5. Eine weitere Klasse von q-Fibonacci-Zahlen und der Euler'sche Pentagonalzahlensatz.

In diesem Abschnitt betrachten wir ein weiteres $q-$*Analogon der Fibonacci-Polynome, für das auch ein schönes Analogon der Lucas-Polynome existiert und das eine enge Beziehung zum Euler'schen Pentagonalzahlensatz aufweist.*

Wir betrachten wieder die nichtkommutativen Fibonacci-Polynome und erinnern an die Rekursionen

$$F_n(a,b)=aF_{n-1}(a,b)+bF_{n-2}(a,b) \tag{5.1}$$

und

$$F_n(a,b)=F_{n-1}(a,b)a+F_{n-2}(a,b)b \tag{5.2}$$

sowie an die Formel

$$F_n(a,b)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{n-1-k}(a,b). \tag{5.3}$$

Wir wollen nun eine weitere Art von $q-$Fibonacci-Polynomen $Fib_n(x,s,q)$ einführen. Dazu betrachten wir den Homomorphismus $\psi,$ der durch $\psi(a)=x\eta, \psi(b)=qs\eta$ definiert ist. Dann ist $\psi(a)\psi(b)=x\eta qs\eta=xq^2s\eta^2=q(qs\eta)(x\eta)=q\psi(b)\psi(a).$

Daher ist $\psi\left(C_k^n(a,b)\right)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\psi(b)^k\psi(a)^{n-k}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}s^k\eta^k(x\eta)^{n-k}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}s^kx^{n-k}\eta^n.$

Daher folgt aus (5.3)

$$\psi\left(F_n(a,b)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-1}\eta^{n-k-1}. \tag{5.4}$$

Man beachte, dass jetzt die Potenzen von η auch von k abhängen. Dadurch werden einige Dinge komplizierter.
Wir erhalten aber auch hier eine explizite Darstellung, nämlich

$$Fib_n(x,s,q)=\psi\left(F_n(a,b)\right)(1)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-1}. \tag{5.5}$$

Dann gilt nach (5.1)

$$Fib_n(x,s,q)=xFib_{n-1}(x,qs,q)+qsFib_{n-2}(x,qs,q) \tag{5.6}$$

und nach (5.2)

$$Fib_n(x,s,q)=xFib_{n-1}(x,s,q)+\sum_{k=0}^{n-3}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-2\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-3}\eta^{n-k-3}qs\eta(1)$$

$$=xFib_{n-1}(x,s,q)+\sum_{k=0}^{n-3}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-2\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-3}q^{n-k-2}s=xFib_{n-1}(x,s,q)+q^{n-2}sFib_{n-1}(x,\frac{s}{q},q).$$

Es gilt also

$$Fib_n(x,s,q) = xFib_{n-1}(x,s,q) + q^{n-2} sFib_{n-2}(x,\frac{s}{q},q). \tag{5.7}$$

Kombiniert man (5.6) und (5.7), so erhält man

$$Fib_n(x,s,q) = xFib_{n-1}(x,s,q) + q^{n-2} sxFib_{n-3}(x,s,q) + q^{n-2} s^2 Fib_{n-4}(x,s,q). \tag{5.8}$$

Bemerkung

Für die entsprechenden $q-$Fibonacci-Zahlen $Fib_n(q) = Fib_n(1,1,q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}$ gibt es nur die Rekursion 4. Ordnung, die aus (5.8) folgt, nämlich

$$Fib_n(q) = Fib_{n-1}(q) + q^{n-2} Fib_{n-3}(q) + q^{n-2} Fib_{n-4}(q). \tag{5.9}$$

Diese Folge beginnt mit $0,1,1,1+q,1+q+q^2,1+q+q^2+2q^3,1+q+q^2+2q^3+2q^4+q^5,\cdots$.

Nun untersuchen wir, wie der Homomorphismus ψ, der durch $\psi(a) = x\eta, \psi(b) = qs\eta$ definiert ist, auf ein Wort $c_1 \cdots c_n \in C_k^n(a,b)$ wirkt. Seien i_j die Indizes mit $c_{i_j} = b$. Dann gilt $\psi(c_1 \cdots c_n) = q^{i_1+\cdots+i_k} s^k x^{n-k} \eta^n$. Das folgt sofort mit Induktion nach n. Es sei für $n-1$ bereits gezeigt. Ist $c_n = a$, dann gilt $\psi(c_1 \cdots c_{n-1} a) = q^{i_1+\cdots+i_k} s^k x^{n-k-1} \eta^{n-1} x\eta = q^{i_1+\cdots+i_k} s^k x^{n-k} \eta^n$ und ist $c_n = b$, dann ergibt sich
$\psi(c_1 \cdots c_{n-1} b) = q^{i_1+\cdots+i_{k-1}} s^{k-1} x^{n-k} \eta^{n-1} qs\eta = q^{i_1+\cdots+i_{k-1}+n} s^k x^{n-k} \eta^n = q^{i_1+\cdots+i_{k-1}+i_k} s^k x^{n-k} \eta^n.$

Wir können $Fib_n(x,s,q)$ ebenfalls auf negative Indizes unter Beibehaltung der Rekurrenz erweitern. Es gilt dann

$$Fib_{-n}(x,s,q) = (-1)^{n-1} \frac{Fib_n(x,s,q)}{s^n}. \tag{5.10}$$

Wegen (5.6) ist das äquivalent mit

$$\frac{Fib_n(x,s,q)}{s^n} = -x \frac{Fib_{n+1}(x,qs,q)}{(qs)^{n+1}} + qs \frac{Fib_{n+2}(x,qs,q)}{(qs)^{n+2}}.$$

Das folgt jedoch aus (5.7).

Für $\psi(C)$ ergibt sich $\psi(C)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ qs\eta & x\eta \end{pmatrix}$.

Sei $B_n(x,s)=\psi(C^n)I$.

Dann ist

$$B_n(x,s)=\begin{pmatrix} q^{n-1}sFib_{n-1}(x,\frac{s}{q},q) & Fib_n(x,s,q) \\ q^n sFib_n(x,\frac{s}{q},q) & Fib_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}.$$

Es gilt $B_n(x,s)=xB_{n-1}(x,qs)+qsB_{n-2}(x,qs)$.

Denn sowohl $Fib_n(x,s,q)$ als auch $q^n sFib_n(x,\frac{s}{q},q)$ erfüllen diese Rekursion.

Außer den bereits erwähnten Rekursion gibt es hier eine weitere, die ganz anders aussieht.

$$Fib_n(x,s,q)=xFib_{n-1}(x,s,q)+(q-1)sD\left(Fib_{n-1}(x,s,q)\right)+sFib_{n-2}(x,s,q). \tag{5.11}$$

Zum Beweis vergleichen wir die Koeffizienten von s^k in $Fib_{n+1}(x,s,q)$. Dabei ergibt sich

$$q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}=q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}+(q-1)q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-k \\ k-1 \end{bmatrix}[n-2k+1]+q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Diese Identität ist äquivalent mit

$$q^k\left(\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}\right)=(q^{n-2k+1}-1)\begin{bmatrix} n-k \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

oder

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}=q^{n-2k+1}\begin{bmatrix} n-k \\ k-1 \end{bmatrix}-q^{n-2k+1}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-2 \end{bmatrix}.$$

Das folgt aber sofort aus der Rekurrenzrelation für die $q-$Binomialkoeffizienten.

Da die Operatoren $x+(q-1)sD$ und der Multiplikationsoperator mit x kommutieren, ergibt sich

$$Fib_n(x,s,q)=\sum_{2k\le n-1}\binom{n-k-1}{k}s^k(x+(q-1)D)^{n-2k-1}(1). \tag{5.12}$$

Für $q=1$ erfüllen die Lucas-Polynome dieselbe Rekurrenz wie die Fibonacci-Polynome. Für die Carlitz'schen $q-$Fibonacci-Zahlen gibt es keine derartigen $q-$Lucas-Zahlen. Für die hier betrachteten $q-$Analoga existieren jedoch sehr schöne Analoga.
Wir definieren die $q-$Lucas-Polynome als die eindeutig bestimmten Polynome, welche die Rekurrenz

$$Luc_n(x,s,q)=xLuc_{n-1}(x,s,q)+(q-1)sD\left(Luc_{n-1}(x,s,q)\right)+sLuc_{n-2}(x,s,q) \tag{5.13}$$

mit den Anfangsbedingungen $Luc_0(x,s,q)=2, Luc_1(x,s,q)=x$ erfüllen.

Dann ergibt sich sofort

$$Luc_n(x,s,q)=Fib_{n+1}(x,s,q)+sFib_{n-1}(x,s,q), \tag{5.14}$$

wenn man die zwei Anfangswerte betrachtet.

Daraus lässt sich eine explizite Formel herleiten:

$$Luc_n(x,s,q)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k}. \tag{5.15}$$

Denn

$$Luc_n(x,s,q)=\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k}+\sum_{k=0}^{n-2} q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n-k-2\\k\end{bmatrix}s^{k+1}x^{n-2k-2}$$

$$=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\left(q^k\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-k-1\\k-1\end{bmatrix}\right)s^k x^{n-2k}=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k}.$$

Weiter gilt

$$D\left(Luc_n(x,s,q)\right)=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix}n-k\\k\end{bmatrix}s^k\left[n-2k\right]x^{n-2k-1}$$

$$=\left[n\right]\sum_k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}s^k x^{n-2k-1}=\left[n\right]Fib_n(x,\frac{s}{q},q).$$

Aus der Formel

$$F_{2n}(a,b)=\sum_k C_k^n(a,b)F_{n-k}(a,b)$$

folgt durch Anwenden von ψ

$$Fib_{2n}(x,s,q)=\sum_k \psi(C_k^n(a,c))\psi(Fib_{n-k}(a,b))(1)=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}s^k x^{n-k}\eta^n Fib_{n-k}(x,s,q)$$

und daher

$$Fib_{2n}(x,s,q)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k x^{n-k} Fib_{n-k}(x,q^n s,q). \qquad (5.16)$$

Geht man dagegen von $F_{2n}(a,b)=\sum_k F_{n-k}(a,b)C_k^n(a,b)$ aus, so erhält man

$Fib_{2n}(x,s,q)=\sum_k \psi(F_{n-k}(a,b))\psi(C_k^n(a,c))(1).$

Nun ist

$\psi(F_{n-k}(a,b))=\sum_{\ell=0}^{n-k-1}\psi(C_\ell^{n-k-\ell-1}(a,b)).$

Jedes Wort aus $v\in\psi(C_\ell^{n-k-\ell-1}(a,b))$ hat die Gestalt $q^{i_1+\cdots+i_\ell}s^\ell x^{n-k-2\ell-1}\eta^{n-k-\ell-1}$.

Daher ist $vs^k(1)=q^{i_1+\cdots+i_\ell}s^\ell x^{n-k-2\ell-1}q^{(n-k-\ell-1)k}s^k=q^{i_1+\cdots+i_\ell}\left(\frac{s}{q^k}\right)^\ell q^{nk-2\binom{k+1}{2}}x^{n-k-2\ell-1}s^k.$

Daraus ergibt sich schließlich

$$Fib_{2n}(x,s,q)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{nk-\binom{k+1}{2}} s^k x^{n-k} Fib_{n-k}(x,\frac{s}{q^k},q). \qquad (5.17)$$

Für $q=1$ ist die Folge $f_n=Fib_n(1,-1,1)=\sum_k(-1)^k\binom{n-1-k}{k}$ periodisch mit Periode 6 und beginnt mit $0,1,1,0,-1,-1$. Denn nach (5.6) ist $f_n=f_{n-1}-f_{n-2}$ mit $f_0=0,\ f_1=1$ und daher ergibt sich der Reihe nach $0,1,1,0,-1,-1,0,1,1,\cdots$.

Das lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 5.1

Für $x=1,s=-\frac{1}{q}$ *gilt*

$Fib_{3n}(1,-\frac{1}{q},q)=0, Fib_{3n+1}(1,-\frac{1}{q},q)=(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}, Fib_{3n+2}(1,-\frac{1}{q},q)=(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}.$

Beweis

Wir verwenden die Rekursion (5.8). Diese gibt

$Fib_n(1,-q^{-1},q)=Fib_{n-1}(1,-q^{-1},q)-q^{n-3}Fib_{n-3}(1,-q^{-1},q)+q^{n-4}Fib_{n-4}(1,-q^{-1},q).$

Daraus ergibt sich

$$Fib_{3n+k}(1,-q^{-1},q)=Fib_{3n+k-1}(1,-q^{-1},q)-q^{3(n-1)+k}Fib_{3(n-1)+k}(1,-q^{-1},q)+q^{3(n-1)+k-1}Fib_{3(n-1)+k-1}(1,-q^{-1},q).$$

Damit können wir mit Induktion den Satz beweisen. Für die ersten 4 Werte rechnet man nach, dass es stimmt. Daraus folgt

$$Fib_{3n+3}(1,-q^{-1},q)=Fib_{3n+2}(1,-q^{-1},q)-q^{3(n-1)+k}Fib_{3(n-1)+3}(1,-q^{-1},q)+q^{3(n-1)+2}Fib_{3(n-1)+2}(1,-q^{-1},q)$$
$$=(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}+(-1)^{n-1}q^{3(n-1)+2}q^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}=0,$$
$$Fib_{3n+1}(1,-q^{-1},q)=Fib_{3n}(1,-q^{-1},q)-q^{3(n-1)+1}Fib_{3(n-1)+1}(1,-q^{-1},q)+q^{3(n-1)}Fib_{3(n-1)}(1,-q^{-1},q)$$
$$=-q^{3(n-1)+1}(-1)^{n-1}q^{\frac{(n-1)(3n-4)}{2}}=(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

und

$$Fib_{3n+2}(1,-q^{-1},q)=Fib_{3n+1}(1,-q^{-1},q)-q^{3(n-1)+2}Fib_{3(n-1)+2}(1,-q^{-1},q)+q^{3(n-1)+1}Fib_{3(n-1)+1}(1,-q^{-1},q)$$
$$=(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}-(-1)^{n-1}q^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}+3(n-1)+2}+(-1)^{n-1}q^{\frac{(n-1)(3n-4)}{2}+3(n-1)+1}=(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}.$$

Daraus ergibt sich

Satz 5.2

$$Fib_{3n+2}(1,-1,q)=\sum_{|k|\le n}(-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2}}. \tag{5.18}$$

Denn aus (5.7) ergibt sich

$$Fib_{3n+2}(1,-1,q)=-q^{3n}Fib_{3n}(1,-q^{-1},q)+Fib_{3n+1}(1,-1,q)$$
$$=-q^{3n-1}Fib_{3n-1}(1,-q^{-1},q)+Fib_{3n}(1,-1,q)$$
$$=-q^{3n-1}Fib_{3n-1}(1,-q^{-1},q)-q^{3n-2}Fib_{3n-2}(1,-q^{-1},q)+Fib_{3(n-1)+2}(1,-1,q)$$
$$=(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}+(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+Fib_{3(n-1)+2}(1,-1,q).$$

Geht man in (5.18) mit $n\to\infty$, so erhält man

$$\sum_{k\ge 0}(-1)^k\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\div q)^k}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}.$$

Beachtet man Formel (2.2), so ergibt sich

Satz 5.3 (Pentagonalzahlensatz von L. Euler)

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}.$$

Auch für die Polynome $Fib_n(x,s,q)$ lässt sich die erzeugende Funktion einfach berechnen.

$$\Phi(x,s,z) = \sum_{n\geq 0} Fib_{n+1}(x,s,q)z^n = 1 + \sum_{n\geq 1} xFib_n(x,qs,q)z^n + \sum_{n\geq 1} qsFib_{n-1}(x,qs,q)z^n$$
$$= 1 + xz\Phi(x,qs,z) + qsz^2\Phi(x,qs,z) = 1 + (xz\eta + qsz^2\eta)F(x,s,z).$$

Daraus folgt
$(1 - xz\eta - qsz^2\eta)\Phi(x,s,z) = 1$
und daher nach der Formel für die geometrische Reihe

$$\Phi(x,s,z) = \frac{1}{(1-xz\eta - qsz^2\eta)}(1) = \sum_{n\geq 0}\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^n (1).$$

Wegen $xz\eta \cdot sz^2\eta = qsz^2\eta \cdot xz\eta$ ist

$$\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (qsz^2\eta)^k (xz\eta)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k z^{n+k} x^{n-k} \eta^n.$$

Daher ist

$$\Phi(x,s,z) = \sum_{m\geq 0}\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^m (1) \tag{5.19}$$

Ausgerechnet ergibt das

$$\Phi(x,s,z) = \sum_{m\geq 0}\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^m (1) = \sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k z^{m+k} x^{m-k}$$
$$= \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k+m=n} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k x^{m-k} = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k\leq n} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k x^{n-2k}.$$

Koeffizientenvergleich liefert wieder, dass $Fib_{n+1}(x,s,q) = \sum_{k\leq n} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k x^{n-2k}$

ist.

Wenn wir $m=n+k$ setzen, können wir die obige Umformung auch so schreiben:

$$\Phi(x,s,z)=\sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k+1}{2}} s^k z^{m+k} x^{m-k} = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} s^k z^{2k} \sum_{n\geq 0}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} z^n x^n$$

$$=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} s^k \frac{z^{2k}}{(1-xz)\cdots(1-q^k xz)}.$$

Es ist also

$$\Phi(x,s,z)=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} s^k \frac{z^{2k}}{(1-xz)\cdots(1-q^k xz)}. \tag{5.20}$$

Soweit ist alles ganz analog zum Fall der Polynome $F_n(x,s,q)$. Aber hier haben wir das Glück, dass sich
$\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^n$ explizit ausrechnen lässt. Es gilt ja

$$\left(qsz^2\eta + xz\eta\right)^n (1) = z^n (x+qsz)(x+q^2sz)\cdots(x+q^n sz). \tag{5.21}$$

Aus (5.19), (5.20) und (5.21) erhalten wir

$$\Phi(x,s,z)=\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} s^k \frac{z^{2k}}{(1-xz)\cdots(1-q^k xz)} = \sum_{n\geq 0} z^n (x+qsz)(x+q^2sz)\cdots(x+q^n sz). \tag{5.22}$$

Wenn wir darin $x=1$ und $s=-\frac{1}{q}$ setzen, ergibt sich

$$\Phi(1,-\frac{1}{q},z)=\sum_{n\geq 0} Fib_{n+1}(1,-\frac{1}{q},q) z^n = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(1-z)\cdots(1-q^k z)}$$

$$=\sum_{n\geq 0} z^n (1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z).$$

Nach Satz 5.1 ist das gleichbedeutend mit

$$\sum_{n\geq 0} z^n (1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z) = \sum_{n\geq 0} Fib_{n+1}(1,-\frac{1}{q},q) z^n = \sum (-1)^k \left(q^{\frac{k(3k-1)}{2}} z^{3k} + q^{\frac{k(3k+1)}{2}} z^{3k+1}\right). \tag{5.23}$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf

$$\sum_{k\geq 0} z^k (1-z)^k = \frac{1}{1-z+z^2} = \frac{1+z}{1+z^3} = 1+z-z^3-z^4+z^6+z^7--++\cdots.$$

Die Rekursion (5.7) gibt

$$(1-xz)\Phi(x,s,z)=1+qsz^2\Phi(x,\frac{s}{q},qz). \tag{5.24}$$

Für $x=1$ und $s=-1$ ergibt das

$$(1-z)\Phi(1,-1,z)=1-qz^2\Phi(1,-\frac{1}{q},qz)$$

und aus $\Phi(x,s,z)=1+xz\Phi(x,qs,z)+qsz^2\Phi(x,qs,z)$

für $x=1$ und $s=-\frac{1}{q}$ erhalten wir

$$\Phi(1,-\frac{1}{q},z)=1+z(1-z)\Phi(1,-1,z).$$

Daraus ergibt sich

$$\Phi(1,-\frac{1}{q},z)=1+z-qz^3\Phi(1,-\frac{1}{q},z).$$

Das ist wieder äquivalent mit

$$Fib_{n+3}(1,-\frac{1}{q},q)=-q^nFib_n(1,-\frac{1}{q},q),$$

woraus wieder Satz 5.1 folgt.

Bemerkung

Analoge Überlegungen führten Euler zu seinem Beweis des Pentagonalzahlensatzes.

Er kam durch Berechnung der ersten Terme zur Vermutung, dass

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots=1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}++--\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}}+q^{\frac{n(3n+1)}{2}}\right)$$

gilt. Um das zu beweisen, führte er eine weitere Unbestimmte z ein und betrachtete

$$f(z,q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n-1)}{2}}z^{3n-1}+q^{\frac{n(3n+1)}{2}}z^{3n}\right).$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf

$$f(z,1)=1-z^2-z^3+z^5+z^6-z^8-z^9++--\cdots=1-z^2-z^3f(z,1).$$

Allgemein gilt

$$f(z,q)=1-qz^2-q^2z^3f(qz,q),$$

wie man leicht verifiziert. Dadurch ist $f(z,q)$ eindeutig festgelegt.

Für $q=1$ gilt $f(z,1)=\dfrac{1-z^2}{1+z^3}=\dfrac{1-z}{1-z+z^2}=1-\dfrac{z^2}{1-z+z^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}z^{n+1}(1-z)^{n-1}.$

Euler suchte einen ähnlichen Ausdruck für beliebige q und betrachtete

$$g(z,q) = 1 - \sum_{n\geq 1} q^n z^{n+1}(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z).$$

Dann gilt $g(1,q) = \prod_{n\geq 1}(1-q^n).$ Denn

$$1 - \sum_{n=1}^{N}(1 \dot{-} q)^{n-1}q^n = \prod_{1}^{N}(1-q^n),$$

weil daraus

$$1 - \sum_{n=1}^{N+1}(1 \dot{-} q)^{n-1}q^n = 1 - \sum_{n=1}^{N}(1 \dot{-} q)^{n-1}q^n - q^{N+1}\prod_{1}^{N}(1-q^n) = (1-q^{N+1})\prod_{1}^{N}(1-q^n) = \prod_{1}^{N+1}(1-q^n)$$

folgt.

Euler bewies nun dass

$$g(z,q) = 1 - qz^2 - q^2z^3 g(qz,q)$$

gilt und daher $g(z,q) = f(z,q)$ ist. Damit ist der Pentagonalzahlensatz vollständig bewiesen.

Unsere obigen Überlegungen führen direkt zu diesem Ergebnis. Denn

$$\sum_{n\geq 0} q^n z^{n+1}(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z) = \sum_{k\geq 0} q^k z^{k+1} \sum_{j\geq 0}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}(qz)^j \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$= \sum \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix} z^{k+j+1} q^{k+j+\binom{j}{2}}(-1)^j = \sum_{n} z^{n+1}q^n \sum_{j}(-1)^j \begin{bmatrix} n-j-1 \\ j \end{bmatrix} q^{\binom{j}{2}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} z^{n+1}q^n Fib_n(1, -\frac{1}{q}, q),$$

d.h.

$$\sum_{n\geq 0} q^n z^{n+1}(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\left(q^{\frac{k(3k-1)}{2}} z^{3k-1} + q^{\frac{k(3k+1)}{2}} z^{3k}\right),$$

woraus alles folgt.