3. q-Stirlingzahlen

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe von Inversionen und dem Major Index ein $q-$Analogon der Stirlingzahlen definiert. Es wird gezeigt, dass diese $q-$Stirlingzahlen auch in natürlicher Weise beim Vergleich der Operatoren $(xD)^n$ und x^nD^n auftreten. Außerdem werden $q-$Analoga der fallenden Faktoriellen und des Differenzenoperators angegeben und einige wichtige Resultate über Stirlingzahlen auf ihre $q-$Analoga übertragen.

Wir haben bereits gesehen, dass für die Menge $W_{n,k}$ aller Wörter aus den Buchstaben 0 und 1 der Länge n mit genau k Elementen 1 gilt

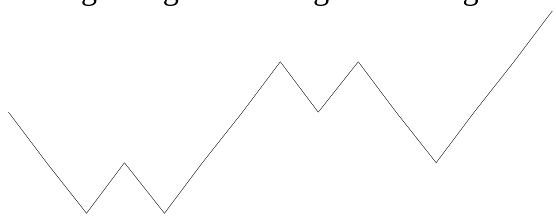
$$\sum_{w\in W_{n,k}} q^{inv(w)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

MacMahon hat gesehen, dass dasselbe gilt, wenn man die Anzahl der Inversionen durch den sogenannten Major Index $maj(w)$ ersetzt. Dieser ist folgendermaßen definiert: Sei $w = a_1a_2\cdots a_n$. Dann versteht man unter der Abstiegsmenge die Menge $D(w) = \{i : a_i > a_{i+1}\}$, also die Menge der i, wo $a_i = 1, a_{i+1} = 0$ ist, und definiert $maj(w) = \sum_{i\in D(w)} i.$

Ordnet man einem Wort aus $W_{n,k}$ einen Gitterweg von $(0,0)$ nach $(n, 2k-n)$ zu, indem man jedem 1 einen Aufstieg $(1,1)$ und jedem 0 einen Abstieg $(1,-1)$ zuordnet, dann besteht die Abstiegsmenge aus allen „Gipfeln /\" dieses Weges.

Sei z.B. $w = 00101110100111 \in W_{14,8}$. Hier ist $D(w) = \{3,7,9\}$ und $maj(w) = 3+7+9 = 19.$

Der zugehörige Gitterweg schaut folgendermaßen aus:



MacMahon hat nun gezeigt, dass

Satz 3.1

$$f(n,k) = \sum_{w\in W_{n,k}} q^{maj(w)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

gilt.

Zum Beweis zeigen wir, dass bei festem n

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k) + (q^{n-1}-1) f(n-2,k-1) \tag{3.3}$$

für alle k gilt.

Für $f(1,k)$ gilt $f(1,0) = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(1,1) = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $f(1,k) = 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$ sonst.

Für $f(2,k)$ gilt analog $f(2,0) = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(2,1) = 1+q = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(2,2) = 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $f(2,k) = 0 = \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}$ sonst.

Um (3.3) zu zeigen, schauen wir, wie das Wort endet. Wenn es auf 10 endet, ist $n-1 \in D(w)$ und daher $maj(w) = n-1+maj(v)$ mit $v \in W_{n-2,k-1}$. Endet es auf 11 oder 01, so ist $maj(w) = maj(v)$ mit $v \in W_{n-1,k-1}$. Wenn es schließlich mit 00 endet, dann ist $w = v0$ mit $v \in W_{n-1,k} \setminus W_{n-2,k-1}$.

Daraus folgt sofort (3.3), wenn wir $f(0,k)$, das noch nicht definiert ist, geeignet wählen. Es zeigt sich, dass wir $f(0,k) = [k=0] = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ setzen müssen, damit die Rekurrenz auch für $n = 2$ stimmt.

Nun ist klar, dass $f(n,k)$ durch (3.3) eindeutig festgelegt ist. Wenn wir zeigen können, dass $f(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ebenfalls diese Rekurrenz erfüllt, ist (3.2) bewiesen.

Das folgt jedoch sofort aus

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (q^{n-1}-1)\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (q^k-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Man nennt $inv(w)$ und $maj(w)$ eine Statistik auf den Wörtern w.

Nun wollen wir etwas Ähnliches für Partitionen von Mengen machen.
Eine Partition π der Menge $\{1,2,\cdots n\}$ ist eine Zerlegung in nichtleere Teilmengen, sogenannte Blöcke, $B_1,\cdots,B_k$. Sei $\underline{S}(n,k)$ die Menge aller Partitionen in k Blöcke. Wir schreiben π in der folgenden kanonischen Form: $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k$, wobei die Blöcke nach wachsendem kleinstem Element geordnet sind: $\min B_1 < \min B_2 < \cdots < \min B_k$.
Die Anzahlen $S(n,k) = |\underline{S}(n,k)|$ der Partitionen in k Blöcke werden Stirlingzahlen der zweiten Art genannt.
Wir suchen nun q – Analoga der Stirlingzahlen. Dazu wollen wir die beiden obigen Statistiken auf diesen Fall übertragen.

Wir definieren zunächst $inv(\pi)$.

Definition
Eine Inversion von $\pi = B_1 / B_2 / \cdots / B_k$ ist ein Paar (b, B_j), wobei $b \in B_i, i < j$, und $b > \min B_j$ ist. Die Anzahl aller Inversionen wird mit $inv(\pi)$ bezeichnet.

Die Partition $\pi = 138/2/467/59 = B_1 / B_2 / B_3 / B_4$
hat die Inversionen $(3, B_2), (8, B_2), (8, B_3), (8, B_4), (6, B_4), (7, B_4)$, daher ist $inv(\pi) = 6$.

Wir ordnen nun jeder Partition π das Gewicht $q^{inv(\pi)}$ zu und definieren die $q-$Stirlingzahl der zweiten Art $S[n,k]$ als das Gesamtgewicht aller Partitionen mit k Blöcken:
Definition
Die $q-$Stirlingzahl der zweiten Art ist definiert durch
$$S[n,k] = \sum_{\pi \in \underline{S}(n,k)} q^{inv(\pi)}. \tag{3.4}$$

Dann gilt
$$S[n,k] = S\left[n-1, k-1\right] + \left[k\right] S\left[n-1, k\right]. \tag{3.5}$$

Denn wir können zwei Fälle unterscheiden:

1) $/n$ ist ein Block und daher der letzte. Das Gesamtgewicht aller derartigen Partitionen ist offenbar $S\left[n-1, k-1\right]$.
2) Das Element n liegt in einem der k Blöcke. Wenn es im ersten liegt, dann hat es mit jedem der $k-1$ folgenden Blöcke eine Inversion, wenn es im zweiten liegt, dann mit den $k-2$ folgenden Blöcken, usw. Also ist das Gesamtgewicht aller Partitionen, die aus einer gegebenen Partition π_0 durch Einfügen von n in einen der vorhandenen Blöcke entstehen, gerade $(1 + q + \cdots q^{k-1})$ mal dem Gewicht von π_0. Wenn man über alle π_0 summiert, ergibt sich $\left[k\right] S[n-1, k]$.

Für die Matrix $\left(S\left[n,k\right]\right)_{n,k \geq 0}$ ergibt sich
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2+q & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3+3q+q^2 & 3+2q+q^2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dabei ist $S\left[0, k\right]$ so gewählt, dass die Rekursion (3.5) auch für $n = 1$ richtig bleibt.
Als Spezialfälle ergeben sich die Werte $S[n,1] = S[n,n] = 1$ für $n \geq 1$ und $S[n, n-1] = n - 1 + (n-2)q + (n-3)q^2 + \cdots + q^{n-2}$.

Als nächstes wollen wir den Major Index auf diesen Fall übertragen. Sei d_i die Anzahl der Elemente $b \in B_i$ mit $b > \min B_{i+1}$. Die Abstiegsmultimenge $D(\pi)$ ist $D(\pi) = \left\langle 1^{d_1}, 2^{d_2}, \cdots (k-1)^{d_{k-1}} \right\rangle$, wobei i^{d_i} bedeutet, dass i d_i −mal wiederholt wird. Der Major Index ist dann die Summe der Abstiege

$$maj(\pi) = \sum_{i \in D(\pi)} i = 1d_1 + 2d_2 + \cdots + (k-1)d_{k-1}. \tag{3.6}$$

Zum Beispiel ist für $\pi = 138/2/467/59$ die Abstiegsmultimenge $\langle 1,1,3,3 \rangle = \left\langle 1^2, 3^2 \right\rangle$ und $maj(\pi) = 1+1+3+3 = 8.$

Dann gilt

Satz 3.2

$$\sum_{\pi \in \underline{S}(n,k)} q^{maj(\pi)} = S[n,k]. \tag{3.7}$$

Beweis
Da die Summe auf der linken Seite dieselben Randwerte wie $S[n,k]$ besitzt, brauchen wir nur zu zeigen, dass auch dieselbe Rekursion erfüllt ist.
Sei also π_0 eine Partition von $\{1, \cdots, n-1\}$. Man fügt wieder n hinzu.
Wenn $/n$ einen Block für sich bildet, kommen keine neuen Abstiege dazu und es gilt $maj(\pi) = maj(\pi_0)$.
Sei nun n im Block B_i von π_0 enthalten. Dann ist

$$maj(\pi) = \begin{cases} maj(\pi_0) + i, & \text{wenn } 1 \le \text{i<k} \\ maj(\pi_0), & \text{wenn i=k} \end{cases}$$

Daher ergibt sich

$$\sum_{\pi \in \underline{S}(n,k)} q^{maj(\pi)} = \sum_{\pi_0 \in \underline{S}(n-1,k-1)} q^{maj(\pi_0)} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\pi_0 \in \underline{S}(n-1,k)} q^{maj(\pi_0)+i},$$

woraus alles folgt.

Aus der Vorlesung „Diskrete Mathematik“ ist bekannt, dass die Stirlingzahlen der zweiten Art durch die Polynomidentität $\sum_n S(n,k)(x)_k = x^n$ eindeutig festgelegt sind. Hier ist $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Um ein $q-$Analogon dieser Identität zu erhalten, beachten wir, dass einerseits $(xD_1)(x^m) = mx^m$ und daher $(xD_1)^n x^m = m^n x^m$ ist und dass andererseits $x^k D_1^k x^m = (m)_k x^m$ gilt. Daraus folgt, dass die Stirlingzahlen auch durch die Operatoridentität $\sum_k S(n,k) x^k D_1^k = (xD_1)^n$ charakterisiert sind, welche eine gewisse Aussage über die Kommutierungseigenschaften des Multiplikationsoperators und des Differentiationsoperators machen.

Wir suchen nun eine analoge Formel für den $q-$Differentiationsoperator.
Man sieht sofort, dass

$$(xD)^n = \sum_{k=0}^{n} S[n,k] q^{\binom{k}{2}} x^k D^k \tag{3.8}$$

gilt.
Denn das stimmt für $n=0$ und ergibt sich mit Induktion aus

$$\sum_k S[n+1,k] q^{\binom{k}{2}} x^k D^k = xD(xD)^n = \sum_k S[n,k] q^{\binom{k}{2}} xDx^k D^k = \sum_k S[n,k] q^{\binom{k}{2}} x(q^k x^k D + [k] x^{k-1}) D^k$$

$$= \sum_k S[n,k] q^{\binom{k+1}{2}} x^{k+1} D^{k+1} + \sum_k [k] S[n,k] q^{\binom{k}{2}} x^k D^k = \sum_k (S[n,k-1] + [k] S[n,k]) q^{\binom{k}{2}} x^k D^k.$$

Für $q=1$ werden die Stirlingzahlen $s(n,k)$ der ersten Art durch $(x)_n = \sum_k s(n,k) x^k$ definiert.

Diese Identität schreibt sich in Operatorform $x^n D_1^n = \sum_k s(n,k)(xD_1)^k$.

Definition
Unter den $q-$Stirlingzahlen $s[n,k]$ der ersten Art verstehen wir die eindeutig bestimmten Koeffizienten in der Entwicklung

$$q^{\binom{n}{2}} x^n D^n = \sum_k s[n,k](xD)^k. \tag{3.9}$$

Dann ist

$$\sum_k s[n+1,k](xD)^k = q^{\binom{n+1}{2}} x^{n+1} D^{n+1} = q^n q^{\binom{n}{2}} x^n x D^{n+1} = q^{\binom{n}{2}} x^n \left(q^n x D^n\right) D$$

$$= q^{\binom{n}{2}} x^n \left(D^n x - [n] D^{n-1}\right) D = q^{\binom{n}{2}} x^n D^n (xD) - [n] q^{\binom{n}{2}} x^n D^n = \sum_k s[n,k](xD)^{k+1} - [n] \sum_k s[n,k](xD)^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$s[n+1,k] = s[n,k-1] - [n] s[n,k]. \tag{3.10}$$

Durch diese Rekursion und $s[0,k] = [k=0]$, sowie $s[n,k]=0$ für $k<0$ sind die $s[n,k]$ eindeutig festgelegt.
Für die Matrix $\left(s[n,k]\right)_{n,k\geq 0}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1+q & -(2+q) & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -(1+q+q^2) & 3+4q+3q^2+q^3 & -(3+2q+q^2) & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Es ist klar, dass die Matrizen der beiden Arten von $q-$ Stirlingzahlen invers zueinander sind.

$$\sum_j S[n,j]s[j,k]=[n=k]. \tag{3.11}$$

Als Spezialfälle ergeben sich $s[n,1]=(-1)^{n-1}[n-1]!$ für $n\geq 1$, $s[n,n]=1$ und $s[n,n-1]=-S[n,n-1]$.

Als nächstes wollen wir schauen, was sich als Analogon von $(x)_n$ ergibt.
Man rechnet leicht nach, dass

$$q^{\binom{n}{2}}x^n D^n(x^m)=q^{\binom{n}{2}}[m][m-1]\cdots[m-n+1]x^m=[m]([m]-[1])\cdots([m]-[n-1])x^m$$

gilt.
Daher definieren wir

$$\langle x\rangle_n = x(x-[1])(x-[2])\cdots(x-[n-1]). \tag{3.12}$$

Satz 3.3
Die $q-$Stirlingzahlen sind durch die Gleichungen

$$\sum_k S[n,k]\langle x\rangle_k = x^n \tag{3.13}$$

und

$$\sum_k s[n,k]x^k = \langle x\rangle_n \tag{3.14}$$

eindeutig festgelegt.

Wir wollen zunächst die Polynome $\langle x\rangle_n$ näher studieren. Wir betrachten dazu die lineare Abbildung $W:\mathbb{C}(q)[x]\to\mathbb{C}(q)[x]$, die durch

$$W(x^n)=(1+(q-1)x)^n \tag{3.15}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ definiert ist.
Es ist klar, dass W Produkte wieder in Produkte überführt, also $W(f(x)g(x))=W(f(x))W(g(x))$ erfüllt.
Daraus folgt, dass der Multiplikationsoperator x in den Multiplikationsoperator $(1+(q-1)x)$ übergeht,

$$WxW^{-1}=1+(q-1)x. \tag{3.16}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$W(x-1)W^{-1}=(q-1)x. \tag{3.17}$$

Außerdem ist

$$WD_1W^{-1}=\frac{D_1}{(q-1)}. \tag{3.18}$$

Denn $WD_1x^n=n(1+(q-1))^{n-1}$ und $D_1Wx^n=D_1(1+(q-1)x)^n=(q-1)n(1+(q-1)x)^{n-1}$.

Wir zeigen zuerst, dass

$$\langle x\rangle_n = W\left(\frac{(x\mathbin{\underset{\cdot}{-}}1)^n}{(q-1)^n}\right) \tag{3.19}$$

gilt.

Denn aus $W\left(\frac{x-q^k}{q-1}\right)=\frac{W(x)-q^k}{q-1}=\frac{(q-1)x+1-q^k}{q-1}=x-[k]$ ergibt sich

$W\left(\frac{(x\div 1)^n}{(q-1)^n}\right)=\prod_{k=1}^{n}(x-[k])=\langle x\rangle_n$.

Jeder lineare Operator A auf $\mathbb{C}(q)[x]$ geht durch W in einen linearen Operator WAW^{-1} über. Speziell erfüllt $W(q-1)DW^{-1}\langle x\rangle_n=(q-1)WD\frac{(x\div 1)^n}{(q-1)^n}=[n]W\frac{(x\div 1)^{n-1}}{(q-1)^{n-1}}=[n]\langle x\rangle_{n-1}$.

Daher ist $W(q-1)DW^{-1}$ ein $q-$Analogon des Differenzenoperators Δ_1, der durch $\Delta_1 f(x)=f(x+1)-f(x)$ definiert ist. Denn

$\Delta_1(x)_n=(x+1)x\cdots(x-n+2)-x(x-1)\cdots(x-n+1)=\big(x+1-(x-n+1)\big)(x)_{n-1}=n(x)_{n-1}.$

Wir definieren daher den $q-$Differenzenoperator Δ durch

$$\Delta=W(q-1)DW^{-1}. \tag{3.20}$$

Dieser ist charakterisiert durch

$$\Delta\left((1+(q-1)x)^n\right)=(q^n-1)(1+(q-1)x)^{n-1} \tag{3.21}$$

und auch durch

$$\Delta\langle x\rangle_n=[n]\langle x\rangle_{n-1},n\in\mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Nun ist

$$W\varepsilon W^{-1}=E, \tag{3.23}$$

wobei

$$E(p(x))=p(qx+1) \tag{3.24}$$

ist.

Denn

$W^{-1}EW(x^n)=W^1E\left((1+(q-1)x)^n\right)=W^{-1}\left((1+(q-1)(1+qx))^n\right)=q^nW^{-1}\left((1+(q-1)x)^n\right)=\varepsilon(x^n).$

Daher ist $\Delta=W(q-1)DW^{-1}=W\frac{1}{x}(\varepsilon-1)W^{-1}=W\frac{1}{x}W^{-1}W(\varepsilon-1)W^{-1}=\frac{1}{1+(q-1)x}(E-1)$.

Satz 3.4

Der $q-$Differenzenoperator erfüllt

$$\Delta f(x)=\frac{f(qx+1)-f(x)}{1+(q-1)x}. \tag{3.25}$$

In der Entwicklung $(1+(q-1)x)^n=\sum_k a_k\langle x\rangle_k$ ergibt sich wegen (3.22) und $L\left(\langle x\rangle_k\right)=[k=0]$, dass $[k]!a_k=L\Delta^k\left((1+(q-1)x)^n\right)=(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)$, also $a_k=(q-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ ist.

Wir erhalten daher

$$\sum_k \binom{n}{k}(q-1)^k x^k = (1+(q-1)x)^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(q-1)^k \langle x\rangle_k . \tag{3.26}$$

Diese nützliche Formel ergibt sich übrigens auch sofort aus $x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(x \dot{-} 1)^k$, wenn man darauf W anwendet.

(3.26) ist auch äquivalent mit der Formel

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\langle x\rangle_n (q-1)^n t^n}{[n]!} = \frac{e((1+(q-1)x)t)}{e(t)}. \tag{3.27}$$

Diese ergibt sich auch aus $W\sum_{n\geq 0} \frac{(x \dot{-} 1)^n t^n}{[n]!} = W\frac{e(xt)}{e(t)}$.

Man kann alle betrachteten linearen Operatoren auf $\mathbb{C}(q)[x]$ auch durch einfache formale Potenzreihen, die den Differentiationsoperators D_1 enthalten, darstellen.
Der Operator ε hat die Gestalt

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((q-1)x)^k}{k!} D_1^k . \tag{3.28}$$

Denn wendet man die rechte Seite auf x^n an, so ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((q-1)x)^k}{k!} D_1^k x^n = \sum_k \binom{n}{k}((q-1)x)^k x^{n-k} = (x+(q-1)x)^n = q^n x^n = \varepsilon x^n .$$

Aus (3.28) ergibt sich, dass der $q-$Verschiebungsoperator $E\left(f(x)\right) = f(qx+1)$ die Darstellung

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(q-1)x)^n}{n!} D_1^n \tag{3.29}$$

besitzt.

Denn $E = W\varepsilon W^{-1} = W\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((q-1)x)^k}{k!} W^{-1}WD_1^k W^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+(q-1)x)^k}{k!} D_1^k .$

Eine andere Darstellung ist

$$E = \varepsilon e^{D_1} . \tag{3.30}$$

Denn $(qx+1)^n = \varepsilon\left((x+1)^n\right) = \varepsilon e^{D_1}(x^n)$. Wegen $D_1\varepsilon = q\varepsilon D_1$ ist $E^k = \varepsilon^k e^{[k]D_1}$, also $E^k(f(x)) = f(q^k x + [k])$.

Ebenso folgt, dass

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^{k-1} x^{k-1}}{k!} D_1^k \tag{3.31}$$

gilt.

Daraus ergibt sich

$$\Delta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(q-1)x)^{k-1}}{k!}D_1^k. \tag{3.32}$$

Das folgt auch, wenn man diese Formel auf $(1+(q-1)x)^n$ anwendet. Denn die linke Seite ergibt $(q^n-1)(1+(q-1)x)^{n-1}$ wegen (3.21). Für die rechte Seite ergibt sich ebenfalls
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(q-1)x)^{k-1}}{k!}D_1^k\left((1+(q-1)x)^n\right)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(q-1)^k(1+(q-1)x)^{n-1}=(q^n-1)(1+(q-1)x)^{n-1}.$
Speziell ist
$\Delta(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(1+(q-1)x)^{k-1}\binom{n}{k}x^{n-k}.$
Wendet man $(\varepsilon \div 1)^n$ auf x^m an, so ergibt sich
$(\varepsilon \div 1)^n(x^m)=(q^m-1)(q^m-q)\ldots(q^m-q^{n-1})x^m=q^{\binom{n}{2}}(q-1)^n x^n D^n(x^m).$ Das ergibt die Formel

$$q^{\binom{n}{2}}(q-1)^n x^n D^n=(\varepsilon \div 1)^n, \tag{3.33}$$

aus welcher sofort

$$q^{\binom{n}{2}}(1+(q-1)x)^n\Delta^n=(E\div 1)^n \tag{3.34}$$

folgt.
Das kann auch in der Form

$$\Delta^n=\frac{q^{-\binom{n}{2}}}{(1+(q-1)x)^n}\prod_{k=0}^{n-1}(E-q^k) \tag{3.35}$$

geschrieben werden.

Daraus können wir nun eine explizite Formel für die $q-$Stirlingzahlen der zweiten Art ableiten:

Aus (3.13) ergibt sich

$$S[n,k]=L\frac{\Delta^k}{[k]!}(x^n)=L\frac{1}{[k]!}\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{(1+(q-1)x)^k}(E\div 1)^k(x^n)=\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\ j\end{bmatrix}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}LE^{k-j}(x^n).$$

Nun ist $E^k(x^n)=(q^k x+[k])^n,$ wie man sofort nachrechnet. Daher erhalten wir schließlich

Satz 3.5
Eine explizite Darstellung der $q-$Stirlingzahlen der zweiten Art ist gegeben durch

$$S[n,k]=L\frac{\Delta^k}{[k]!}(x^n)=\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\ j\end{bmatrix}(-1)^j q^{\binom{j}{2}}[k-j]^n. \tag{3.36}$$

Aus dieser Formel können wir eine erzeugende Funktion ableiten.

Wir bilden $\sum_n S[n,k]z^n = \sum_n L\frac{\Delta^k}{[k]!}(x^n)z^n = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(\sum_n x^n z^n\right) = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(\frac{1}{1-xz}\right)$.

Nun ist $\Delta^k\left(\frac{1}{1-xz}\right) = \frac{[k]!z^k}{(1-zx)(1-zEx)\cdots(1-zE^k x)}$. Das ergibt sich mit Induktion aus

$$\Delta^k\left(\frac{1}{1-xz}\right) = \Delta\Delta^{k-1}\left(\frac{1}{1-xz}\right) = \Delta\left(\frac{[k-1]!z^{k-1}}{(1-zx)(1-zE(x))\cdots(1-zE^{k-1}(x))}\right)$$

$$= \frac{[k-1]!z^{k-1}}{(1-zx)(1-zE(x))\cdots(1-zE^{k-1}(x))}\left(\frac{1-zx-(1-zE^k(x))}{1+(q-1)x}\right) = \frac{[k]!z^k}{(1-zx)(1-zE(x))\cdots(1-zE^k(x))}.$$

Somit erhalten wir schließlich

Satz 3.6

Die erzeugende Funktion der $q-$Stirlingzahlen zweiter Art ist gegeben durch

$$\sum_n S[n,k]z^n = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(\frac{1}{1-xz}\right) = \frac{z^k}{(1-[1]z)(1-[2]z)\cdots(1-[k]z)}. \tag{3.37}$$

Das kann wegen $S[n,k]=0$ für $n<k$ auch in der Gestalt

$$\sum_n S[n+k,k]z^n = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(\frac{1}{1-xz}\right) = \frac{1}{(1-[1]z)(1-[2]z)\cdots(1-[k]z)} \tag{3.38}$$

geschrieben werden.

Man hätte diese Formel natürlich auch mit Induktion beweisen können. Denn

$$(1-[k]z)\sum_n S[n+k,k]z^n = \sum_n S[n+k,k]z^n - \sum_n [k]S[n+k,k]z^{n+1}$$

$$= \sum_n (S[n+k,k]-[k]S[n+k-1,k])z^n = \sum_n S[n+k-1,k-1]z^n.$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf die bekannte Formel

$$\sum_n S(n+k,k)z^n = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)}.$$

In diesem Fall gibt es noch eine weitere erzeugende Funktion, nämlich

$$\sum_n S(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z-1)^k}{k!}.$$

Ein, wenn auch nicht sehr schönes, $q-$Analogon dieser Formel ist

Satz 3.7

Die exponentiell erzeugende Funktion der $S[n,k]$ ist

$$\sum_n \frac{S[n,k]z^n}{n!} = \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}} e^{[j]z}. \tag{3.39}$$

Das folgt aus

$$\sum_n \frac{S[n,k]z^n}{n!} = \sum_n \frac{z^n}{n!}\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(-1)^{k-j}q^{\binom{k-j}{2}}[j]^n = \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_{n,j}\frac{z^n}{n!}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(-1)^{k-j}q^{\binom{k-j}{2}}[j]^n$$

$$= \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_j \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(-1)^{k-j}q^{\binom{k-j}{2}}\sum_n \frac{z^n}{n!}[j]^n = \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{[k]!}\sum_j \begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(-1)^{k-j}q^{\binom{k-j}{2}}e^{[j]z}.$$

Wegen $S[n,k] = L\frac{\Delta^k}{[k]!}(x^n)$ kann (3.39) auch in der Form

$$\sum_n \frac{S[n,k]z^n}{n!} = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(\sum_n \frac{x^n z^n}{n!}\right) = L\frac{\Delta^k}{[k]!}\left(e^{xz}\right) \tag{3.40}$$

geschrieben werden.

Für $q=1$ ist $D_1 = \log(1+\Delta_1) = \Delta_1 - \frac{\Delta_1^{\ 2}}{2} + \frac{\Delta_1^{\ 3}}{3} - \cdots$ ein Operator, der sich als formale Potenzreihe in Δ_1 darstellen lässt. Daraus folgt z.B. dass

$$D_1((x)_n) = n(x)_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}(x)_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}(x)_{n-3} - \cdots$$

gilt.

Der Operator D ist leider nicht als formale Potenzreihe in Δ darstellbar. Daher gibt es auch keine schöne Formel für die Koeffizienten der Entwicklung

$$D(\langle x\rangle_n) = \sum_{k\geq 1} a_{n,k}\langle x\rangle_{n-k}.$$

Denn gäbe es eine Darstellung

$$D = a_1\Delta + a_2\Delta^2 + \cdots,$$

so müsste z.B.

$$D\left(\langle x\rangle_n\right) = a_1[n]\langle x\rangle_{n-1} + a_2[n][n-1]\langle x\rangle_{n-2} + \cdots$$

für alle n erfüllt sein. Für $n=1$ ergibt sich $a_1 = 1.$ Für $n=2$ erhält man

$[2]x - 1 = [2]x + a_2[2],$ d.h. $a_2 = -\frac{1}{q+1}.$

Aber bereits für $n=3$ lässt sich kein a_3 bestimmen. Denn wir hätten dann

$$1+q-(2+3q+q^2)x+(1+q+q^2)x^2 = [3]\langle x\rangle_2 - [3]\langle x\rangle_1 + [2][3]a_3$$

$$= (1+q+q^2)x^2 - 2(1+q+q^2)x + [2][3]a_3$$

Die Terme mit x stimmen jedoch links und rechts nicht überein.

Wir hätten auch folgendermaßen argumentieren können: Wenn der Operator D als formale Potenzreihe in Δ darstellbar wäre, müsste $D\Delta = \Delta D$ sein. Man rechnet aber sofort nach, dass $(\Delta D - D\Delta)\left(\langle x\rangle_3\right) = q^2 - q \neq 0$ ist.

Für Stirlingzahlen gibt es viele überraschende Identitäten, wovon man einige im Buch „Concrete Mathematics“ von Graham, Knuth und Patashnik finden kann. Ich möchte hier nur zeigen, wie man einige q – Analoga davon beweisen kann.

1) Für $q=1$ gilt $S(n+1,m+1)=\sum_k \binom{n}{k} S(k,m).$

Das entsprechende q – Analogon ist

$$S[n+1,m+1]=\sum_k \binom{n}{k} q^{k-m} S[k,m]. \tag{3.41}$$

Zum Beweis verwenden wir die Operatordefinition $(xD)^n=\sum_{k=0}^{n} S[n,k] q^{\binom{k}{2}} x^k D^k.$

Dann ist

$(xD)^{n+1}=x(Dx)^n D=x(1+qxD)^n D=x\sum_k \binom{n}{k} q^k (xD)^k D,$

also $\sum_m S[n+1,m+1] q^{\binom{m+1}{2}} x^{m+1} D^{m+1}=\sum_k \binom{n}{k} q^k \sum_j S[k,j] q^{\binom{j}{2}} x^{j+1} D^{j+1},$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich (3.41) ergibt.

2) Für $q=1$ gilt $S(n,m)=\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} S(k+1,m+1).$

Hier haben wir $x(xD)^n D=\sum_k S[n,k] q^{\binom{k}{2}} x^{k+1} D^{k+1}$

und

$x(xD)^n D=x(\frac{Dx-1}{q})^n D=q^{-n}\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x(Dx)^k D=q^{-n}\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (xD)^{k+1}$

$=q^{-n}\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_j S[k+1,j] q^{\binom{j}{2}} x^j D^j.$

Koeffizientenvergleich liefert

$$S[n,m]=q^{m-n}\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} S[k+1,m+1]. \tag{3.42}$$

Bevor wir weitergehen, wollen wir uns noch die Polynome $\langle x\rangle_n$ genauer ansehen. Für $q=1$ gilt $(x)_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)=x(E_1^{-1}x)\cdots(E_1^{-n+1}x)$ und $E_1=e^{D_1}=1+\Delta_1.$

Für $\langle x\rangle_n$ gilt $\langle x\rangle_n=q^{\binom{n}{2}} x(E^{-1}x)\cdots(E^{-n+1}x),$ weil $E^{-k}x=\frac{x-[k]}{q^k}$ ist.

Statt $\Delta_1 = E_1 - 1$ gilt $(1+(q-1)x)\Delta = E - 1$. Statt der Vertauschbarkeit von E_1 und Δ_1 gilt

$$\Delta E = qE\Delta. \tag{3.43}$$

Das folgt sofort aus $D\varepsilon = q\varepsilon D$, wenn man mit W transformiert:
$\Delta E = W(q-1)DW^{-1}W\varepsilon W^{-1} = W(q-1)(D\varepsilon)W^{-1} = qW\varepsilon W^{-1}W(q-1)DW^{-1} = qE\Delta.$

Aus der Formel $(x \dot{-} 1)^n = \left((x-1)\dfrac{1}{1+(q-1)D}\right)^n (1)$ ergibt sich durch Anwenden von W die Formel

$$\langle x \rangle_n = \left(x\frac{1}{1+\Delta}\right)^n (1). \tag{3.44}$$

Das hätte man auch direkt verifizieren können:
Sei T der lineare Operator auf den Polynomen mit $T\left(\langle x \rangle_n\right) = \langle x \rangle_{n+1}$. Dann ist
$T(1+\Delta)\left(\langle x \rangle_n\right) = \langle x \rangle_{n+1} + [n]\langle x \rangle_n = (x-[n])\langle x \rangle_n + [n]\langle x \rangle_n = x\langle x \rangle_n$. daher ist $T(1+\Delta) = x.$

Es ist also

$$T = x\frac{1}{1+\Delta}. \tag{3.45}$$

Es gilt $\Delta^k T - q^k T\Delta^k = [k]\Delta^{k-1},$ wie man sofort sieht, wenn man beide Seiten auf $\langle x \rangle_n, n \in \mathbb{N},$ anwendet. Das ist gleichbedeutend mit $\Delta^k x - q^k x\Delta^k = [k]\Delta^{k-1}(1+\Delta).$
Daraus folgt

$$(1 \dot{+} \Delta)^n x = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \Delta^k x = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k x\Delta^k + \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [k]\Delta^{k-1}(1+\Delta)$$

$$= x(1 \dot{+} q\Delta)^n + (1+\Delta)\sum_k q^{\binom{k-1}{2}} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} [n](q\Delta)^{k-1},$$

d.h.
$(1 \dot{+} \Delta)^n (x-[n]) = x(1 \dot{+} q\Delta)^n,$
wenn wir unter $(1 \dot{+} x)^n = (1 \dot{-} (-x))^n = (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)$ verstehen.
Eine einfache Folgerung ist

$$T^n = \left(x\frac{1}{1+\Delta}\right)^n = \langle x \rangle_n \frac{1}{(1 \dot{+} \Delta)^n}. \tag{3.46}$$

Ein anderes Analogon von $E_1 = 1 + \Delta_1$ ist

$$E = G(1+\Delta), \tag{3.47}$$

wobei G der lineare Operator auf den Polynomen ist, der durch

$$G\left(\langle x\rangle_n\right) = q^n \langle x\rangle_n \tag{3.48}$$

definiert ist und welcher $\Delta G = qG\Delta$ erfüllt.

Analog sei g der lineare Operator auf den Polynomen mit $g\left((x \dotplus 1)^n\right) = q^n (x \dotplus 1)^n$. Dann ist $Dg = qgD$ und $WgW^{-1} = G$.

Um (3.47) zu beweisen, betrachte man

$$g(1+(q-1)D)(x^n) = g\frac{e(qD)}{e(D)}(x^n) = ge(qD)\left((x \dotplus 1)^n\right) = e(D)g\left((x \dotplus 1)^n\right) = q^n e(D)\frac{1}{e(D)}(x^n) = \varepsilon(x^n).$$

Daher ist $g(1+(q-1)D) = \varepsilon$ und somit $G(1+\Delta) = Wg(1+(q-1)D)W^{-1} = W\varepsilon W^{-1} = E.$

Mit Induktion ergibt sich hier

$$E^n = G^n(1+\Delta)\cdots(1+q^{n-1}\Delta). \tag{3.49}$$

Definition

Die $q-$Exponentialpolynome der ersten Art sind definiert durch

$$\varphi_n(x) = \sum_k S[n,k]x^k. \tag{3.50}$$

Diese Folge beginnt mit

$1, x, x+x^2, x+(2+q)x^2+x^3, x+(3+3q+q^2)x^2+(3+2q+q^2)x^3+x^4, \cdots.$

Aus $\varphi_n(x) = \sum_k S[n,k]x^k = \sum_k (S[n-1,k-1]+[k]S[n-1,k])x^k = x\varphi_{n-1}(x) + x\varphi'_{n-1}$

ergibt sich

$$\varphi_n(x) = x\varphi_{n-1}(x) + x\varphi'_{n-1} = x(1+D)(\varphi_{n-1}(x)). \tag{3.51}$$

Mit Hilfe dieser Exponentialpolynome können wir auch die Potenzen des Operators $x(1+D)$ darstellen:

$$\left(x(1+D)\right)^n = \sum_k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k. \tag{3.52}$$

Denn das stimmt für $n=1$. Wenn es für n stimmt, dann ergibt sich

$$\left(x(1+D)\right)^{n+1} = \sum_k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k (x(1+D)) = \sum_k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k (q^k x D^k + [k] D^{k-1})(1+D)$$

$$= \sum_k \frac{q^k x\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k + \sum_k \frac{[k]\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k$$

$$+ \sum_k \frac{x\varphi_n^{(k)}(x)}{[k-1]!} q^{\binom{k}{2}} x^{k-1} D^{k-1} + \sum_k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k+1}{2}} x^{k+1} D^{k+1}.$$

Wenn wir gleiche Potenzen von D sammeln, so erhalten wir schließlich

$$\left(x(1+D)\right)^{n+1} = \sum_k \frac{[k]\varphi_n^{(k-1)}(x)+(q^k x+[k])\varphi_n^{(k)}(x)+q^k x\varphi_n^{(k+1)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k$$

$$= \sum_k \frac{\varphi_{n+1}^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k D^k.$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}^{(k)}(x) &= D^k x(1+D)(\varphi_n(x)) = (q^k x D^k + [k] D^{k-1})(1+D)\left(\varphi_n(x)\right) \\ &= [k]\varphi_n^{(k-1)}(x)+(q^k x+[k])\varphi_n^{(k)}(x)+q^k x\varphi_n^{(k+1)}(x).\end{aligned} \tag{3.53}$$

Wenn wir die Identität (3.52) auf $\varphi_m(x)$ anwenden, ergibt sich

$$\varphi_{m+n}(x) = \left(x(1+D)\right)^n (\varphi_m(x)) = \sum_k \frac{\varphi_n^{(k)}(x)\varphi_m^{(k)}(x)}{[k]!} q^{\binom{k}{2}} x^k. \tag{3.54}$$

Daraus lässt sich sofort die so genannte Hankeldeterminante der $\varphi_n(x)$, nämlich $\det\left(\varphi_{i+j}(x)\right)_{i,j=0}^n$ berechnen:

Denn setzt man $a_{n,k}(x) = \dfrac{\varphi_n^{(k)}(x)}{[k]!}$, dann wird (3.54) zu

$$\varphi_{m+n}(x) = \sum_k a_{n,k}(x) a_{m,k}(x) q^{\binom{k}{2}} [k]! x^k.$$

Aus (3.53) ergibt sich

$$a_{n,k}(x) = a_{n-1,k-1}(x)+(q^k x+[k])a_{n-1,k}(x)+q^k [k+1] x a_{n-1,k+1}(x). \tag{3.55}$$

Dabei ist $a_{n,-1}=0$ zu setzen.

Die untere Dreiecksmatrix $C_n = \left(a_{i,k}(x)\right)_{i,k=0}^n$ hat in der Hauptdiagonale lauter Einser wegen $\varphi_n^{(n)}(x) = [n]!$ und daher ist $\det(C_n)=1$. Bezeichnet man mit D_n die Diagonalmatrix mit $d_{i,i} = q^{\binom{i}{2}} [i]! x^i$, dann gilt

$$\left(\varphi_{i+j}(x)\right)_{i,j=0}^n = C_n D_n C_n^t.$$

Daher ergibt sich für die Hankeldeterminante

$$\det\left(\varphi_{i+j}(x)\right)_{i,j=0}^n = \det(C_n D_n C_n^t) = \det(D_n) = \prod_{i=0}^n [i]! q^{\binom{i}{2}} x^i. \tag{3.56}$$

Zum Beispiel ist $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2+x & (q+1)x & 1 \end{pmatrix}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x+x^2 \\ x & x+x^2 & x+(2+q)x^2+x^3 \\ x^2+x & x+(2+q)x^2+x^3 & x+(3+3q+q^2)x^2+(3+2q+q^2)x^3+x^4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2+x & (q+1)x+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & q(1+q)x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & (q+1)x+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir auch noch die Hankeldeterminante $\det\left(\varphi_{i+j+1}(x)\right)_{i,j=0}^{n}$ berechnen.

Dazu setzen wir $C_n = \left(a_{i,k}(x)\right)_{i,k=0}^{n}$ und $B_n = \left(a_{i+1,k}(x)\right)_{i,k=0}^{n}$ und erhalten

$\left(\varphi_{i+j+1}(x)\right)_{i,j=0}^{n} = B_n D_n C_n^t.$

Weiters ist $B_n = C_n J_n$, wobei

$$J_n = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & qx+[1] & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q[2]x & q^2x+[2] & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q^2[3]x & q^3x+[3] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q^n x+[n] \end{pmatrix}$$

ist. Daher ergibt sich $B_n = C_n J_n D_n C_n^t.$ Wir müssen also nur mehr $\det(J_n)$ berechnen.

Wir behaupten, dass $j_n = \det(J_n) = q^{\binom{n+1}{2}} x^{n+1}$ ist. Nun ist $j_0 = x,\ j_1 = qx^2$ und wenn man nach der letzten Spalte entwickelt, ergibt sich $j_n = (q^n x + [n])\, j_{n-1} - q^{n-1}[n]\, x j_{n-2},$ woraus die Behauptung mit Induktion folgt.

Nun ist die Folge $\left(\varphi_n(x)\right)$ durch diese Hankeldeterminanten eindeutig festgelegt, denn aus $\det(\varphi_0), \det\left(\varphi_1\right), \det\begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{pmatrix}, \cdots$ kann man die φ_n der Reihe nach eindeutig berechnen, da alle Determinanten ungleich 0 sind.

Satz 3.8
Die Folge der Exponentialpolynome erster Art ist die eindeutig bestimmte Polynomfolge welche

$$\det\left(\varphi_{i+j}(x)\right)_{i,j=0}^{n} = \prod_{i=0}^{n} [i]! q^{\binom{i}{2}} x^i \tag{3.57}$$

und

$$\det\left(\varphi_{i+j+1}(x)\right)_{i,j=0}^{n} = q^{\binom{n+1}{2}} x^{n+1} \prod_{i=0}^{n} [i]! q^{\binom{i}{2}} x^i \tag{3.58}$$

erfüllt.

Wir hätten das Resultat über die Hankeldeterminante auch noch anders beweisen können. Betrachten wir bei festem a das lineare Funktional, das durch

$$F(\langle x\rangle_n) = a^n \tag{3.59}$$

definiert ist. Dann ist

$$F(x^n) = F\left(\sum_k S[n,k]\langle x\rangle_k\right) = \sum_k S[n,k]a^k = \varphi_n(a). \tag{3.60}$$

Für dieses Funktional gilt $F(\langle x\rangle_n\, p(x)) = F\left(T^n(1\dotplus\Delta)^n(p(x)\right)$ nach (3.46). Wegen $F(\langle x\rangle_n) = a^n$ ist $F(T\langle x\rangle_n) = F(\langle x\rangle_{n+1}) = a^{n+1} = aF(\langle x\rangle_n)$ und daher nach dem Linearisierungsprinzip $F(Tp(x)) = aF(p(x))$ für alle Polynome $p(x)$. Daraus folgt $F(\langle x\rangle_n\, p(x)) = F\left(T^n(1\dotplus\Delta)^n(p(x)\right) = a^nF((1\dotplus\Delta)^n(p(x)).$
Speziell ist

$$F(\langle x\rangle_n\langle x\rangle_m) = F\left(T^n(1\dotplus\Delta)^n(\langle x\rangle_m)\right) = a^nF((1\dotplus\Delta)^n(\langle x\rangle_m). \tag{3.61}$$

Wir betrachten nun die Polynome

$$h_n(x,a) = \frac{1}{e(a\Delta)}\left(\langle x\rangle_n\right) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \frac{a^k}{[k]!}\Delta^k\left(\langle x\rangle_n\right) = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k \langle x\rangle_{n-k}. \tag{3.62}$$

Diese sind ein $q-$Analogon der Poisson-Charlier Polynome.
Dann gilt

$$F(\langle x\rangle_n h_k(x,a)) = F\left(\sum_j (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} a^j \langle x\rangle_{k-j}\langle x\rangle_n\right) = \sum_j (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} a^j F\left(\langle x\rangle_{k-j}\langle x\rangle_n\right)$$

$$= a^k \sum_j (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} F((1\dotplus\Delta)^{k-j}(\langle x\rangle_n)).$$

Nun gilt $(x \dot{-} b)^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(a\dot{-}b)^{n-k}(x\dot{-}a)^k$ nach (1.20), also speziell für $x=0, b=-\Delta, a=1$

$$\sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (1\dotplus\Delta)^{n-k} = q^{\binom{n}{2}}\Delta^n.$$

Daher ist

$$F(\langle x\rangle_n h_k(x,a)) = a^k F\left(\sum_j (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (1 \dotplus \Delta)^{k-j}(\langle x\rangle_n)\right) = a^k F\left(q^{\binom{k}{2}} \Delta^k(\langle x\rangle_n)\right) = [k]! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^n q^{\binom{k}{2}}.$$

Daraus ergibt sich schließlich

Satz 3.9

Die $q-$Poisson-Charlier Polynome sind orthogonal bezüglich des linearen Funktionals F, das durch $F(x^n) = \varphi_n(a)$ definiert ist. Genauer gilt

$$F(h_n(x,a)h_m(x,a)) = q^{\binom{n}{2}} a^n [n]![n=m]. \tag{3.63}$$

Setzt man $h_n(x,a) = \sum_k d(n,k)x^k$, dann ist $d(n,n) = 1$ und $d(n,k) = 0$ für $k > n$.

Die Identität (3.63) schreibt sich dann in der Gestalt

$$F\left(\sum_{j,k} d(n,j)d(m,k)x^{j+k}\right) = \sum_{j,k} d(n,j)d(m,k)\varphi_{j+k}(a) = q^{\binom{n}{2}} a^n [n]![n=m]. \tag{3.64}$$

Sei nun $H_n = \left(d(j,k)\right)_{j,k=0}^{n}$. Dann ist H_n eine untere Dreiecksmatrix, wo in der Hauptdiagonale lauter Einser stehen. Daher ist also $\det(H_n) = 1$.

Die Gleichung (3.64) bedeutet, dass die Matrix $H_n \left(\varphi_{i+j}(a)\right)_{i,j=0}^{n} H_n^t$ eine Diagonalmatrix ist, wo in der Hauptdiagonale die Werte $q^{\binom{k}{2}} a^k [k]!$ stehen. Daraus ergibt sich wieder

$$\det\left(\varphi_{i+j}(a)\right)_{i,j=0}^{n} = \prod_{i=0}^{n} [i]! q^{\binom{i}{2}} a^i.$$

Sei U der Operator, der durch $U\left(\langle x\rangle_n\right) = x^n, n \in \mathbb{N},$ definiert ist. Dann ist $\varphi_n(x) = U\left(x^n\right)$ und $UxU^{-1} = x(1+D)$ sowie $U\Delta U^{-1} = D.$

Daraus können wir sofort eine Rekursionsformel für die $q-$Poisson-Charlier Polynome $h_n(x,a)$ herleiten. Denn es ist $Uh_n(x,a) = (x \div a)^n$ und somit

$$Uxh_n(x,a) = UxU^{-1}Uh_n(x,a) = x(1+D)(x \div a)^n = x(x \div a)^n + [n]x(x \div a)^{n-1}$$
$$= (x - q^n a)(x \div a)^n + q^n a(x \div a)^n + [n](x - q^{n-1}a)(x \div a)^{n-1} + [n]q^{n-1}a(x \div a)^{n-1}$$
$$= (x \div a)^{n+1} + (q^n a + [n])(x \div a)^n + [n]q^{n-1}a(x \div a)^{n-1}.$$

Somit ergibt sich, wenn wir U^{-1} auf beide Seiten anwenden,

$$h_{n+1}(x,a) = (x - aq^n - [n])h_n(x,a) - aq^{n-1}[n]h_{n-1}(x,a). \tag{3.65}$$

Der Operator U führt die Formel (3.26) in

$$\sum_k \binom{n}{k}(q-1)^k \varphi_k(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(q-1)^k x^k = r_n((q-1)x,1)$$

über.

Nun rechnet man sofort nach, dass sich aus $\sum_k \binom{n}{k} a_k = b_n$ umgekehrt $a_n = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k$ ergibt.

Das folgt auch aus $x^n = \left((1+x)-1\right)^n = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1+x)^k = \sum_{k,i}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}x^i.$

Denn man definiere ein lineares Funktional auf den Polynomen durch $F(x^n) = a_n.$ Dann ist $b_n = F\left((1+x)^n\right).$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \left[n = i\right]. \tag{3.66}$$

Daher ist

$$(q-1)^n \varphi_n(x) = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_j (q-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j.$$

Wir hätten auch folgendermaßen argumentieren können:

$$(q-1)^n x^n = \left((1+(q-1)x)-1\right)^n = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(1+(q-1)x)^k$$

$$= \sum_{k,j}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}(q-1)^j \left\langle x \right\rangle_j .$$

Wendet man darauf den Operator U an, so ergibt sich die obige Formel.

Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich eine weitere Formel für die $q-$Stirlingzahlen $S[n,k],$ die kein Analogon für $q=1$ besitzt:

Satz 3.10

Die $q-$Stirlingzahlen $S[n,k]$ sind charakterisiert durch

$$(q-1)^{n-i} S[n,i] = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}. \tag{3.67}$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf die triviale Formel (3.66).

Zum Beispiel ist

$$(q-1)^2 S[4,2]=\binom{4}{2}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}-\binom{4}{3}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\binom{4}{4}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=6-4(1+q+q^2)+1+q+2q^2+q^3+q^4$$
$$=3-3q-2q^2+q^3+q^4=(q-1)^2(3+3q+q^2).$$

Satz 3.11
Für die $q-$Stirlingzahlen der ersten Art existiert eine analoge Formel

$$(q-1)^{n-i}s[n,i]=\sum_k(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{i}. \tag{3.68}$$

Zum Beweis gehen wir wieder von (3.26) aus. Wir erhalten
$$(1+(q-1)x)^n=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q-1)^k\sum_i s[k,i]x^i=\sum_i x^i\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q-1)^k s[k,i].$$
Vergleicht man auf beiden Seiten die Koeffizienten, so erhält man

$$\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q-1)^{k-i}s[k,i]=\binom{n}{i}. \tag{3.69}$$

Nun erinnern wir an die Formeln $x^n=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x\dot{-}1)^k$ und $(x\dot{-}1)^n=\sum_k(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k$.

Wendet man darauf ein lineares Funktional F an, so ergibt sich $F(x^n)=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}F((x\dot{-}1)^k)$

und $F((x\dot{-}1)^n)=\sum_k(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}F(x^k)$.

Definiert man also bei festem i ein lineares Funktional auf $\mathbb{C}(q)[x]$ durch

$F((x\dot{-}1)^k)=(q-1)^{k-i}s[k,i]$, so ergibt sich $F(x^n)=\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(q-1)^{k-i}s[k,i]=\binom{n}{i}$. Damit ergibt sich (3.68).

Abschließend wollen wir noch eine zweite Art von $q-$Exponentialpolynomen betrachten, nämlich

$$\Phi_n(x)=\sum_k S[n,k]q^{\binom{k}{2}}x^k. \tag{3.70}$$

Hier ergibt sich $\Phi_n(x)=x\Phi_{n-1}(qx)+x\Phi'_{n-1}(x)=x(D+\varepsilon)\Phi_{n-1}(x)$.

Aus $De(x)=e(x)D+e(x)\varepsilon$ ergibt sich $x(D+\varepsilon)=\dfrac{1}{e(x)}(xD)e(x)$.

Daher ist $\Phi_n(x)=(x(D+\varepsilon))^n(1)=\dfrac{1}{e(x)}(xD)^n e(x)(1)=\dfrac{1}{e(x)}(xD)^n(e(x))$.

Diese q – Exponentialpolynome der zweiten Art erfüllen also einerseits
$(xD)^n(e(x)) = \Phi_n(x)e(x)$
und andererseits die Formel von Dobinski

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{e(x)}(xD)^n\left(\sum_k \frac{x^k}{[k]!}\right) = \frac{1}{e(x)}\sum_k \frac{[k]^n x^k}{[k]!}. \tag{3.71}$$

Es gilt

$$\Phi_{n+1}(x) = x\sum_k \binom{n}{k} q^k \Phi_k(x). \tag{3.72}$$

Denn wir haben schon weiter oben gezeigt, dass
$(xD)^{n+1} = x(Dx)^n D = x(1+qxD)^n D = x\sum_k \binom{n}{k} q^k (xD)^k D$
gilt. Daher ist
$\Phi_{n+1}(x) = \frac{1}{e(x)}(xD)^{n+1}(e(x)) = x\sum_k \binom{n}{k} q^k \frac{1}{e(x)}(xD)^k D(e(x)) = x\sum_k \binom{n}{k} q^k \Phi_k(x).$

Für $x = 1$ ergibt sich $B_n = \Phi_n(1) = \sum_k q^{\binom{k}{2}} S[n,k].$
Das ist ein q – Analogon der Bellzahlen. Sie erfüllen also die Rekursion

$$B_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k} q^k B_k. \tag{3.73}$$

Daraus lassen sich die ersten Werte sehr leicht berechnen:
$(B_n)_{n\geq 0} = \left(1,1,1+q,1+2q+q^2+q^3,1+3q+3q^2+4q^3+2q^4+q^5+q^6,\cdots\right).$