4. Die q-Fibonacci-Zahlen von I. Schur und L. Carlitz und die Identitäten von Rogers-Ramanujan

Es gibt im wesentlichen zwei $q-$Analoga der Fibonacci-Zahlen und Polynome, die sich als nützlich erwiesen haben. In diesem Kapitel studieren wir die von I. Schur und L. Carlitz eingeführten $q-$Analoga der Fibonacci-Zahlen und Polynome und leiten ihre wichtigsten Eigenschaften her. Von besonderem Interesse ist ihr Zusammenhang mit den Identitäten von Rogers-Ramanujan, die ebenfalls bewiesen werden.

Die Fibonacci-Zahlen $0,1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$ sind definiert durch
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit $F_0 = 0, F_1 = 1.$
Es gibt sehr viele kombinatorische Modelle, bei welchen sie auftreten. Zum Beispiel ist F_n die Anzahl der Belegungen eines Rechtecks der Länge $n-1$ und Breite 1 mit Dominosteinen, also Rechtecken der Länge 2 und Breite 1.
Wenn wir jedem Dominostein einen Strich $-$ und jedem leeren Quadrat der Seitenlänge 1 einen Punkt $\bullet$ zuordnen, wobei jedem Strich die Länge 2 und jedem Punkt die Länge 1 zugeordnet wird, zählt F_n die Anzahl der Morsezeichenfolgen der Länge $n-1$. Zum Beispiel ergibt sich für $n=6$ die Menge $\{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet-, \bullet\bullet-\bullet, \bullet-\bullet\bullet, \bullet--, -\bullet\bullet\bullet, -\bullet-, --\bullet\}$.

Nun wollen wir jeder solchen Morsezeichenfolge ein Gewicht zuordnen. Das Gewicht eines Punktes sei 1 und das Gewicht eines Striches q^i wobei i die $x-$Koordinate des Anfangspunktes des entsprechenden Dominosteines ist, wenn das Rechteck im Nullpunkt beginnt. Das Gewicht einer Morsezeichenfolge ist das Produkt der Gewichte der einzelnen Teile und das Gewicht einer Menge von Morsezeichenfolgen ist die Summe der Gewichte der einzelnen Folgen. Die Gewichte der Morsezeichenfolgen für $n=6$ sind in der oben angegebenen Reihenfolge $\{1, q^3, q^2, q, q^{1+3}, q^0, q^{0+3}, q^{0+2}\}$ und das Gesamtgewicht ist $2+q+2q^2+2q^3+q^4.$

Wir definieren nun die (Carlitz'schen) $q-$Fibonacci-Zahlen $F_n(q)$ als das Gewicht aller Morsezeichenfolgen der Länge $n-1$.
Dann gilt

$$F_n(q) = F_{n-1}(q) + q^{n-3}F_{n-2}(q) \tag{4.1}$$

mit den Anfangswerten $F_0(q)=0, F_1(q)=1.$
Das sieht man, wenn man die Morsezeichenfolgen nach ihrem letzten Element klassifiziert. Ist dieses ein Punkt, dann steht davor eine beliebige Folge der Länge $n-2$, ist es jedoch ein Strich, dann hat dieser die Länge 2, sein Gewicht ist q^{n-3} und vorher steht ein beliebiges Wort der Länge $n-3$.

Wir wollen gleich allgemeiner $q-$Fibonacci-Polynome betrachten. Wir ordnen dazu jedem Punkt das Gewicht x und jedem Strich das Gewicht $q^i s$ zu. Dann erhalten wir genau so die Rekursion

$$F_n(x,s,q) = xF_{n-1}(x,s,q) + q^{n-3}sF_{n-2}(x,s,q) \tag{4.2}$$

mit den Anfangswerten $F_0(x,s,q)=0, F_1(x,s,q)=1.$

Die ersten Terme sind also
$0,1,x,x^2+s,x^3+(1+q)sx,x^4+(1+q+q^2)x^2s+q^2s^2,\cdots$
Wenn wir die Morsezeichenfolgen nicht nach dem letzten, sondern nach dem ersten Buchstaben klassifizieren, erhalten wir eine weitere äquivalente Rekursion, nämlich

$$F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,qs,q)+sF_{n-2}(x,q^2s,q). \tag{4.3}$$

Denn die Anfangspunkte der Striche sind im ersten Fall um eine Einheit und im zweiten Fall um zwei Einheiten nach rechts gerückt. Zum Beispiel ist
$x^4+(1+q+q^2)x^2s+q^2s^2 = x(x^3+(1+q)(qs)x+s(x^2+(q^2s)).$

Die Folge $F_n(x,s,q)$ kann eindeutig auf negative Indizes erweitert werden unter Beibehaltung der Rekursion (4.2). Es ergibt sich $F_{-1}(x,s,q)=\frac{q^2}{s}, F_{-2}(x,s,q)=-\frac{q^5x}{s^2},$ und allgemein

$$F_{-n}(x,s,q)=(-1)^{n-1}q^{\binom{n+2}{2}-1}\frac{F_n(x,q^{-n}s,q)}{s^n}. \tag{4.4}$$

Denn nach (4.3) ist
$F_n(x,q^{-n}s,q)=xF_{n-1}(x,q^{-n+1}s,q)+q^{-n}sF_{n-2}(x,q^{-n+2}s,q)$
Daher ist

$$(-1)^{n-1}q^{\binom{n+2}{2}-1}\frac{F_n(x,q^{-n}s,q)}{s^n}=(-1)^{n-1}q^{\binom{n+2}{2}-1}\frac{xF_{n-1}(x,q^{-n+1}s,q)}{s^n}+(-1)^{n-1}q^{\binom{n+2}{2}-n-1}\frac{sF_{n-2}(x,q^{-n+2}s,q)}{s^n}.$$

Das bedeutet
$q^{-n-1}sF_{-n}(x,s,q)=-xF_{-n+1}(x,s,q)+F_{-n+2}(x,s,q).$
Und das ist genau die Rekursion für negative n.

Wir betrachten nun die Menge $P(a,b)$ aller Polynome in zwei nicht-kommutierenden Unbestimmten a,b. Darunter verstehen wir alle endlichen Linearkombinationen von beliebigen Wörtern in diesen Buchstaben.
Wir ordnen nun jeder Morsezeichenfolge ein Wort in $P(a,b)$ zu, indem wir einem Punkt den Buchstaben a und einem Strich den Buchstaben b zuordnen. Wir wollen außerdem jedem Wort die Länge der entsprechenden Morsezeichenfolge zuordnen, d.h. wir ordnen dem Buchstaben a die Länge 1 und dem Buchstaben b die Länge 2 und jedem Wort die Summe der Längen der einzelnen Buchstaben zu.
Dann verstehen wir unter $F_n(a,b)\in P(a,b)$ die Summe aller Wörter der Länge $n-1$ in den nicht-kommutierenden Buchstaben a,b. Wir bezeichnen die $F_n(a,b)$ als nichtkommutative Fibonacci-Polynome.

Die Folge der Polynome $F_n(a,b)$ beginnt mit

$0,1,a,a^2+b,a^3+ab+ba,a^4+a^2b+aba+ba^2+b^2,a^5+a^3b+a^2ba+aba^2+ab^2+ba^3+bab+b^2a,\cdots$
Hier haben wir der leeren Menge 0 und der Menge, die nur aus dem leeren Wort besteht, das Element 1 zugeordnet,
Dann gilt sowohl

$$F_n(a,b)=aF_{n-1}(a,b)+bF_{n-2}(a,b) \tag{4.5}$$

als auch

$$F_n(a,b)=F_{n-1}(a,b)a+F_{n-2}(a,b)b. \tag{4.6}$$

Zusammen mit den Anfangswerten $F_0(a,b)=0$ und $F_1(a,b)=1$ sind dadurch die nicht-kommutativen Fibonacci-Polynome eindeutig festgelegt.
Sei $C_k^n(a,b)$ die Summe über alle Wörter, die genau k Buchstaben b und $n-k$ Buchstaben a haben. Dann gilt offenbar

$$F_n(a,b)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{n-1-k}(a,b). \tag{4.7}$$

Wenn wir auf die Polynome in a,b den Homomorphismus φ anwenden, der durch $\varphi(a)=x\eta,\varphi(b)=s\eta^2$ definiert ist, wobei $\eta(f(s))=f(qs)$ sei, dann gilt

$$\varphi(F_n(a,b))=F_n(x,s,q)\eta^{n-1}. \tag{4.8}$$

Denn das stimmt für $n=0,1$ und folgt aus (4.6) im allgemeinen Fall: Denn stimmt es für $n-2$ und $n-1$, dann ergibt sich
$\varphi(F_n(a,b))=F_{n-1}(x,s,q)\eta^{n-2}x\eta+F_{n-2}(x,s,q)\eta^{n-3}s\eta^2=\left(xF_{n-1}(x,s,q)+q^{n-3}sF_{n-2}(x,s,q)\right)\eta^{n-1}.$

Nun ist $\varphi(a)\varphi(b)=x\eta s\eta^2=xqs\eta\eta^2=q(s\eta^2)(x\eta)=q\varphi(b)\varphi(a)$.
Das bedeutet, dass $\varphi\left(C_k^n(a,b)\right)$ die Summe über alle Wörter in $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ mit genau k Buchstaben $\varphi(b)$ ist. Aus dem allgemeinen $q-$binomischen Lehrsatz ergibt sich daher, dass
$\varphi\left(C_k^n(a,b)\right)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\varphi(b)^k\varphi(a)^{n-k}=q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-k}\eta^{k+n}$ ist.

Daher folgt aus (4.7)

$$\varphi\left(F_n(a,b)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-k-1\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-1}\eta^{n-1}. \tag{4.9}$$

Wenn wir das auf das Polynom 1 anwenden, ergibt sich die explizite Formel

$$F_n(x,s,q)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{2\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-1-k\\k\end{bmatrix}s^kx^{n-2k-1}. \tag{4.10}$$

Im Fall $q=1$ spielt die Formel von Binet eine wichtige Rolle. Sie besagt, dass $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ist für $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Dahinter steckt die Idee, dass man Zahlen x sucht, deren Potenzen dieselbe Rekursion wie die Fibonacci-Zahlen erfüllen, d.h. $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ und dann die Fibonacci-Zahlen als Linearkombinationen darstellt. Dafür gibt es kein Analogon. Das nächstbeste besteht darin, $2\times 2-$Matrizen zu suchen, deren Potenzen diese Rekursion erfüllen. Das ist bei den Fibonacci-Zahlen die Matrix

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Denn sie erfüllt

$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I + C,$

wenn man mit I die Einheitsmatrix bezeichnet.

Außerdem ist $C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

Das lässt sich auf die nichtkommutativen Fibonacci-Polynome verallgemeinern. Wir betrachten dazu $2\times 2-$Matrizen mit Elementen aus $P(a,b)$, deren Multiplikation auf die übliche Weise definiert ist, wobei natürlich auf die Reihenfolge der Elemente zu achten ist. Sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Dann ist $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ ab & a^2+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aC + bI$

und daher auch

$$C^n = aC^{n-1} + bC^{n-2}. \tag{4.12}$$

Weiters gilt

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \\ F_n(a,b)b & F_{n+1}(a,b) \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Denn das gilt für $n=1$. Wenn es für $n-1$ gilt, dann folgt

$$C^n = C\cdot C^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-2}(a,b)b & F_{n-1}(a,b) \\ F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \\ bF_{n-2}(a,b)b + aF_{n-1}(a,b)b & bF_{n-1}(a,b) + aF_n(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \\ F_n(a,b)b & F_{n+1}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Unter der Annahme, dass das Element b ein inverses Element besitzt, betrachten wir die Menge $P(a,b,b^{-1})$ aller Polynome in $a,b,b^{-1},$ wobei natürlich $(b^{-1})^j = b^{-j}$ und $b^k b^j = b^{k+j}$ für beliebige ganze Zahlen k, j zu setzen ist.

Dann ist die Matrix C invertierbar und es gilt $C^{-1} = \begin{pmatrix} -b^{-1}a & b^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Aus $C^n = aC^{n-1} + bC^{n-2}$ für $n \geq 2$ ergibt sich durch Multiplikation von rechts mit C^{-k}, dass

$$C^n = aC^{n-1} + bC^{n-2}, n \in \mathbb{Z}, \tag{4.14}$$

gilt.

Dann definieren wir $F_n(a,b)$ für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \\ F_n(a,b)b & F_{n+1}(a,b) \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Es ist dann $F_{-1}(a,b) = b^{-1}, F_{-2}(a,b) = -b^{-1}ab^{-1}, \cdots$.

Daraus folgt natürlich auch, dass (4.5) oder (4.6) für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelten.

Wir können nun auch den Homomorphismus $\varphi : P(a,b) \to \mathbb{C}(q)[x,s]$ zu einem Homomorphismus $\varphi : P(a,b,b^{-1}) \to \mathbb{C}(q)[x,s,\frac{1}{s}]$ erweitern, indem wir

$\varphi(b^{-1}) = \eta^{-2}\frac{1}{s} = \frac{q^2}{s}\eta^{-2}$ setzen.

Die Formel

$$\varphi(F_n(a,b)) = F_n(x,s,q)\eta^{n-1} \tag{4.16}$$

gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Denn es gilt $F_{n-2}(a,b) = b^{-1}F_n(a,b) - b^{-1}aF_{n-1}(a,b).$ Für die rechte Seite gelte die Behauptung bereits. Dann ergibt sich alles aus $\varphi(F_{n-2}(a,b)) = \frac{q^2}{s}F_n(x,\frac{s}{q^2},q)\eta^{n-3} - \frac{q^2}{s}xF_{n-1}(x,\frac{s}{q},q)\eta^{n-3}.$

Wendet man auf (4.15) den Homomorphismus φ an, so geht das über in

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s\eta^2 & x\eta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}(x,s,q)\eta^{n-2}s\eta^2 & F_n(x,s,q)\eta^{n-1} \\ F_n(x,s,q)\eta^{n-1}s\eta^2 & F_{n+1}(x,s,q)\eta^n \end{pmatrix}.$

Wendet man das wieder auf die Einheitsmatrix an, so ergibt sich

$$A_n(x,s) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s\eta^2 & x\eta \end{pmatrix}^n I = \begin{pmatrix} q^{n-2}sF_{n-1}(x,s,q) & F_n(x,s,q) \\ q^{n-1}sF_n(x,s,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Diese Matrizen erfüllen

$$A_n(x,s) = xA_{n-1}(x,qs) + sA_{n-2}(x,q^2s) \tag{4.18}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}.$ Speziell ist $A_0(x,s) = I.$

Genauer gilt: Jede Folge von Matrizen, die diese Rekursion erfüllt, ist durch die Anfangswerte A_0, A_1 eindeutig festgelegt.

Wir betrachten nun die Matrizen

$$M_n(x,s)=\begin{pmatrix} q^{-1}sF_{n-1}(x,qs,q) & F_n(x,s,q) \\ q^{-1}sF_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.

Diese erfüllen $M_0(x,s)=I$, $M_1(x,s)=C(x,s)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s}{q} & x \end{pmatrix}$

und

$$M_n(x,s)=C(x,q^{n-1}s)C(x,q^{n-2}s)\cdots C(x,s)=\begin{pmatrix} \frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q) & F_n(x,s,q) \\ \frac{s}{q}F_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Denn das stimmt für $n=1$.
Wenn es für n bereits bewiesen ist, folgt die Behauptung aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^{n-1}s & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q) & F_n(x,s,q) \\ \frac{s}{q}F_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{s}{q}F_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \\ q^{n-2}s^2F_{n-1}(x,qs,q)+\frac{sx}{q}F_n(x,qs,q) & q^{n-1}sF_n(x,s,q)+xF_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}.$$

Aus (4.20) folgt sofort

$$M_{k+n}(x,s)=M_k(x,q^n s)M_n(x,s) \tag{4.21}$$

für $n,k \geq 0$.

Wenn man in (4.20) zu den Determinanten übergeht, erhält man

$$(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}-1}s^n=\det(C(x,q^{n-1}s)C(x,q^{n-2}s)\cdots C(x,s)=\det\begin{pmatrix} \frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q) & F_n(x,s,q) \\ \frac{s}{q}F_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}$$
$$=\frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q)F_{n+1}(x,s,q)-F_n(x,s,q)\frac{s}{q}F_n(x,qs,q).$$

Daraus folgt das $q-$Analogon der

Formel von Cassini

$$F_{n-1}(x,qs,q)F_{n+1}(x,s,q)-F_n(x,s,q)F_n(x,qs,q)=(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}} s^{n-1}. \qquad (4.22)$$

Diese kann verallgemeinert werden zum $q-$Analogon der

Formel von Cassini-Euler:

$$F_{n-1}(x,qs,q)F_{n+k}(x,s,q)-F_n(x,s,q)F_{n+k-1}(x,qs,q)=(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}} s^{n-1}F_k(x,q^n s,q). \qquad (4.23)$$

Das folgt sofort aus (4.21), wenn wir es in der Form $M_{k+n}(x,s)M_n(x,s)^{-1}=M_k(x,q^n s)$ schreiben. Denn

$$M_n(x,s)^{-1}=\frac{1}{\det M_n(x,s)}\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,s,q) & -F_n(x,s,q) \\ -\frac{s}{q}F_n(x,qs,q) & \frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q)\end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun das Element rechts oben in der Matrix $M_{k+n}(x,s)M_n(x,s)^{-1}=M_k(x,q^n s)$ betrachten, so sehen wir, dass gilt

$$\frac{s}{q}F_{n+k-1}(x,qs,q)\left(-F_n(x,s,q)\right)+F_{n+k}(x,s,q)(\frac{s}{q}F_{n-1}(x,qs,q))=(-1)^n q^{\binom{n-1}{2}-1} s^n F_k(x,q^n s,q).$$

Für die Fibonacci-Zahlen und Polynome sind eine Unmenge von Identitäten bekannt. Viele davon lassen sich auch auf die $q-$Analoga oder sogar auf die nicht-kommutativen Fibonacci-Polynome übertragen.

Ich möchte hier nur das Analogon der Formel $F_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{n-k}$ erwähnen.

Dazu bemerken wir, dass

$$C^{2n}=\sum_{k=0}^{n}C_k^n(a,b)C^{n-k} \qquad (4.24)$$

gilt.

Denn das gilt für $n=1$, wo es sich auf $C^2=aC+bI$ reduziert. Wenn es für n bereits bewiesen ist, dann folgt

$$C^{2n+2}=\sum_k C_k^n(a,b)C^{n-k}C^2=\sum_k C_k^n(a,b)C^2C^{n-k}=\sum_k C_k^n(a,b)\left(aC+bI\right)C^{n-k}$$
$$=\sum_k C_k^n(a,b)aC^{n-k+1}+\sum_k C_k^n(a,b)bC^{n-k}=\sum_k\left(C_k^n(a,b)a+C_{k-1}^n(a,b)b\right)C^{n-k+1}$$
$$=\sum_k C_k^{n+1}(a,b)C^{n-k+1}.$$

Aus $C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}(a,b)b & F_n(a,b) \\ F_n(a,b)b & F_{n+1}(a,b) \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$F_{2n}(a,b) = \sum_k C_k^n(a,b) F_{n-k}(a,b). \tag{4.25}$$

Wenden wir darauf den Homomorphismus φ an, so finden wir schließlich

$$F_{2n}(x,s,q) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k x^{n-k} F_{n-k}(x, q^{n+k} s). \tag{4.26}$$

Geht man analog von der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

aus, so erhält man

$$D^n = \begin{pmatrix} bF_{n-1}(a,b) & bF_n(a,b) \\ F_n(a,b) & F_{n+1}(a,b) \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

und

$$D^{2n} = \sum_{k=0}^{n} D^{n-k} C_k^n(a,b). \tag{4.29}$$

Daraus leiten wir die analoge Formel

$$F_{2n}(a,b) = \sum_k F_{n-k}(a,b) C_k^n(a,b) \tag{4.30}$$

ab, die schließlich nach Anwendung von φ zu

$$F_{2n}(x,s,q) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(n-2)} s^k x^{n-k} F_{n-k}(x,s,q) \tag{4.31}$$

führt.

Die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen ist

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-\frac{z^2}{1-z}} = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(1-z)^{k+1}}.$$

Nun wollen wir die erzeugende Funktion der $F_n(x,s,q)$ berechnen.

$$F(x,s,z) = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x,s,q) z^n = 1 + \sum_{n\geq 1} x F_n(x,qs,q) z^n + \sum_{n\geq 1} s F_{n-1}(x,q^2 s,q) z^n$$

$$= 1 + xzF(x,qs,z) + sz^2 F(x,q^2 s,z) = 1 + (xz\eta + sz^2\eta^2) F(x,s,z).$$

Daraus folgt

$$(1 - xz\eta - sz^2\eta^2) F(x,s,z) = 1$$

und daher nach der Formel für die geometrische Reihe

$$F(x,s,z) = \frac{1}{(1 - xz\eta - sz^2\eta^2)}(1) = \sum_{n\geq 0} \left(sz^2\eta^2 + xz\eta \right)^n (1).$$

Wegen $xz\eta \cdot sz^2\eta^2 = qsz^2\eta^2 \cdot xz\eta$ ist

$$\left(sz^2\eta^2 + xz\eta\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (sz^2\eta^2)^k (xz\eta)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k z^{n+k} x^{n-k} \eta^{n+k}.$$

Daher ist

$$F(x,s,z) = \sum_{m\geq 0} \left(sz^2\eta^2 + xz\eta\right)^m (1) = \sum_{m\geq 0} \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k z^{m+k} x^{m-k}$$

$$= \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k+m=n} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k x^{m-k} = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k\leq n} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k x^{n-2k}.$$

Koeffizientenvergleich liefert wieder, dass $F_{n+1}(x,s,q) = \sum_{k\leq n} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k x^{n-2k}$ ist.

Wenn wir $m = n + k$ setzen, können wir die obige Umformung auch so schreiben:

$$F(x,s,z) = \sum_{m\geq 0} \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{2\binom{k}{2}} s^k z^{m+k} x^{m-k} = \sum_{k\geq 0} q^{2\binom{k}{2}} s^k z^{2k} \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} z^n x^n$$

$$= \sum_{k\geq 0} q^{2\binom{k}{2}} s^k \frac{z^{2k}}{(1-xz)\cdots(1-q^k xz)}.$$

Wir erhalten also

$$F(x,s,z) = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x,s,q) z^n = \sum_{k\geq 0} q^{2\binom{k}{2}} s^k \frac{z^{2k}}{(1-xz)\cdots(1-q^k xz)}. \tag{4.32}$$

Es gibt noch eine weitere erzeugende Funktion der $F_n(x,s,q)$:

$$\hat{F}(x,s,z) = \sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x,s,q) q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}} z^{n+1} = z + \sum_{n\geq 1} xF_n(x,s,q) q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}} z^{n+1} + \sum_{n\geq 1} q^{n-2} sF_{n-1}(x,s,q) q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}} z^{n+1}$$

$$= z + xz\hat{F}(x,s,\frac{z}{\sqrt{q}}) + \frac{sz^2}{q\sqrt{q}} \hat{F}(x,s,z).$$

Daraus folgt

$$\hat{F}(x,s,z) = \frac{z}{1-\frac{sz^2}{q\sqrt{q}}} + \frac{xz}{1-\frac{sz^2}{q\sqrt{q}}} \hat{F}(x,s,\frac{z}{\sqrt{q}}).$$

Iteriert man das, so erhält man schließlich

$$\hat{F}(x,s,z)=\sum_{n\geq 0}F_{n+1}(x,s,q)q^{-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}}z^{n+1}=\sum_{i\geq 0}\frac{x^i z^{i+1}q^{-\frac{1}{2}\binom{i+1}{2}}}{\left(1-\frac{sz^2}{q\sqrt{q}}\right)\left(1-\frac{sz^2}{q^2\sqrt{q}}\right)\cdots\left(1-\frac{sz^2}{q^{i+1}\sqrt{q}}\right)}. \tag{4.33}$$

Die Fibonacci-Zahlen treten auch bei der Berechnung des Kettenbruchs $\alpha=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$ auf.

Dieser erfüllt $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ und daher $\alpha^2-\alpha-1=0$. Die positive Wurzel dieser Gleichung ist $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, die Zahl des goldenen Schnitts.

α ist der Grenzwert der Folge $1,1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2},\cdots$ .Der allgemeine Term ist $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Ein $q-$Analogon dieses Kettenbruchs ist der Kettenbruch von Rogers-Ramanujan

$$\alpha(q)=1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\cdots}}}.$$

Wenn wir statt $x_0+\cfrac{y_1}{x_1+\cfrac{y_2}{x_2+\cdots}}=x_0+\frac{y_1}{x_1+}\frac{y_2}{x_2+}\cdots$ schreiben, dann ist

$$1+\frac{q}{1+}\frac{q^2}{1+}\cdots\frac{q^{n-1}}{1}=\frac{F_{n+1}(1,q,q)}{F_n(1,q^2,q)}.$$

Denn betrachten wir allgemeiner $K_n(s)=1+\frac{s}{1+}\frac{qs}{1+}\cdots\frac{q^{n-2}s}{1}$. Dann ist

$K_1(s)=1, K_2(s)=1+s=\frac{1+s}{1}=\frac{F_3(1,s,q)}{F_2(1,qs,q)}$. Wenn $K_n(s)=\frac{F_{n+1}(1,s,q)}{F_n(1,qs,q)}$ bereits gezeigt ist,

dann ergibt sich aus $K_{n+1}(s)=1+\frac{s}{K_n(qs)}$, dass

$$K_{n+1}(s)=1+\frac{sF_n(1,q^2s,q)}{F_{n+1}(1,qs,q)}=\frac{F_{n+1}(1,qs,q)+sF_n(1,q^2s,q)}{F_{n+1}(1,qs,q)}=\frac{F_{n+2}(1,s,q)}{F_{n+1}(1,qs,q)}$$ gilt.

Für $s=q$ ergibt sich die obige Behauptung.

Für die Fibonacci-Zahlen gilt die merkwürdige Formel

$$F_{n+1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+5k}{2} \right\rfloor}. \tag{4.34}$$

Zum Beispiel ist

$$F_5 = \cdots - \binom{4}{\left\lfloor \frac{4-5}{2} \right\rfloor} + \binom{4}{\left\lfloor \frac{4+0}{2} \right\rfloor} - \binom{4}{\left\lfloor \frac{4+5}{2} \right\rfloor} + \binom{4}{\left\lfloor \frac{4+10}{2} \right\rfloor} - + \cdots = \binom{4}{2} - \binom{4}{4} = 6-1=5$$

oder

$$F_7 = \cdots - \binom{6}{\left\lfloor \frac{6-5}{2} \right\rfloor} + \binom{6}{\left\lfloor \frac{6-0}{2} \right\rfloor} - \binom{6}{\left\lfloor \frac{6+5}{2} \right\rfloor} + \cdots = -\binom{6}{0} + \binom{6}{3} - \binom{6}{5} = -1+20-6=13.$$

Um das zu beweisen, sei $t(n,k) = (-1)^k \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor}$.

Dann gilt $t(n,k) = -t(n-1,k-1) - t(n-1,k+1)$ und $t(0,0)=1, t(0,1)=-1$ und für alle anderen Werte $k\in\mathbb{Z}$ gilt $t(0,k)=0$. Denn es ist

$$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor} = \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor} + \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor - 1} = \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n-1+k+1}{2} \right\rfloor} + \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{n-1+k-1}{2} \right\rfloor},$$

d.h.

$$t(n,k) = (-1)^k \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor} = -(-1)^{k+1} \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{(n-1)+(k+1)}{2} \right\rfloor} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{\left\lfloor \frac{(n-1)+(k-1)}{2} \right\rfloor}$$
$$= -t(n-1,k+1) - t(n-1,k+1).$$

Wir betrachten nun die Tabelle

k	–3	–2	–1	0	1	2	3
$t(0,k)$	0	0	0	1	–1	0	0
$t(1,k)$	0	0	–1	1	–1	1	0
$t(2,k)$	0	1	–1	2	–2	1	–1

Dann gilt

$$t(2,k) - t(1,k) - t(0,k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k=-2 \\ -1 & \text{für } k=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $T(n,k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t(n,k-5j)$. Dann ist $T(2,k) - T(1,k) - T(0,k) = 0$ für alle $k\in\mathbb{Z}$.

Außerdem ist
$T(n+1,k)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} t(n+1,k-5j)=-\sum_{j\in\mathbb{Z}} t(n,k-1-5j)-\sum_{j\in\mathbb{Z}} t(n,k+1-5j)=-T(n,k-1)-T(n,k+1).$
Daher ist $T(n+2,k)-T(n+1,k)-T(n,k)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $k\in\mathbb{Z}.$
Nun ist

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} t(n,k-5j)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-5j}\binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k-5j}{2}\right\rfloor}=(-1)^k\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j\binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k-5j}{2}\right\rfloor}.$$

Daher erfüllt $a(n,k)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j\binom{n}{\left\lfloor \frac{n+k-5j}{2}\right\rfloor}$ die Rekursion
$a(n+2,k)-a(n+1,k)-a(n,k)=0$ für alle k.

Da die Fibonaccizahlen F_n dieselbe Rekurrenz mit den Anfangswerten $F_0=0$ und $F_1=1$ erfüllen, erhalten wir die folgenden Resultate:
Für $k\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,10)$ sind die Anfangsbedingungen $a(0,k)=a(1,k)=1$ und daher gilt $a(n,k)=F_{n+1}.$
Für $k\equiv 2,9(\mathrm{mod}\,10)$ haben wir $a(0,k)=0, a(1,k)=1$ und daher $a(n,5,k)=F_n.$
Für $k\equiv 3,8(\mathrm{mod}\,10)$ ist $a(0,k)=a(1,k)=0$ und daher $a(n,k)=0.$ Überdies gilt allgemein $a(n,k+5)=-a(n,k).$

Diese Formel hat ein schönes $q-$Analogon, die von I. Schur gefundene

Polynomversion der 1. Identität von Rogers-Ramanujan

$$F_{n+1}(1,q,q)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{\frac{k(5k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n+5k}{2}\right\rfloor\end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

Um diese Formel zu beweisen, bezeichnen wir die rechte Seite mit $a(n)$. Dann müssen wir zeigen, dass $a(n)=a(n-1)+q^{n-1}a(n-2)$ gilt. Denn die Anfangswerte $a(0)=a(1)=1$ sind klar.

Wir zeigen zuerst $a(2n)=a(2n-1)+q^{2n-1}a(2n-2).$

Nun ist

$$a(2n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{2k(10k-1)}{2}}\left[\begin{matrix}2n\\ \left\lfloor\frac{2n+10k}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]-\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(2k+1)(10k+4)}{2}}\left[\begin{matrix}2n\\ \left\lfloor\frac{2n+10k+5}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(q^{k(10k-1)}\begin{bmatrix}2n\\ n+5k\end{bmatrix}-q^{(2k+1)(5k+2)}\begin{bmatrix}2n\\ n+5k+2\end{bmatrix}\right)$$

und

$$a(2n-1)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{2k(10k-1)}{2}}\left[\begin{matrix}2n-1\\ \left\lfloor\frac{2n+10k-1}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]-\sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(2k+1)(10k+4)}{2}}\left[\begin{matrix}2n-1\\ \left\lfloor\frac{2n+10k+4}{2}\right\rfloor\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(q^{k(10k-1)}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{(2k+1)(5k+2)}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k+2\end{bmatrix}\right).$$

Wir müssen daher zeigen, dass

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(q^{k(10k-1)}\begin{bmatrix}2n\\ n+5k\end{bmatrix}-q^{(2k+1)(5k+2)}\begin{bmatrix}2n\\ n+5k+2\end{bmatrix}\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(q^{k(10k-1)}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{(2k+1)(5k+2)}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k+2\end{bmatrix}\right)$$
$$+q^{2n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(q^{k(10k-1)}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{(2k+1)(5k+2)}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k+1\end{bmatrix}\right)$$

gilt.

Es genügt, wenn wir zeigen, dass die allgemeinen Terme übereinstimmen:

$$\begin{bmatrix}2n\\ n+5k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k-1\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}2n\\ n+5k+2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k+2\end{bmatrix}\right)q^{10k+2}=q^{2n-1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{10k+2n+1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k+1\end{bmatrix}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$q^{n+5k}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k\end{bmatrix}-q^{n-5k-2}\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k+1\end{bmatrix}q^{10k+2}=q^{2n-1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{10k+2n+1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k+1\end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-1\\ n+5k+1\end{bmatrix}=q^{n-5k-1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k-1\end{bmatrix}-q^{n+5k+1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k+1\end{bmatrix}.$$

Das ist aber klar, weil die linke Seite

$$\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k\end{bmatrix}+q^{n-5k-1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k\end{bmatrix}-q^{n+5k+1}\begin{bmatrix}2n-2\\ n+5k+1\end{bmatrix}$$

ist.

Für $a(2n+1)$ muss gelten $a(2n+1)=a(2n)+q^{2n}a(2n-1)$.

In diesem Fall muss gezeigt werden, dass

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+5k-2 \end{bmatrix} q^{(2k-1)(5k-3)} - \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+5k \end{bmatrix} q^{k(10k-1)} = \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k-3 \end{bmatrix} q^{(2k-1)(5k-3)} - \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k \end{bmatrix} q^{k(10k-1)}$$
$$+q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-3 \end{bmatrix} q^{(2k-1)5k-3)} - q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-1 \end{bmatrix} q^{k(10k-1)}$$

gilt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+5k-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k-3 \end{bmatrix} - q^{10k-3} \left(\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n+5k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k \end{bmatrix} \right)$$
$$= q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-3 \end{bmatrix} - q^{2n+10k-3} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-1 \end{bmatrix}.$$

Und das bedeutet wieder

$$q^{n+5k-2} \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k-2 \end{bmatrix} - q^{10k-3+n-5k+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n+5k-1 \end{bmatrix}$$
$$= q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-3 \end{bmatrix} - q^{2n+10k-3} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-1 \end{bmatrix}$$

oder

$$q^{n+5k-2} \left(\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-2 \end{bmatrix} + q^{n-5k+2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-3 \end{bmatrix} \right) - q^{10k-3+n-5k+1} \left(\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-2 \end{bmatrix} + q^{n+5k-1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-1 \end{bmatrix} \right)$$
$$-q^{2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-3 \end{bmatrix} + q^{2n+10k-3} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+5k-1 \end{bmatrix} = 0.$$

Damit ist (4.35) und natürlich gleichzeitig auch (4.34) bewiesen.

Wenn wir in (4.35) $n \to \infty$ gehen lassen, erhalten wir die

Erste Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2}}{(1 \dot{-} q)^k} = \frac{1}{(1 \dot{-} q)^\infty} \sum_k (-1)^k q^{\frac{k(5k-1)}{2}}. \tag{4.36}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir die ebenfalls von I. Schur erstmals bewiesene

Polynomversion der zweiten Identität von Rogers-Ramanujan

$$F_n(1, q^2, q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{k(5k-3)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n+5k-1}{2} \right\rfloor \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Im Limes für $n \to \infty$ ergibt das die

Zweite Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(1 \div q)^k} = \frac{1}{(1 \div q)^{\infty}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{k(5k-3)}{2}}. \tag{4.38}$$

Bemerkung

Die rechte Seite der Identitäten von Rogers-Ramanujan kann als unendliches Produkt geschrieben werden, wie wir später mit Hilfe des Tripelproduktsatzes von Jacobi sehen werden. Diese Identitäten spielen eine große Rolle in der Theorie der Partitionen natürlicher Zahlen. Die hier gegebene Ableitung ist eine reine Verifikation und lässt nicht verstehen, was eigentlich dahinter steckt. Die von Schur gefundenen Polynomversionen haben eine konkrete kombinatorische Interpretation als Gewicht von gewissen beschränkten Gitterpunktwegen. Dabei ergibt sich die rechte Seite auf natürliche Weise aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion. Wer sich näher dafür interessiert, findet eine elementare Darstellung in meiner Arbeit „Fibonacci-Zahlen, Gitterpunktwege und die Identitäten von Rogers-Ramanujan", die von meiner Homepage heruntergeladen werden kann.
Wir werden im 7. Kapitel einen einfacheren Beweis der Identitäten von Rogers-Ramanujan geben, der auf einer anderen Polynomversion beruht.