6. q-Catalanzahlen

Wir definieren drei verschiedene $q-$Analoga der klassischen Catalanzahlen, die Carlitz'schen $q-$Catalanzahlen $C_n(q)$, die MacMahon'schen $q-$Catalanzahlen $c_n(q)$ und die Andrews'schen $q-$Catalanzahlen $CA_n(q)$. Jedes dieser $q-$Analoga verallgemeinert einen anderen Aspekt der klassischen Catalanzahlen. Die Carlitz'schen $q-$Analoga erfüllen eine analoge Rekursion und zeigen ein analoges Verhalten bezüglich Hankeldeterminanten, lassen sich jedoch nicht in geschlossener Form angeben. Die MacMahon'schen Catalanzahlen verallgemeinern die geschlossene Darstellung der Catalanzahlen und ergeben sich auch mit Hilfe des Major Index, haben jedoch keine schöne Rekursion. Die $q-$Catalanzahlen von Andrews haben sowohl eine schöne Rekursion als auch eine geschlossene Darstellung, sind jedoch im Gegensatz zu den anderen beiden Fällen keine Polynome in q.

Wir betrachten sogenannte Dyckwege, d.h. nichtnegative Gitterwege im $\mathbb{R}^2$, die im Punkt $(0,0)$ beginnen mit Aufstiegen $(1,1)$ und Abstiegen $(1,-1)$.

Bezeichnet man mit $a_{n,k}$ die Anzahl aller Dyckwege von $(0,0)$ nach (n,k), so ist bekanntlich $a_{2n,0} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die $n-$te Catalanzahl und $a_{2n+1,0} = 0.$ Die Folge der Catalanzahlen beginnt mit $1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,16796,\cdots.$

Um die angegebene Formel abzuleiten, kann man folgendermaßen vorgehen: Man zerlegt einen Dyckweg von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ in einen Aufstieg, einen (eventuell leeren) maximalen Dyckweg von $(1,1)$ nach $(1+2k,1)$, den darauf folgenden Abstieg und einen (eventuell leeren) Dyckweg von $(2k+2,0)$ nach $(2n,0).$ Daraus ergibt sich

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \tag{6.1}$$

mit $C_0 = 1.$

Für die erzeugende Funktion $f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n$ folgt daraus

$$f(z) = 1 + zf(z)^2 \tag{6.2}$$

und aus dieser quadratischen Gleichung rechnet man sofort aus, dass

$$C_n = (-1)^n 2^{2n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{6.3}$$

gilt.

Die Catalanzahlen sind dadurch charakterisiert, dass alle Hankeldeterminanten $h_n = \det\left(a_{i+j,0}\right)_{i,j=0}^{n} = 1$ sind.

Wir wollen nun das $q-$Analogon der Catalanzahlen studieren, das entsteht, wenn man jedem Dyckweg das folgende Gewicht zuordnet: Das Gewicht eines Aufstiegs sei immer 1 und das Gewicht eines Abstiegs, der auf der Höhe k endet, sei q^k. Das Gewicht eines Dyckwegs sei das Produkt der Gewichte aller Aufstiege und Abstiege. Das Gewicht einer Menge von Dyckwegen sei die Summe der Gewichte der einzelnen Wege. Sei $a_{n,k}(q)$ das Gewicht aller Dyckwege von $(0,0)$ nach (n,k). Dann ist natürlich wieder $a_{2n+1,0}=0$. Für diese $q-$Catalanzahlen $C_n(q)=a_{2n,0}(q)$ sind jedoch keine expliziten Formeln bekannt.

Man rechnet leicht nach, dass diese Folge der $q-$Catalanzahlen mit $1,1,1+q,1+2q+q^2+q^3,1+3q+3q^2+3q^3+2q^4+q^5+q^6\cdots$ beginnt.

Die Folge $a_{n,k}(q)$ ist durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

$$\begin{aligned} a_{0,k}(q) &= [k=0] \\ a_{n,0}(q) &= a_{n-1,1}(q) \\ a_{n,k}(q) &= a_{n-1,k-1}+q^k a_{n-1,k+1} \end{aligned} \tag{6.4}$$

und $a_{2n+1,0}=0.$

Um $C_n(q)$ zu berechnen, zerlegt man wieder einen Dyckweg von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ in einen Aufstieg, einen (eventuell leeren) maximalen Dyckweg von $(1,1)$ nach $(1+2k,1)$, den darauf folgenden Abstieg und einen (eventuell leeren) Dyckweg von $(2k+2,0)$ nach $(2n,0)$. Das Gewicht eines Dyckweges von $(1,1)$ nach $(1+2k,1)$ ist q^k-mal das Gewicht des entsprechenden Dyckwegs von $(0,0)$ nach $(2k,0)$, der also aus denselben Aufstiegen und Abstiegen besteht, jedoch im Nullpunkt beginnt. Denn so ein Dyckweg hat k Aufstiege und k Abstiege. Jeder der k Abstiege des in $(1,1)$ beginnenden Wegs liegt einen Punkt höher als der im Nullpunkt beginnende. Daher ist das Gewicht q^k-mal größer. Somit ergibt sich insgesamt

$$C_n(q)=\sum_{k=0}^{n-1} q^k C_k(q)C_{n-1-k}(q). \tag{6.5}$$

Der Anfangswert ist wieder $C_0(q)=1.$

Für die erzeugende Funktion $f(z)=\sum_{n\geq 0} C_n(q)z^n$ ergibt sich daraus durch Koeffizientenvergleich

$$f(z)=1+zf(z)f(qz). \tag{6.6}$$

Das kann auch in der Gestalt $f(z)=\dfrac{1}{1-zf(qz)}$ geschrieben werden. Wenn man das iteriert, ergibt sich der Kettenbruch

$$f(z)=\cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1-\cfrac{qz}{1-\cfrac{q^2z}{1-\cdots}}}}.$$

Man überlegt sich leicht, dass eine eindeutig bestimmte formale Potenzreihe $r(z)$ mit $r(0)=1$ existiert, so dass

$$f(z)=\frac{r(qz)}{r(z)} \tag{6.7}$$

gilt. Setzt man das in (6.6) ein, so ergibt sich

$$r(qz)=r(z)+zr(q^2z). \tag{6.8}$$

Sei nun $r(z)=1+r_1z+r_2z^2+\cdots$. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$q^n r_n=r_n+q^{2n-2}r_{n-1}, \text{ also } r_n=\frac{(-1)^n q^{2\binom{n}{2}}}{(1\div q)^n}.$$

Somit ergibt sich die Formel

$$f(z)=\frac{\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n^2}\frac{z^n}{(1\div q)^n}}{\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{n^2-n}\frac{z^n}{(1\div q)^n}}. \tag{6.9}$$

Man überlegt sich wie früher, dass

$$\frac{1}{1-}\frac{z}{1-}\frac{qz}{1-}\cdots\frac{q^{n-2}z}{1-}=\frac{F_n(1,-qz,q)}{F_{n+1}(1,-z,q)}$$

gilt. Daraus folgt im Limes wieder (6.9).

Setzt man

$$E_m(z)=\sum_{k\geq 0}q^{m\binom{k}{2}}\frac{z^k}{(1\div q)^k}, \tag{6.10}$$

um die Analogie zur $q-$Exponentialfunktion zu betonen, dann ist $r(z)=E_2(-z)$ und daher

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}C_n(q)z^n=\frac{E_2(-qz)}{E_2(-z)}. \tag{6.11}$$

Für $m=0$ ist übrigens $\dfrac{E_0(-qz)}{E_0(-z)}=1+z$ und für $m=1$ ergibt sich $\dfrac{E_1(-qz)}{E_1(-z)}=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 0} z^k,$ wie man sich leicht aus den Produktdarstellungen der Exponentialfunktion ergibt.

Aus (6.11) ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\frac{q^{2\binom{j}{2}}}{(1-q)^j}C_{n-j}(q)=\frac{q^{n^2}}{(1-q)^n}. \tag{6.12}$$

Aus dem Kettenbruch folgt

$$f(z)=\cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1-qzf(q^2z)}}=\frac{1-qzf(q^2z)}{1-z-qzf(q^2z)}.$$

Das liefert

$$f(z)=1+zf(z)-qzf(q^2z)+qzf(z)f(q^2z).$$

Hier folgt durch Koeffizientenvergleich eine weitere Rekursion

$$C_{n+1}(q)=C_n(q)+\sum_{k=0}^{n-1}q^{2k+1}C_k(q)C_{n-k}(q). \tag{6.13}$$

Wir wollen nun zeigen, wie man die Hankeldeterminanten der $q-$Catalanzahlen berechnen kann.

Wir wollen das auf zwei Arten machen, um zu zeigen, welche Methoden man dabei verwenden kann.

Das Gewicht der Dyckwege von $(0,0)$ nach $(n,0)$ bleibt gleich, wenn man die Gewichte der Aufstiege und Abstiege zwischen k und $k+1$ so abändert, dass beide das Gewicht $\sqrt{q^k}$ haben. Denn jedem Aufstieg kann genau ein Abstieg zugeordnet werden. Das Produkt aller Gewichte ist also in beiden Fällen dasselbe.

Sei nun $c_{n,k}$ das neue Gewicht aller Wege von $(0,0)$ nach (n,k). Dann ist $c_{n,k}=q^{\frac{1}{2}\binom{k}{2}}a_{n,k}(q),$ weil die k Aufstiege, welchen kein Abstieg entspricht, als Gewicht gerade die Werte $\sqrt{q^i}, 0\leq i\leq k-1,$ besitzen. Jeder Weg von $(0,0)$ nach $(m+n,0)$ befindet sich nach m Schritten in einem Punkt (m,k) und kann also in einen Weg von $(0,0)$ nach (m,k) und den Restweg von (m,k) nach $(m+n,0)$ zerlegt werden. Das Gewicht des Restweges ist wieder $c_{n,k}$ wegen der Symmetrie der Gewichte. (Die Spiegelung an der $(x=m+n)-$Achse im Endpunkt liefert einen Weg von $(m+n,0)$ nach $(m+2n,k).$) Daher ist

$$a_{m+n,0}(q) = c_{m+n,0} = \sum_k c_{m,k} c_{n,k} = \sum_k a_{m,k}(q) a_{n,k}(q) q^{\binom{k}{2}}.$$

Das kann folgendermaßen interpretiert werden:

Man betrachte die Dreiecksmatrizen

$$P_n = (c_{i,j})_{i,j=0}^n. \tag{6.14}$$

Dann ist

$$P_n P_n^t = (a_{i+j,0}(q))_{i,j=0}^n. \tag{6.15}$$

Daraus ergibt sich sofort die Hankeldeterminante

$$\det(a_{i+j,0}(q))_{i,j=0}^n = \det P_n P_n^t = \prod_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} = q^{\binom{n+1}{3}}. \tag{6.16}$$

Wir erhalten somit

Satz 6.1

Für die Hankeldeterminanten der $q-$Catalanzahlen gilt

$$h_n = \det\left(a_{i+j,0}(q)\right)_{i,j=0}^n = q^{\binom{n+1}{3}}. \tag{6.17}$$

Durch diese Hankeldeterminanten ist die Folge $\left(a_{n,0}\right)$, also auch die Folge $\left(C_n(q)\right)$ eindeutig festgelegt.

Nun geben wir noch einen zweiten Beweis, aus welchem vielleicht besser ersichtlich ist, auf welche Weise Hankeldeterminanten auftreten, und bei dem orthogonale Polynome auftreten, die wir später benötigen werden.

Dazu betrachten wir das Gewicht $b_{n,k}(\ell)$ aller Dyckwege von $(0,0)$ nach (n,k), die mit mindestens ℓ Aufstiegen beginnen. Dann ist $b_{n,k}(0) = b_{n,k}(1) = a_{n,k}(q)$ für $n > 0$, weil jeder nichtleere Dyckweg mit einem Aufstieg beginnen muss. Für $\ell \geq 2$ gilt

$$b_{n,k}(\ell-1) = b_{n,k}(\ell) + q^{\ell-2} b_{n-2,k}(\ell-2). \tag{6.18}$$

Denn ein Weg, der mit $\ell-1$ Aufstiegen beginnt, kann entweder einen weiteren Aufstieg haben, also mit mindestens ℓ Aufstiegen beginnen, oder nach den $\ell-1$ Aufstiegen einen Abstieg haben. Dieser hat das Gewicht $q^{\ell-2}$. Der Restweg hat dasselbe Gewicht wie der Weg, der in $(2,0)$ mit $\ell-2$ Aufstiegen beginnt und dann wie der ursprüngliche Weg weitergeht.

Dann ergibt sich mit Induktion, dass eindeutig bestimmte Koeffizienten $p_{\ell,i}$ mit $p_{\ell,\ell}=1$ und $p_{\ell,k}=0$ für $k>\ell$ existieren, so dass gilt

$$b_{n,k}(\ell)=\sum_{i=0}^{\ell} p_{\ell,i}a_{n-\ell+i,k}(q). \tag{6.19}$$

Genauer ist

$$\sum_{i=0}^{\ell} p_{\ell,i}a_{n-\ell+i,k}(q)=\sum_{i}(p_{\ell-1,i-1}-q^{\ell-2}p_{\ell-2,i})a_{n-\ell+i,k}(q). \tag{6.20}$$

Bezeichnet man mit $p_\ell(x)$ das Polynom mit Koeffizienten $p_{\ell,i}$, also

$$p_\ell(x)=\sum_{i\geq 0} p_{\ell,i}x^i, \tag{6.21}$$

so sind diese Polynome eindeutig charakterisiert durch

$$\begin{aligned} p_0(x)&=1\\ p_1(x)&=x,\\ p_k(x)&=xp_{k-1}(x)-q^{k-2}p_{k-2}(x). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Diese Polynome kennen wir aber schon. Aus (4.2) ergibt sich

$$p_n(x)=F_{n+1}(x,-1,q)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i q^{2\binom{i}{2}}\begin{bmatrix} n-i\\ i\end{bmatrix}x^{n-2i}. \tag{6.23}$$

Nun ist offenbar $\sum_i p_{n,i}a_{i,k}(q)=b_{n,k}(n)=[k=n]$.

Das bedeutet, dass die Dreicksmatrix $\left(p_{k,\ell}\right)_{k,\ell=0}^{n}$ die zur Dreiecksmatrix $\left(a_{i,j}(q)\right)_{i,j=0}^{n}$ inverse Matrix ist. Beide haben in der Hauptdiagonale lauter 1 und haben daher die Determinante 1.

Es gilt dann

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(q)p_k(x). \tag{6.24}$$

Denn $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(q)p_k(x)=\sum_i x^i\sum_k a_{n,k}(q)p_{k,i}=\sum_i x^i[n=i]=x^n.$

Sei nun $p_k^*(x)=q^{-\binom{k}{2}}p_k(x).$ Dann gilt nach (6.22)

$$x^n p_k^*(x)=x^{n-1}\left(p_{k-1}^*(x)+q^k p_{k+1}^*(x)\right). \tag{6.25}$$

Wir definieren nun ein lineares Funktional F auf $\mathbb{C}(q)[x]$ durch $F(p_n(x)) = [n=0]$. Dann ist $F(x^n) = a_{n,0}(q)$. Weiters folgt aus (6.25)

$$a_{n,k}(q) = F(x^n p_k^*(x)). \tag{6.26}$$

Außerdem ist

$$F(p_n(x)p_m^*(x)) = F\left(\sum_i p_{n,i} x^i p_m^*(x)\right) = \sum_i p_{n,i} a_{i,m}(q) = [n=m]. \tag{6.27}$$

Anders ausgedrückt gilt

$$F(p_n(x)p_m(x)) = q^{\binom{m}{2}} \sum_i p_{n,i} a_{i,m}(q) = q^{\binom{m}{2}} [n=m]. \tag{6.28}$$

Die Polynome $p_n(x) = F_{n+1}(x,-1,q)$ sind also orthogonal bezüglich des linearen

Funktionals F .

Um den Zusammenhang mit Hankeldeterminanten herzustellen, betrachten wir die Polynome

$$\tilde{p}_n(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} & x^{n-1} \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} & x^n \end{pmatrix}$$

wo wir der Einfachheit halber a_n statt $a_{n,0}(q)$ geschrieben haben.

Wenden wir darauf das lineare Funktional auf $\mathbb{C}(q)[x]$ an, das durch $F(x^n) = a_n$ definiert ist, dann ergibt sich

$$F(\tilde{p}_n(x)x^i) = 0, 0 \le i < n, \tag{6.29}$$

weil zwei Spalten gleich sind.

Sei nun $h_n = \det\left(a_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}$.

Dann ist

$$F(\tilde{p}_n(x)x^n) = h_n. \tag{6.30}$$

Ist $h_{n-1} \neq 0,$ dann ist $\tilde{p}_n(x)$ ein Polynom vom Grad n.

Es gibt also eine eindeutige Darstellung $\tilde{p}_n(x) = \sum_i c_i p_i(x).$ Aus (6.29) folgt $\tilde{p}_n(x) = c_n p_n(x).$

Da $p_n(x)$ als höchsten Koeffizienten 1 hat, muss also gelten

$$\tilde{p}_n(x) = h_{n-1} p_n(x). \tag{6.31}$$

Aus (6.30) und (6.31) folgt unter Beachtung von (6.26)

$$h_n = F(\tilde{p}_n(x)x^n) = h_{n-1}F(p_n(x)x^n) = q^{\binom{n}{2}} h_{n-1}F(p_n^*(x)x^n) = q^{\binom{n}{2}} h_{n-1}a_{n,n}(q) = q^{\binom{n}{2}} h_{n-1}.$$

Mit Induktion ergibt sich wegen $h_0 = 1$, dass alle $h_n \neq 0$ sind und genauer
$h_n = \prod_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} = q^{\binom{n+1}{3}}$ erfüllen.

Für $q = 1$ kann man die Catalanzahlen auch als die eindeutig bestimmte Folge charakterisieren, für welche alle Hankeldeterminanten $\det\left(C_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n} = 1$ und
$\det\left(C_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{n} = 1$ erfüllen.

Auch dieses Resultat besitzt ein einfaches $q-$ Analogon.

Satz 6.2

Die $q-$ Catalanzahlen $C_n(q)$ sind die eindeutig bestimmten Polynome in q, für welche die Hankeldeterminanten die folgenden Werte haben:

$$\det(C_{i+j}(q))_{i,j=0}^{n} = q^{\frac{(n)(n+1)(4n-1)}{6}} \tag{6.32}$$

und

$$\det(C_{i+j+1}(q))_{i,j=0}^{n} = q^{\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}}. \tag{6.33}$$

Beweis

Sei

$$c(n,k) = a_{2n,2k}(q). \tag{6.34}$$

Dann ist $c(n,0) = C_n(q).$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&c(0,k)=[k=0]\\
&c(n,0)=c(n-1,0)+qc(n-1,1), \quad n>0, \qquad\qquad (6.35)\\
&c(n,k)=c(n-1,k-1)+q^{2k-1}(1+q)c(n-1,k)+q^{4k+1}c(n-1,k+1), \quad n>0, k>0.
\end{aligned}$$

Wir können $c(n,k)$ auch als Gewicht einer anderen Menge nichtnegativer Gitterwege von $(0,0)$ nach (n,k) interpretieren, die Aufstiege, Abstiege und horizontale Schritte haben, wobei jeder Aufstieg das Gewicht 1, jeder Abstieg, der auf der Höhe k endet, das Gewicht $q^{2k}q^{2k+1}=q^{4k+1}$ und jedes horizontale Stück auf der Höhe k das Gewicht $q^{2k-1}(1+q)$ hat.

Führt man nun ein neues Gewicht ein, wo entsprechende Aufstiege und Abstiege zwischen den Höhen k und $k+1$ jeweils das Gewicht $q^{\frac{4k+1}{2}}$ haben, so ist dieses symmetrisch und das Gesamtgewicht aller Wege von $(0,0)$ nach (n,k) ergibt sich als

$$cc(n,k)=q^{\frac{1}{2}\binom{2k}{2}}c(n,k). \qquad (6.36)$$

Es gilt dann, wie man leicht nachrechnet,

$$\begin{aligned}
&cc(0,k)=[k=0]\\
&cc(n,0)=cc(n-1,0)+\sqrt{q}cc(n-1,1), \quad n>0,\\
&cc(n,k)=q^{\frac{4k-3}{2}}cc(n-1,k-1)+(q^{2k-1}(1+q))cc(n-1,k)+ \qquad\qquad (6.37)\\
&\qquad +q^{\frac{4k+1}{2}}c(n-1,k+1), \quad n>0, k>0.
\end{aligned}$$

Wenn wir einen Gitterweg von $(0,0)$ nach $(m+n,0)$ in einen Weg von $(0,0)$ nach (m,k) und einen zweiten Weg von (m,k) nach $(m+n,0)$ zerlegen, dann ist das Gewicht des zweiten Weges $cc(n,k)$ wegen der Symmetrie. Daraus folgt die Identität

$$\sum_{k\geq 0} cc(m,k)cc(n,k)=cc(m+n,0) \qquad (6.38)$$

oder damit äquivalent

$$\sum_{k\geq 0} c(m,k)c(n,k)q^{\binom{2k}{2}}=c(m+n,0)=C_{m+n}(q). \qquad (6.39)$$

Das kann folgendermaßen interpretiert werden:

Man betrachte die Dreiecksmatrizen

$$P_n=(cc(i,j))_{i,j=0}^{n}. \qquad (6.40)$$

Dann ist

$$P_n P_n^t = (C_{i+j}(q))_{i,j=0}^n. \tag{6.41}$$

Daraus ergibt sich sofort die Hankeldeterminante

$$\det(C_{i+j}(q))_{i,j=0}^n = \det P_n P_n^t = \prod_{k=0}^n q^{\binom{2k}{2}} = q^{2\sum_{i=0}^n i^2 - \binom{n+1}{2}} = q^{\frac{(n)(n+1)(4n-1)}{6}}. \tag{6.42}$$

Für die zweite Catalanmatrix sei

$$d(n,k) = a_{2n+1,2k+1}(q). \tag{6.43}$$

Dann ist

$$d(n,0) = a_{2n+1,1}(q) = a_{2n+2,0}(q) = C_{n+1}(q).. \tag{6.44}$$

Die Rekursion lautet nun

$$\begin{aligned} &d(0,k) = [k=0] \\ &d(n,0) = (1+q)d(n-1,0) + q^3 d(n-1,1), \quad n>0, \\ &d(n,k) = d(n-1,k-1) + q^{2k}(1+q)d(n-1,k) + \\ &\qquad + q^{4k+3}d(n-1,k+1), \quad n>0, k>0. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Setzt man

$$dd(n,k) = q^{\frac{1}{2}\binom{2k+1}{2}} d(n,k), \tag{6.46}$$

so erhalten wir ein anderes Gewicht, das symmetrisch ist und $dd(0,k) = [k=0]$ erfüllt.

Damit erhalten wir die Identität

$$\sum_{k\geq 0} dd(m,k)dd(n,k) = dd(m+n,0) = C_{m+n+1}(q) \tag{6.47}$$

oder äquivalent dazu

$$\sum_{k\geq 0} d(m,k)d(n,k)q^{\binom{2k+1}{2}} = d(m+n,0) = C_{m+n+1}(q). \tag{6.48}$$

Das kann folgendermaßen interpretiert werden:

Man betrachte die Dreiecksmatrizen

$$Q_n = (dd(i,j))_{i,j=0}^{n}. \tag{6.49}$$

Dann gilt

$$Q_n Q_n^t = (C_{i+j+1}(t))_{i,j=0}^{n}. \tag{6.50}$$

Daraus ergibt sich die Hankeldeterminante

$$\det(C_{i+j+1}(q))_{i,j=0}^{n} = \det Q_n Q_n^t = \prod_{k=0}^{n} q^{\binom{2k+1}{2}} = q^{2\sum_{i=0}^{n} i^2 + \binom{n+1}{2}} = q^{\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}}. \tag{6.51}$$

Aus der Formel (4.33) erhält man

$$\hat{F}(x,s,z) = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x,-1,q) q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}} z^{n+1} = \sum_{i\geq 0} \frac{x^i z^{i+1} q^{-\frac{1}{2}\binom{i+1}{2}}}{\left(1+\frac{z^2}{q\sqrt{q}}\right)\left(1+\frac{z^2}{q^2\sqrt{q}}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{q^{i+1}\sqrt{q}}\right)}.$$

Wendet man darauf das Funktional F an, so ergibt sich

$$z = \sum_{i\geq 0} \frac{C_i(q) z^{2i+1} q^{-\frac{1}{2}\binom{2i+1}{2}}}{\left(1+\frac{z^2}{q\sqrt{q}}\right)\left(1+\frac{z^2}{q^2\sqrt{q}}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{q^{2i+1}\sqrt{q}}\right)}.$$

Ersetzt man darin z^2 durch $q\sqrt{q}z$ so ergibt sich

$$1 = \sum_{i\geq 0} \frac{C_i(q) z^i q^{-\frac{1}{2}\binom{2i+1}{2}+\frac{3i}{2}}}{(1+z)\left(1+\frac{z}{q}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)}$$ oder durch Multiplikation mit $(1+z)$ und Subtraktion von 1 auf beiden Seiten

$$z = \sum_{i\geq 1} \frac{C_i(q) z^i q^{-2\binom{i}{2}}}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)}. \tag{6.52}$$

Das ist ein $q-$Analogon der Identität $z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{z^n}{(1+z)^{2n}}$ für die gewöhnlichen Catalanzahlen.

Es sei kurz erwähnt, wie man diese Identität üblicherweise ableitet: Sei $g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k z^k$. Dann ist nach (6.2) $g(z)=z(1+g(z))^2$. Sei $G(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$ die bezüglich Komposition inverse formale Potenzreihe zu $g(z)$. Dann ergibt sich $z=g(G(z))=\sum_{k=1}^{\infty}C_kG(z)^k=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{z^k}{(1+z)^{2k}}$.

Dieser Beweis lässt sich leider nicht verallgemeinern. Eine andere direkte Ableitung geht folgendermaßen: Man betrachte die Entwicklung $z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{z^n}{(1+z)^{2n}}$, deren Koeffizienten klarerweise eindeutig bestimmt sind und suche eine Rekurrenz für die C_n. Addiert man auf beiden Seiten 1 und dividiert dann durch $1+z$, so erhält man $1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{z^n}{(1+z)^{2n+1}}$. Durch Quadrieren ergibt sich daraus $1=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\frac{z^k}{(1+z)^{2k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}C_j\frac{z^j}{(1+z)^{2j+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(1+z)^{2n+2}}\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}$.
Durch Multiplikation mit z erhält man

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(1+z)^{2n+2}}\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1+z)^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}.$$

Vergleicht man mit der Ausgangsidentität $z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{z^n}{(1+z)^{2n}}$, so sieht man, dass (6.1) gilt. Die C_n sind also die Catalanzahlen.

Dieser Beweis lässt sich verallgemeinern. Wir gehen von $z=\sum_{i\ge1}\frac{C_i(q)z^iq^{-2\binom{i}{2}}}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)}$

aus, addieren 1 auf beiden Seiten, ersetzen z durch $\frac{z}{q}$ und dividieren durch $(1+\frac{z}{q})$. Das ergibt $1=\sum_{i\ge0}\frac{C_i(q)z^iq^{-i^2}}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2i+1}}\right)}$.

Das gilt für alle z und daher auch für $\frac{z}{q^{2i+1}}$ an Stelle von z. Wir erhalten daher

$$1=\sum_{i\ge 0}\frac{C_i(q)z^iq^{-i^2}}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2i+1}}\right)}1$$

$$=\sum_{i\ge 0}\frac{C_i(q)z^iq^{-i^2}}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2i+1}}\right)}\sum_{k\ge 0}\frac{C_k(q)\left(\frac{z}{q^{2i+1}}\right)^k q^{-k^2}}{\left(1+\frac{z}{q^{2i+2}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2i+3}}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{q^{2i+1+2k}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2i+2+2k}}\right)}.$$

Nach Multiplikation mit z können wir wieder Koeffizienten vergleichen und erhalten

$$C_n(q)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{n-1-k}C_k(q)C_{n-1-k}(q)=\sum_{k=0}^{n-1}q^kC_k(q)C_{n-1-k}(q).$$

Als nächstes berechnen wir

$$\sum_{k\ge 1}x^{2k-2}q^{-\binom{k-1}{2}}z^k(1-z)(1-\frac{z}{q})\cdots(1-\frac{z}{q^{k-1}})=\sum_{i,k}(-1)^iq^{\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}\left(\frac{z}{q^{k-1}}\right)^i z^kx^{2k-2}q^{-\binom{k-1}{2}}$$

$$=\sum_{n\ge 0}z^{n+1}q^{-\binom{n}{2}}\sum_{i+k=n+1}(-1)^iq^{\binom{i}{2}-i(k-1)-\binom{k-1}{2}+\binom{i+k-1}{2}}x^{2k-2}\begin{bmatrix}k\\i\end{bmatrix}=\sum_{n\ge 0}z^{n+1}q^{-\binom{n}{2}}\sum_{i<n+1}(-1)^iq^{2\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}n+1-i\\i\end{bmatrix}x^{2n-2i}.$$

Das ergibt

$$\sum_{k\ge 1}x^{2k-2}q^{-\binom{k-1}{2}}z^k(1-z)(1-\frac{z}{q})\cdots(1-\frac{z}{q^{k-1}})=z+\sum_{n\ge 1}z^{n+1}q^{-\binom{n}{2}}x^{n-1}F_{n+2}(x,-1,q). \qquad (6.53)$$

Wenn wir darauf das Funktional F anwenden, erhalten wir

$$\sum_{k\ge 1}C_{k-1}(q)q^{-\binom{k-1}{2}}z^k(1-z)(1-\frac{z}{q})\cdots(1-\frac{z}{q^{k-1}})=z. \qquad (6.54)$$

Das ist ein $q-$ Analogon der Formel $\sum_{k\ge 1}C_{k-1}z^k(1-z)^k=z.$

Die $q-$ Catalanzahlen $C_n(q)$ sind durch keine schöne Formel gegeben. Das naheliegendste $q-$ Analogon wäre jedoch $c_n(q)=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}$. Diese Folge beginnt mit

$1,1,1+q^2,1+q^2+q^3+q^4+q^6,1+q^2+q^3+2q^4+q^5+2q^6+q^7+2q^8+q^9+q^{10}+q^{12},\cdots.$

Es zeigt sich, dass diese $q-$Catalanzahlen ebenfalls durch eine schöne kombinatorische Eigenschaft gekennzeichnet sind.

Denn es gilt

Satz 6.3

Sei D_n *die Menge aller Dyckwege von* $(0,0)$ *nach* $(2n,0)$. *Dann gilt*

$$\sum_{w\in D_n} q^{maj(w)} = \frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}. \tag{6.55}$$

Beweis

Für einen beliebigen Weg von $(0,0)$ nach $(2n,0)$ gilt $\sum_w q^{maj(w)} = \begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}$ nach (3.2). Statt der Gipfel definieren wir hier den maj Index durch die Täler (oder betrachten statt nichtnegativer Wege die nichtpositiven Wege). Wenn ein Weg einmal negative Werte annimmt, dann betrachten wir den ersten Punkt P, wo er ein absolutes Minimum annimmt. Sei P' der Punkt vor P. Nun ersetzen wir den Abstieg $P'P$ durch einen Aufstieg $P'P''$ und fügen den Restweg (um 2 Einheiten nach oben verschoben) daran an. Dieser Weg heiße $\varphi(w)$. Dann endet $\varphi(w)$ im Punkt $(2n,2)$. Das Tal im Punkt $P\in w$ ist nun zum Punkt $P'\in\varphi(w)$ gewandert. Alle anderen Täler sind festgeblieben. Daher ist $maj(w)=1+maj(\varphi(w))$.

Die Abbildung φ ist eine Bijektion. Denn P' ist das letzte absolute Minimum von $\varphi(w)$.

Nun ist $\sum_{\varphi(w)} q^{1+maj(\varphi(w))} = q\begin{bmatrix}2n\\n+1\end{bmatrix}$. Daher ist

$$\sum_{w\in D_n} q^{maj(w)} = \begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix} - q\begin{bmatrix}2n\\n+1\end{bmatrix} = \frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}. \tag{6.56}$$

Es scheint keine schöne Rekurrenz der $c_n(q)$ zu geben, die als $q-$Analogon von $C_n=\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ interpretiert werden kann. Dagegen existiert ein Analogon der Formel $z=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{z^n}{(1+z)^{2n}}$, nämlich

Satz 6.4

Die $q-$*Catalanzahlen* $c_n(q)=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}$ *sind die eindeutig bestimmten Koeffizienten in der Reihe*

$$z=\sum_{k\geq 1}c_k(q)q^{-\binom{k}{2}}\frac{z^k}{(1\dotplus\frac{z}{q^k})^k(1\dotplus qz)^k}.$$

Zum Beweis benötigen wir das folgende $q-$Analogon der Formel von Lagrange

Lemma 6.1

Sei

$$f(z)=\sum_k c_k g_k(z), \tag{6.57}$$

mit $g_n(z)=\frac{z^n}{(1\div\frac{z}{q^n})^n(1\div qz)^n}.$

Dann ist

$$[n]c_n=\left[z^{n-1}\right]\left(f'(z)\left(1\div\frac{z}{q^{n-1}}\right)^{2n}\right). \tag{6.58}$$

Beweis

Sei $g_n(z)=\frac{z^n}{(1\div\frac{z}{q^n})^n(1\div qz)^n}.$

Dann ist für $k>n$

$$\frac{g_k(z)}{g_n(z)}=z^{k-n}\frac{(1\div\frac{z}{q^n})^n(1\div qz)^n}{(1\div\frac{z}{q^k})^k(1\div qz)^k}=z^{k-n}\frac{1}{(1\div\frac{z}{q^k})^{k-n}(1\div q^{n+1}z)^{k-n}}$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)' = \frac{z^{k-n}}{(1-q)z}\frac{1}{(1\div\frac{z}{q^k})^{k-n+1}(1\div q^{n+1}z)^{k-n+1}}\left((1-\frac{z}{q^n})(1-q^{k+1}z)-q^{k-n}(1-\frac{z}{q^k})(1-q^{n+1}z)\right)$$

$$=\left[k-n\right](1-qz^2)z^{k-n-1}\frac{1}{(1\div\frac{z}{q^k})^{k-n+1}(1\div q^{n+1}z)^{k-n+1}}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{g_k'(z)}\left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)' = \frac{(1\div\frac{z}{q^k})^{k+1}(1\div qz)^{k+1}}{\left[k\right]z^{k-1}}\left[k-n\right]z^{k-n-1}\frac{1}{(1\div\frac{z}{q^k})^{k-n+1}(1\div q^{n+1}z)^{k-n+1}}$$

$$=\frac{\left[k-n\right]}{\left[k\right]z^n}(1\div\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}$$

und somit

$$g_k'(z)(1\div\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\frac{\left[k-n\right]}{\left[k\right]z^n}=\left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)'.$$

Das ist eine formale Potenzreihe. Daher ist

$g_k'(z)(1\div\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}$ eine formale Potenzreihe der Gestalt $z^n a(z)$ mit einer formalen Potenzreihe $a(z)$. Speziell ist also

$$\left[z^{n-1}\right]\left(g_k'(z)(1\div\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\right)=0. \tag{6.59}$$

Für $k<n$ gilt

$$\frac{g_k(z)}{g_n(z)}=z^{k-n}\frac{(1\div\frac{z}{q^n})^n(1\div qz)^n}{(1\div\frac{z}{q^k})^k(1\div qz)^k}=\frac{1}{z^{n-k}}(1\div\frac{z}{q^n})^{n-k}(1\div q^{k+1}z)^{n-k}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)' = \frac{1}{(1-q)z}\left(\frac{1}{z^{n-k}}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^n})^{n-k}(1 \underset{\cdot}{-} q^{k+1}z)^{n-k} - \frac{1}{(qz)^{n-k}}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{qz}{q^n})^{n-k}(1 \underset{\cdot}{-} q^{k+2}z)^{n-k}\right)$$
$$= \frac{1}{(1-q)q^{n-k}z^{n-k+1}}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{n-k-1}(1 \underset{\cdot}{-} q^{k+2}z)^{n-k-1}\left(q^{n-k}(1-\frac{z}{q^n})(1-q^{k+1}z)-(1-\frac{z}{q^k})(1-q^{n+1}z)\right)$$
$$= [n-k]\frac{1-qz^2}{q^{n-k}z^{n-k+1}}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{n-k-1}(1 \underset{\cdot}{-} q^{k+2}z)^{n-k-1}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{g_k{}'(z)}\left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)' = \frac{(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^k})^{k+1}(1 \underset{\cdot}{-} qz)^{k+1}}{[k]z^{k-1}}[n-k]\frac{1}{q^{n-k}z^{n-k+1}}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{n-k-1}(1 \underset{\cdot}{-} q^{k+2}z)^{n-k-1}$$
$$= \frac{[n-k]}{[k]q^{n-k}z^n}(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{2n}.$$

Nun ist $\frac{g_k(z)}{g_n(z)}$ eine formale Laurentreihe, d.h. von der Form $\frac{a(z)}{z^m}$ für eine formale Potenzreihe $a(z)$. In der $q-$Ableitung einer formalen Laurentreihe kann $\frac{1}{z}$ nicht auftreten.

Daher muss in $g_k{}'(z)(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{2n} = \left(\frac{g_k(z)}{g_n(z)}\right)' z^n$ der Koeffizient von z^{n-1} verschwinden.

Schließlich ist

$$g_k{}'(z) = \left(\frac{g_k(z)}{g_0(z)}\right)' = [k](1-qz^2)z^{k-1}\frac{1}{(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^k})^{k+1}(1 \underset{\cdot}{-} qz)^{k+1}} = \frac{[k](1-qz^2)z^{k-1}}{(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^k})^{2k+2}}.$$

Daher ist $g_k{}'(z)(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{k-1}})^{2k} = \dfrac{[k](1-qz^2)z^{k-1}}{(1-\frac{z}{q^k})(1-q^{k+1}z)}$.

Insgesamt ergibt sich

$$\left[z^{n-1}\right]\left(g_k{}'(z)(1 \underset{\cdot}{-} \frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\right) = [k][n=k]. \tag{6.60}$$

Ist also $f(z)=\sum_k c_k g_k(z),$ dann ist $f'(z)=\sum_k c_k g'_k(z)$ und somit

$$[n]c_n=\left[z^{n-1}\right]\left(\sum_k c_k g'_k(z)(1\underset{\cdot}{-}\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\right)=\left[z^{n-1}\right]\left(f'(z)(1\underset{\cdot}{-}\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\right),$$

wie behauptet.

Sei nun $z=\sum_{k\geq 1}c_k(q)q^{-\binom{k}{2}}\dfrac{z^k}{(1\underset{\cdot}{+}\frac{z}{q^k})^k(1\underset{\cdot}{+}qz)^k}.$

Aus dem Lemma ergibt sich

$$c_n(q)=\frac{q^{\binom{n}{2}}}{[n]}\left[z^{n-1}\right]\left((1\underset{\cdot}{+}\frac{z}{q^{n-1}})^{2n}\right)=\frac{q^{\binom{n}{2}}}{[n]}\begin{bmatrix}2n\\n-1\end{bmatrix}q^{-(n-1)(n-1)+\binom{n-1}{2}}=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}.$$

Damit ist alles bewiesen.

Abschließend sei noch erwähnt, dass G. E. Andrews ein $q-$Analogon gefunden hat, das sowohl die Rekurrenz erfüllt als auch durch eine geschlossene Formel darstellbar ist. Allerdings sind die entsprechenden Gewichte keine Polynome in q, sondern rationale Funktionen.

Wir definieren dazu wieder für jeden Gitterweg ein Gewicht. Das Gewicht eines Aufstiegs sei 1 und das Gewicht eines Abstiegs, der auf der Höhe k endet, sei $t(k)=\dfrac{4q^{k+2}}{(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})}.$. Das Gewicht eines Dyckwegs sei das Produkt der Gewichte aller Aufstiege und Abstiege. Das Gewicht einer Menge von Dyckwegen sei die Summe der Gewichte der einzelnen Wege. Sei $a_{n,k}$ das Gewicht aller Dyckwege von $(0,0)$ nach $(n,k).$ Dann ist natürlich wieder $a_{2n+1,0}=0.$

Es gilt allgemein

$$\begin{aligned}a_{0,k}&=[k=0]\\a_{n,0}&=\frac{4q^2}{(1+q)(1+q^2)}a_{n-1,1}\\a_{n,k}&=a_{n-1,k-1}+\frac{4q^{k+2}}{(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})}a_{n-1,k+1}.\end{aligned}\tag{6.61}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$a_{2n+k,k}=a_{2n+k-1,k-1}+t(k)a_{2(n-1)+k+1,k+1}.\tag{6.62}$$

Für $n=0$ ist $a_{k,k}=1$ für alle k. Außerdem ist $a_{2n,0}=t(0)a_{2n-1,1}=t(0)a_{2(n-1)+1,1}$.

Wir behaupten, dass die folgende explizite Darstellung

$$a_{2n+k-1,k-1}=(2q)^{2n}\frac{[k]}{[n+k]}\begin{bmatrix}k+2n-1\\n\end{bmatrix}\frac{1+q^k}{1+q^{n+k}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)(1+q^{k+j-1})}. \tag{6.63}$$

gilt.

Für $q=1$ reduziert sich das auf

$$a_{2n+k-1,k-1}=\frac{k}{n+k}\binom{k+2n-1}{n}.$$

Das ist sehr einfach zu verifizieren. Denn es gibt $\binom{2n+k-1}{n}$ Wege von $(0,0)$ nach $(2n+k-1,k-1).$ Denn jeder solche Weg hat genau n Abstiege. Wenn ein Weg einmal unter die $x-$Achse geht, dann spiegle man ihn vom ersten Punkt mit $y-$Koordinate -1 an an der Geraden $y=-1$. Der neue Weg endet in $(2n+k-1,-k-2)$ und jeder solche Weg tritt auf. Jeder solche Weg hat $n-1$ Aufstiege. Daher ist die Anzahl der nichtnegativen Wege $\binom{2n+k-1}{n}-\binom{2n+k-1}{n-1}=\frac{k}{n+k}\binom{2n+k-1}{n}.$

Im allgemeinen Fall verwenden wir Induktion nach n und bei festem n Induktion nach k.

Dazu genügt es, Formel (6.62) zu verifizieren.

Diese lautet

$$\frac{[k+1]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix}k+2n\\n\end{bmatrix}\frac{1+q^{k+1}}{1+q^{n+k+1}}\frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)(1+q^{k+j})}$$
$$=\frac{[k]}{[n+k]}\begin{bmatrix}k+2n-1\\n\end{bmatrix}\frac{1+q^k}{1+q^{n+k}}\frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)(1+q^{k+j-1})}$$
$$+\frac{4q^{k+2}}{(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})}\frac{[k+2]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix}k+2n-1\\n-1\end{bmatrix}\frac{1+q^{k+2}}{1+q^{n+k+1}}\frac{(2q)^{2n-2}}{\prod_{j=1}^{n-1}(1+q^j)(1+q^{k+j+1})}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{[k+1]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix} k+2n \\ n \end{bmatrix}(1+q^{k+1})$$
$$=\frac{[k]}{[n+k]}\begin{bmatrix} k+2n-1 \\ n \end{bmatrix}(1+q^{k+n+1})+\frac{[k+2]}{[n+k+1]}\begin{bmatrix} k+2n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}q^k(1+q^n)$$

oder

$$\frac{[k+1]}{[n+k+1]}[k+2n](1+q^{k+1})=[k](1+q^{k+n+1})+\frac{[k+2][n]}{[n+k+1]}q^k(1+q^n)$$

bzw.

$$[k+1][k+2n](1+q^{k+1})=[k](1+q^{k+n+1})[n+k+1]+[k+2][n]q^k(1+q^n).$$

Multiplikation mit $(1-q)^2$ ergibt

$$(1-q^{2k+2})(1-q^{k+2n})=(1-q^k)(1-q^{2k+2n+2})+(1-q^{k+2})(1-q^n)(q^k+q^{n+k}).$$

Man rechnet sofort nach, dass das stimmt.

Insbesondere ist

$$CA_n(q)=a_{2n,0}=\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}\frac{(1+q)}{(1+q^{n+1})}\frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}. \tag{6.64}$$

Diese $q-$Catalanzahlen $CA_n(q)$ wurden von G.E. Andrews folgendermaßen eingeführt.

Er geht von der Formel $C_n=(-1)^n 2^{2n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}$ aus und betrachtet für $n\geq -1$ das $q-$Analogon

$$CA_n(q)=(-1)^n q^{n^2}(2q)^{2n}(1+q)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Speziell ist

$$CA_{-1}(q)=-\frac{1+q}{4q}. \tag{6.65}$$

Nun rechnet man leicht nach, dass $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2}=(-1)^n\frac{1}{q^{n^2}}\frac{1}{[n+1]}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}\frac{1}{(1+q^{n+1})\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}$ ist.

Daher ist für $n \geq 0$

$$CA_n(q) = (-1)^n q^{n^2} (2q)^{2n} (1+q) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{(1+q)}{(1+q^{n+1})} \frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n} (1+q^j)^2}. \tag{6.66}$$

Die $q-$Vandermonde'sche Formel

$$\begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix} q^{(r-n+k)k} = q^{-\binom{n}{2}} \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix} q^{ks}$$

gilt nach (2.20) für beliebige $r, s \in \mathbb{R}.$ Für $r = s = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n-k \end{bmatrix} q^{\frac{k}{2}}.$$

Ersetzt man nun q durch $q^2,$ so folgt

$$q^{2\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} = \sum_k q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_{q^2} q^{2\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} q^k. \tag{6.67}$$

Setzt man also

$$h(z) = \sum_n q^{n^2-n} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n, \text{ so ist}$$

$$h(z)h(qz) = 1 + z. \tag{6.68}$$

Das ergibt sich auch aus (2.18), wenn man q durch q^2 in $(1 \dotplus z)^{\frac{1}{2}}$ ersetzt und (2.20) beachtet.

Ersetzt man in (6.67) n durch $n+1$, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\sum_{k=0}^{n+1} CA_{k-1}(q) CA_{n-k}(q) q^k = 0 \text{ für } n > 0\,.$$

Aus $CA_{-1}(q) = -\frac{1+q}{4q}$ ergibt sich

$$\frac{1+q}{4q}CA_n(q)(1+q^{n+1})=\sum_{k=1}^{n}q^kCA_{k-1}(q)CA_{n-k}(q)$$

und daraus für $n\geq 1$

$$CA_n(q)=\frac{4q^2}{(1+q)(1+q^{n+1})}\sum_{k=0}^{n-1}q^kCA_k(q)CA_{n-1-k}(q). \tag{6.69}$$

Wenn man $h(z)$ durch diese Catalanzahlen ausdrückt, ergibt sich

$h(-4qz)=1-\frac{4qz}{1+q}\sum_n CA_n(q)z^n$ oder anders ausgedrückt

$$\sum_n CA_n(q)z^n=\frac{1+q}{4qz}\left(1-h(-4qz)\right).$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf die bekannte Formel $\sum_n C_nz^n=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.

Für die erzeugende Funktion

$$F(z)=\sum_n CA_n(q)z^n \tag{6.70}$$

ergibt sich daraus unter Verwendung von $h(z)h(qz)=1+z$ die Formel

$$\frac{F(z)+qF(qz)}{1+q}=1+\frac{4q^2}{(1+q)^2}zF(z)F(qz). \tag{6.71}$$

Für die entsprechenden orthogonalen Polynome $p_n(x)$ ergibt sich wie früher die Rekursion

$$p_n(x)=xp_{n-1}(x)-\frac{4q^n}{(1+q^{n-1})(1+q^n)}p_{n-2}(x)$$

mit den Anfangswerten

$p_0(x)=1$ und $p_1(x)=x.$

Das ergibt die explizite Darstellung

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}x^{n-2k}\frac{4^kq^{k^2+k}}{\prod_{j=1}^{k}(1+q^j)(1+q^{n-k+j})}.$$

Denn wenn wir die Koeffizienten von x^{n-2k} vergleichen, ergibt sich nach Kürzung

$$\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} \frac{1+q^n}{1+q^{n-k}} + q^{n-2k} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k-1 \end{bmatrix} \frac{1+q^k}{1+q^{n-k}}.$$

Durch Multiplikation mit $(1+q^{n-k})$ ergibt sich

$$\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} (1+q^{n-k}) = \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} (1+q^n) + q^{n-2k} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k-1 \end{bmatrix} (1+q^k).$$

Das ergibt sich jedoch sofort aus den beiden Rekurrenzen für die q – Binomialkoeffizienten.

Daraus lassen sich wieder die Hankeldeterminanten berechnen. Sie sind gegeben durch

$$\det\left(CA_{i+j}(q)\right)_{i,j=0}^{n} = \prod_{k=1}^{n} t(0)\cdots t(k-1).$$