((1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\cdots\right)^2$$

$$= \frac{\left((1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots\right)^2 \left((1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots\right)^2}{\left((1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots\right)^2 \left((1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots\right)^2},$$

weil $\frac{1}{\left((1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots\right)} = (1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\cdots$ nach (7.8).

Somit ergibt sich

$$\sum_{n\geq 0} r_2(n) q^n = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} = 1+4\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{1+q^{2n}} = 1+4\sum_{n\geq 1, m\geq 0} (-1)^m q^{n+2mn}$$

$$= 1+4\sum_{n\geq 1, m\geq 0} (-1)^m q^{n(1+2m)} = 1+4\sum_{n\geq 1, m\geq 0} \left(q^{n(1+4m)} - q^{n(3+4m)}\right) = 1+4\sum_{n\geq 1} \left(d_{1,4}(n) - d_{3,4}(n)\right) q^n.$$

Dabei bedeutet $d_{i,4}(n)$ die Anzahl der Teiler von n, die kongruent $i \pmod 4$ sind.

Somit ist $r_2(n) = 4\left(d_{1,4}(n) - d_{3,4}(n)\right)$.