2. Die q-Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man aus Polynomidentitäten durch Grenzübergang Identitäten für formale Potenzreihen erhält. Das ergibt zwei $q-$Analoga der Exponentialfunktion und verschiedene Verallgemeinerungen der Binomialreihe, deren Eigenschaften studiert werden. Eine wichtige Rolle spielen hier neben $q-$kommutierenden Operatoren auch formale Potenzreihen im $q-$Differentialoperator.

Bisher haben wir q als eine reelle Zahl interpretiert. Man kann aber q auch als eine Unbestimmte betrachten. Dabei bleiben alle Resultate erhalten. Diese Interpretation erlaubt es, in vielen Fällen Grenzübergänge durchzuführen, die im Fall $q=1$ nicht möglich sind.
Z.B. kann man in der Formel

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

auch $n \to \infty$ gehen lassen. Die rechte Seite ist ein Polynom in q und kann daher auch als formale Potenzreihe in q über $\mathbb{C}$ angesehen werden. Für formale Potenzreihen in q mit komplexen Koeffizienten versteht man unter $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} a_{n,k} q^k = \sum_{k \geq 0} a_k q^k$, dass für jedes K ein Index N existiert, so dass für alle $n > N$ gilt $a_{n,k} = a_k$ für alle k mit $0 \leq k \leq K$. Das heißt, für genügend große n wird der Beginn der Reihe nicht beeinflusst.
Dann ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}. \tag{2.1}$$

Denn ist K fest gewählt und $n > K + k$, dann stimmen alle Koeffizienten von q^j für $0 \leq j \leq K$
des Polynoms $\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$ und der formalen Potenzreihe
$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} = (1+q+q^2+\cdots)\cdots(1+q^k+q^{2k}+\cdots)$ überein, da die Multiplikation mit $q^j, j \geq n-k+1,$ auf diese keinen Einfluss hat.

Bemerkung

Aus Satz 1.6 und (2.1) ergibt sich, dass $\frac{1}{(1\div q)^k} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$ die erzeugende Funktion aller Partitionen in höchstens k Teile ist. Durch direkte Rechnung sieht man aber, dass es auch die erzeugende Funktion aller Partitionen ist, deren größter Teil höchstens k ist.
Geht man auch mit $k \to \infty$, so erhält man die bekannte Tatsache, dass

$$\frac{1}{(1\div q)^\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = \sum_n p(n) q^n,$$

wobei $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n bedeutet, die erzeugende Funktion aller Partitionen natürlicher Zahlen ist.

Aus dem binomischen Lehrsatz $(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k$ erhält man auf analoge Weise die Formel

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1-q)\cdots(1-q^k)}x^k. \tag{2.2}$$

Ersetzt man darin x durch qx, so liest man sofort ab, dass
$\dfrac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)\cdots(1-q^k)}$
die erzeugende Funktion aller Partitionen in genau k verschiedene Teile ist.

Wir fassen diese Reihe als formale Potenzreihe in x auf, deren Koeffizienten formale Potenzreihen in q sind. Die Aussage, dass $\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k \to \sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1-q)\cdots(1-q^k)}x^k$

konvergiert, soll bedeuten, dass bei jedem fest vorgegebenem K und M für alle genügend großen n alle Koeffizienten von $x^k q^m$ für $0\leq k\leq K, 0\leq m\leq M$, gleich bleiben.
Ersetzt man in (2.2) x durch $(1-q)x$, so erhält man

$$E(x)=(1+(1-q)x)(1+q(1-q)x)(1+q^2(1-q)x)\cdots=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!}x^k. \tag{2.3}$$

$E(x)$ ist ein $q-$Analogon der Exponentialfunktion, denn es reduziert sich für $q=1$ auf e^x.
Im Unterschied zu e^x besitzt $E(x)$ eine Darstellung als unendliches Produkt. Es ist charakterisiert durch

$$E(x)=(1+(1-q)x)E(qx) \tag{2.4}$$

und $E(0)=1$.

Der $q-$Differentiationsoperator lässt sich auf formale Potenzreihen durch gliedweise $q-$Differentiation erweitern. Es gilt

$$D(E(x))=\sum_k q^{\binom{k}{2}}\frac{[k]x^{k-1}}{[k]!}=\sum_k q^{\binom{k-1}{2}+k-1}\frac{x^{k-1}}{[k-1]!}=E(qx).$$

Die $q-$Exponentialfunktion $E(x)$ ist durch diese Eigenschaft charakterisiert:

Satz 2.1
Die $q-$Exponentialfunktion $E(x)$ ist die eindeutig bestimmte formale Potenzreihe, welche

$$D(E(x))=E'(x)=E(qx) \text{ mit } E(0)=1 \tag{2.5}$$

erfüllt.

Beweis

Sei $f(x)=\sum_k a_k x^k$ mit $a_0=1$ und $f'(x)=\sum_k [k] a_k x^{k-1} = f(qx)=\sum_k a_k q^k x^k$.

Koeffizientenvergleich liefert $[k] a_k = q^{k-1} a_{k-1}$. Somit ist

$$a_k = \frac{q^{k-1}}{[k]} a_{k-1} = \frac{q^{k-1} q^{k-2} \cdots q^0}{[k]!} a_0 = \frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!}.$$

Als nächstes suchen wir ein $q-$Analogon der Binomialreihe $\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_k \binom{m+k-1}{k} x^k$. Als $q-$Analogon der linken Seite wählen wir die formale Potenzreihe $\frac{1}{(1 \div x)^m}$.

Sei $\frac{1}{(1 \div x)^m} = \sum_k a_k x^k$. Dann ergibt sich genauso wie für Polynome, dass $a_k = L \frac{D^k}{[k]!} \left(\frac{1}{(1 \div x)^m} \right)$ gilt.

Aus

$$D\left(\frac{1}{(1 \div x)^m}\right) = \frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{m-1}x)} - \frac{1}{(1-qx)(1-qx)\cdots(1-q^m x)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-q)x} \frac{(1-q^m x)-(1-x)}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{m-1}x)(1-q^m x)} = [m] \frac{1}{(1 \div x)^{m+1}}$$

folgt

$$D^k\left(\frac{1}{(1 \div x)^m}\right) = [m] D^{k-1} \frac{1}{(1 \div x)^{m+1}} = [m][m+1]\cdots[m+k-1] \frac{1}{(1 \div x)^{m+k}}$$ und somit

$$a_k = \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Das ergibt

Satz 2.2

Die formale Potenzreihe für $\frac{1}{(1 \div x)^m} = \frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{m-1}x)}$ *ist gegeben durch*

$$\frac{1}{(1 \div x)^m} = \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k. \tag{2.6}$$

Man hätte dieses Ergebnis auch durch die Interpretation mittels Partitionen erhalten können:

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{m-1}x)} = \sum_{i_1} x^{i_1} \sum_{i_2} (qx)^{i_2} \cdots \sum_{i_{m-1}} (q^{m-1}) x^{i_{m-1}}$$

$$= \sum_k x^k \sum_{\lambda \in P_{k,m-1}} q^{|\lambda|} = \sum_k \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Wenn wir hier wieder $m \to \infty$ gehen lassen, so erhalten wir

$$\frac{1}{(1 \dot{-} x)^{\infty}} = \frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots} = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1 \dot{-} q)^k}. \tag{2.7}$$

Ersetzt man x durch $(1-q)x$, so ergibt sich

$$e(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{[k]!}. \tag{2.8}$$

Das ist ebenfalls ein $q-$Analogon von e^x.

Man hätte (2.7) auch aus (1.21) für $x \to 1, a \to x$ erhalten können.

Geht man in dieser Formel $\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1 \dot{-} x)^{n-k} = 1$ mit $n \to \infty,$ so erhält man wieder (2.7).

Man zeigt genau so wie oben den

Satz 2.3
Die $q-$Exponentialfunktion $e(x)$ ist die eindeutig bestimmte formale Potenzreihe, welche $D(e(x)) = e(x)$ mit $e(0) = 1$ erfüllt. Es gilt überdies $(1-(1-q)x)e(x) = e(qx).$

Die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion ist die Formel $e^{x+y} = e^x e^y$. Diese besitzt eine Reihe verschiedener Analoga. Wir beginnen mit

Satz 2.4
Es gilt

$$e(xz)e(az) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \dotplus a)^n}{[n]!} z^n. \tag{2.9}$$

Denn

$$e(xz)e(az) = \sum_k \frac{x^k z^k}{[k]!} \sum_{\ell} \frac{a^{\ell} z^{\ell}}{[\ell]!} = \sum_{k,\ell} \frac{z^{k+\ell}}{[k+\ell]!} \frac{[k+\ell]!}{[k]![\ell]!} x^k a^{\ell} = \sum_n \frac{z^n}{[n]!} \sum_{k+\ell=n} \begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix} x^k a^{\ell} = \sum_n \frac{(x \dotplus a)^n}{[n]!} z^n.$$

Man kann dieses Resultat so ausdrücken: das Produkt $e(xz)e(az)$ ist die $q-$exponentiell erzeugende Funktion der Rogers-Szegö Polynome.

Aus der Produktdarstellung der beiden $q-$Exponentialfunktionen ist ersichtlich, dass

$$e(z)E(-z) = 1 \tag{2.10}$$

gilt. Das bedeutet

$$\frac{1}{e(z)}=E(-z)=\sum_n(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\frac{z^n}{[n]!}. \tag{2.11}$$

Für $q=1$ reduziert sich das auf $\frac{1}{e^x}=e^{-x}$.

(2.10) besagt, dass

$$\sum_k\frac{z^k}{[k]!}\sum_\ell\frac{(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}z^\ell}{[\ell]!}=\sum_{k,\ell}\frac{z^{k+\ell}}{[k+\ell]!}\frac{[k+\ell]!}{[k]![\ell]!}(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}=\sum_n\frac{z^n}{[n]!}\sum_{k+\ell=n}\begin{bmatrix}k+\ell\\k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}=1$$

gilt. Das ist wieder äquivalent mit

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=[n=0]. \tag{2.12}$$

Das ist ein $q-$Analogon der trivialen Relation $(1-1)^n=[n=0]$.

(2.12) ist nichts anderes als $(1\div 1)^n$.

Bemerkung

Für $q=0$ reduziert sich $e(z)$ auf $\frac{1}{1-z}$. Man kann also die formalen Potenzreihen $e(z)=e_q(z)=\sum_k\frac{z^k}{[k]!}$ für $0\le q\le 1$ als eine Art Interpolation zwischen der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z}=\sum_k z^k$ und der Exponentialreihe $e^z=\sum_k\frac{z^k}{k!}$ interpretieren.

Die Identität (2.9) wird für $q=0$ zu $\frac{1}{1-xz}\frac{1}{1-az}=\sum_n z^n\sum_{k+\ell=n}x^k a^\ell$.

Aus (2.9) ergibt sich mit Hilfe der Gauß'schen Identität

$$e(z)e(-z)=\sum_n\frac{z^n}{[n]!}\sum_k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(-1)^k=\sum_n\frac{z^{2n}}{[2n]!}(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1}). \tag{2.13}$$

Man braucht dazu aber gar nicht das Gauß'sche Resultat, sondern kann beide Resultate direkt erhalten, wenn man (2.7) beachtet:

$$\sum_n\frac{r_n(-1,1)}{(1\div q)^n}z^n=e\left(\frac{-z}{1-q}\right)e\left(\frac{z}{1-q}\right)=\sum_k\frac{(-z)^k}{(1\div q)^k}\sum_\ell\frac{z^\ell}{(1\div q)^\ell}=\frac{1}{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\cdots}\frac{1}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots}$$
$$=\frac{1}{(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)\cdots}=\sum_n\frac{(z^2)^n}{(1\div q^2)^n_{q^2}}.$$

Dabei sei $(1\div z)^n_{q^2}=(1-z)(1-q^2z)\cdots(1+q^{2n-2}z)$.

Vergleicht man hier Koeffizienten, so ist klar, dass $r_{2n+1}(-1,1)=0$ ist und dass

$\frac{r_{2n}(-1,1)}{(1\div q)^{2n}}=\frac{1}{(1\div q^2)_{q^2}^n}$ ist. Also ergibt sich das gesuchte Resultat

$$r_{2n}(-1,1)=\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}=(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1}).$$

Für $q=0$ wird das zu $\frac{1}{1-z}\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-z^2}$.

Analog ergibt sich

$$E(z)E(-z)=\sum_n q^{2\binom{n}{2}}\frac{z^{2n}}{[2n]!}(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1}). \tag{2.14}$$

Aus der Produktdarstellung der $q-$Exponentialfunktion ergibt sich noch ein weiteres interessantes Resultat: Ersetzt man in (2.7) q durch q^2, so erhält man

$$\frac{1}{(1-x)(1-q^2x)(1-q^4x)\cdots}=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{(1\div q^2)_{q^2}^k}.$$

Wir bezeichnen diese Reihe mit $e_{q^2}(\frac{x}{1-q^2})$.

Dann ist $e_{q^2}(\frac{x}{1-q^2})e_{q^2}(\frac{qx}{1-q^2})=\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots}=e(\frac{x}{1-q})$

oder $e_{q^2}(\frac{x}{1+q})e_{q^2}(\frac{qx}{1+q})=e(x)$.

Für $q=1$ reduziert sich das auf $e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}=e^x$.
Wenn wir die Koeffizienten vergleichen, erhalten wir aus

$$e_{q^2}(\frac{x}{[2]})e_{q^2}(\frac{qx}{[2]})=\sum_k\frac{x^k}{[2]^k[k]_{q^2}!}\sum_\ell\frac{q^\ell x^\ell}{[2]^\ell[\ell]_{q^2}!}=\sum_k\frac{x^n}{[2]^n[n]_{q^2}!}\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^2}q^{n-k}=\sum_n\frac{x^n}{[n]!},$$

dass

$$\sum_{k=0}^n q^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^2}=[2]^n\frac{[n]_{q^2}!}{[n]!}=(1+q)^n\frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^2)^n}\frac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$
$$=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$$

gilt. Dabei bedeutet der Index q^2, dass überall q durch q^2 zu ersetzen ist.
Das ergibt

Satz 2.5
Es gelten die Formeln

$$e_{q^2}(\frac{x}{[2]})e_{q^2}(\frac{qx}{[2]})=e(x) \tag{2.15}$$

und damit gleichbedeutend

$$\sum_{k=0}^n q^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q^2}=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n). \tag{2.16}$$

Die letzte Gleichung ist ein schönes $q-$ Analogon der Formel $\sum\binom{n}{k}=2^n.$

In diesem Zusammenhang zeigen wir gleich

Satz 2.6

Die formale Potenzreihe $e_{q^2}(\frac{x^2}{[2]})$ *ist die eindeutig bestimmte Lösung der* $q-$*Differentialgleichung* $f'(x)=xf(x)$ *mit* $f(0)=1.$

Beweis

Sei $f(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots.$ Dann ist $f'(x)=a_1+[2]a_2x+\cdots.$ Aus $f'(x)=xf(x)$ folgt $a_1=0.$ Weiters ergibt sich daraus durch Koeffizientenvergleich $[k]a_k=a_{k-2}.$ Das impliziert $a_{2k+1}=0$ und $a_{2k}=\dfrac{1}{[2][4]\cdots[2k]}.$ Somit ergibt sich

$$f(x)=\sum_n\frac{(1-q)^n x^{2n}}{(1\div q^2)^n_{q^2}}=\sum_n\frac{(1-q)^n x^{2n}}{(1-q^2)^n[n]_{q^2}!}=\sum_n\frac{1}{[n]_{q^2}!}\left(\frac{x^2}{[2]}\right)^n,$$

was zu zeigen war.

Satz 2.7

Es gilt

$$\frac{e(xz)}{e(az)}=\sum_n\frac{(x\div a)^n}{[n]!}z^n. \tag{2.17}$$

Denn die linke Seite bedeutet

$$\sum_k\frac{x^kz^k}{[k]!}\sum_\ell\frac{(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}a^\ell z^\ell}{[\ell]!}=\sum_{k,\ell}\frac{z^{k+\ell}}{[k+\ell]!}\frac{[k+\ell]!}{[k]![\ell]!}(-1)^\ell q^{\binom{\ell}{2}}x^ka^\ell$$

$$=\sum_n\frac{z^n}{[n]!}\sum_{k+\ell=n}\begin{bmatrix}k+\ell\\k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}x^ka^\ell=\sum_n\frac{z^n}{[n]!}(x\div a)^n.$$

Aus $\dfrac{e(xz)}{e(az)}\dfrac{e(az)}{e(yz)}=\dfrac{e(xz)}{e(yz)}$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich die nützliche Formel

$$\big((x\div a)\dot{+}(a\div y)\big)^n=\sum_{k=0}^n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x\div a)^k(a\div y)^{n-k}=(x\div y)^n,$$

die wir früher auf andere Weise erhalten haben.

Für $x=1$ und $z\to\dfrac{z}{1-q}$ geht (2.17) über in

$$\frac{(1-az)(1-qaz)(1-q^2az)\cdots}{(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\cdots}=\sum_{k\ge 0}\frac{(1\div a)^k}{(1\div q)^k}z^k. \tag{2.18}$$

Diese Aussage wird auch sehr oft als $q-$Binomialsatz bezeichnet.

Für $a=q^n$ reduziert sich (2.18) auf (2.6) und für $a=q^{-n}, z\to q^n z,$ auf $(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z)=\sum_k \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(-z)^k.$ (2.18) enthält also die beiden konkreten $q-$Analoga des binomischen Lehrsatzes.

Ersetzen wir $a\to q^{-a}, z\to q^a x,$ so geht (2.18) über in

$$\frac{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots}{(1-q^a x)(1-q^{a+1}x)(1-q^{a+2}x)\cdots}=\sum_{k\ge 0}\begin{bmatrix} a\\ k\end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(-x)^k,$$

wenn wir für beliebiges $a\in\mathbb{R}$ den $q-$Binomialkoeffizienten durch

$\begin{bmatrix} a\\ k\end{bmatrix}=\frac{(1-q^a)(1-q^{a-1})\cdots(1-q^{a-k+1})}{(1-q)\cdots(1-q^k)}$ definieren.

Es liegt daher nahe, die linke Seite für beliebiges $a\in\mathbb{R}$ als $(1\div x)^a$ zu bezeichnen:

$$(1\div x)^a:=\frac{(1\div x)^\infty}{(1\div q^a x)^\infty}=\frac{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots}{(1-q^a x)(1-q^{a+1}x)(1-q^{a+2}x)\cdots}=\sum_{k\ge 0}\begin{bmatrix} a\\ k\end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}(-x)^k. \tag{2.19}$$

Für $\frac{1}{(1\div x)^a}=\frac{(1\div q^a x)^\infty}{(1\div x)^\infty}$ ergibt sich aus (2.18)

$$\frac{1}{(1\div x)^a}=\frac{(1\div q^a x)^\infty}{(1\div x)^\infty}=\sum_k \begin{bmatrix} a+k-1\\ k\end{bmatrix} x^k. \tag{2.20}$$

Aus der Definition ergibt sich für beliebige $a,b\in\mathbb{R}$

$$(1\div x)^{a+b}=(1\div x)^a(1\div q^a x)^b. \tag{2.21}$$

Weiters ist

$$D\left((1\div x)^a\right)=-[a](1\div qx)^{a-1}. \tag{2.22}$$

Das ergibt sich aus

$$D\left((1\div x)^a\right)=\frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{(1\div x)^\infty}{(1\div q^a x)^\infty}-\frac{(1\div qx)^\infty}{(1\div q^{a+1}x)^\infty}\right)=$$

$$=\frac{(1\div qx)^\infty}{(1\div q^a x)^\infty}\frac{\left((1-x)-(1-q^a x)\right)}{(1-q)x}=-\left[a\right](1\div qx)^{a-1}.$$

Daraus könnte man ebenfalls (2.19) herleiten. Denn setzt man $(1\div x)^a=\sum_k a_k x^k$, so ist

$a_k=L\dfrac{D^k((1\div x)^a)}{[k]!}$. Daher folgt aus $D\left((1\div x)^a\right)=-[a](1\div qx)^{a-1}$ und

$(f(cx))'=cf'(cx)$ sofort $a_k=L\dfrac{D^k((1\div x)^a)}{[k]!}=L(-1)^k\begin{bmatrix}a\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}(1\div x)^{a-k}$.

Bemerkung

Für $n\in\mathbb{N}$ ist $(1\div x)^n=((1-x)\varepsilon)^n 1$. Diese Formel gilt auch für $-n$.

Denn $(1\div x)^{-n}=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}(-x)^k$ und

$$((1-x)\varepsilon)^{-n}=\left((1\div x)^n\varepsilon^n\right)^{-1}=\varepsilon^{-n}\frac{1}{(1\div x)^n}=\varepsilon^{-n}\sum_k\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}x^k=\sum_k\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}q^{-nk}x^k\varepsilon^{-n}.$$

Nun ist $\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}=\dfrac{(1-q^{-n})\cdots(1-q^{-n-k+1})}{(1-q)\cdots 1-q^k)}=q^{-nk-\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}$. Daher ergibt sich

$((1-x)\varepsilon)^{-n}=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}(-x)^k\varepsilon^{-n}$. Das ergibt insgesamt

$$((1-x)\varepsilon)^{-n}1=(1\div x)^{-n}=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}(-x)^k. \tag{2.23}$$

Alle Verallgemeinerungsmöglichkeiten führen also auf dasselbe Resultat.

(2.20) hätte man auch folgendermaßen ableiten können: Aus (2.21) und (2.19) folgt

$$\frac{1}{(1\div x)^a}=(1\div q^a x)^{-a}=\sum_k(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}-a\\k\end{bmatrix}q^{ak}x^k.$$

Nun verifiziert man sofort, dass $\begin{bmatrix}-a\\k\end{bmatrix}=(-1)^k\begin{bmatrix}a+k-1\\k\end{bmatrix}q^{-ak-\binom{k}{2}}$ gilt. Daraus folgt wieder das obige Resultat.

Oder man hätte wie oben argumentieren können unter Verwendung von

$$\left(\frac{1}{(1\div x)^a}\right)'=\left[a\right](1\div x)^{a+1}. \tag{2.24}$$

Das ergibt sich aus

$$\left(\frac{1}{(1\div x)^{a}}\right)'=\frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{(1\div q^{a}x)^{\infty}}{(1\div x)^{\infty}}-\frac{(1\div q^{a+1}x)^{\infty}}{(1\div qx)^{\infty}}\right)=$$
$$=\frac{(1\div q^{a+1}x)^{\infty}}{(1\div x)^{\infty}}\frac{\left((1-q^{a}x)-(1-x)\right)}{(1-q)x}=\left[a\right](1\div x)^{a+1}.$$

Die vorangehenden Überlegungen legen die Frage nahe, ob es auch eine Verallgemeinerung der Formel $\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k}=(x+\varepsilon)^{n}1$ auf negative Exponenten gibt.

Das ist tatsächlich der Fall. Dazu benötigen wir die $q-$Vandermonde'sche Formel $\begin{bmatrix}r+s\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{r}\begin{bmatrix}r\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\n-k\end{bmatrix}q^{(r-k)(n-k)}$ für beliebige $r,s\in\mathbb{Z}.$ Das ergibt sich aber durch Koeffizientenvergleich aus (2.21) unter Berücksichtigung von (2.19).

Diese impliziert

$$\sum_{k}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}x^{k}\varepsilon^{-n-k}\sum_{\ell}\begin{bmatrix}n\\\ell\end{bmatrix}x^{\ell}\varepsilon^{n-\ell}=\sum_{k,\ell}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\\ell\end{bmatrix}x^{k+\ell}q^{-(n+k)\ell}\varepsilon^{-(k+\ell)}$$
$$=\sum_{N}x^{N}\varepsilon^{-N}\sum_{k}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\N-k\end{bmatrix}q^{(-n-k)(N-k)}=1.$$

Denn die innere Summe ist nach Vandermonde überall 0, außer für $N=0,$ wo sie 1 ist.
Es ergibt sich somit

$$r_{n}(x,1)=(x+\varepsilon)^{n}1=\sum_{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k},n\in\mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

Für $n=-1$ ist z.B. $\sum_{k}\begin{bmatrix}-1\\k\end{bmatrix}x^{k}=\sum_{k}(-1)^{k}q^{-\binom{k+1}{2}}x^{k}$ und

$$(x+\varepsilon)^{-1}=(\varepsilon(\varepsilon^{-1}x+1))^{-1}=(1+\varepsilon^{-1}x)^{-1}\varepsilon^{-1}=\sum_{k}(-1)^{k}(\varepsilon^{-1}x)^{k}\varepsilon^{-1}=\sum(-1)^{k}q^{-\binom{k+1}{2}}x^{k}\varepsilon^{-k-1}.$$

Koeffizientenvergleich liefert auch die Tatsache, dass die Rekursionsformel für die Rogers-Szegö Polynome auch für negative n richtig bleibt.
Es gilt also $(1-q^{-n-1})xr_{-n}(x,1)=(1+x)r_{-n+1}(x,1)-r_{-n+2}(x,1)$ mit den Anfangswerten
$r_{0}(x,1)=1,r_{-1}(x,1)=\sum_{k}\begin{bmatrix}-1\\k\end{bmatrix}x^{k}=\sum_{k}(-1)^{k}q^{-\binom{k+1}{2}}x^{k}.$

Wir erhalten „schönere" Formeln, wenn wir q durch $\frac{1}{q}$ ersetzen. Dann ist

$\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}=(-1)^{k}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}.$ Wir erhalten dann die Folge formaler Potenzreihen

$$s_{n}(x):=r_{-n}(x,1)\Big|_{q\to q^{-1}}=\frac{(1+x)s_{n-1}(x)-s_{n-2}(x)}{(1-q^{n-1})x} \tag{2.26}$$

mit den Anfangswerten $s_0(x)=1, s_1(x)=\sum_k (-1)^k q^{\binom{k+1}{2}} x^k$.

Jetzt erhebt sich die Frage, wie sich die Gauß'schen Identitäten auf diesen Fall erweitern lassen, d.h. was man über $s_n(-1)$ aussagen kann.

Aus der Rekursionsformel (2.26) ergibt sich $s_n(-1)=\dfrac{s_{n-2}(-1)}{(1-q^{n-1})}$.

Das ergibt

$$s_{2n}(-1)=\sum_k q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} 2n+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})} \tag{2.27}$$

und

$$s_{2n+1}(-1)=\frac{\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})}. \tag{2.28}$$

Bemerkung

Für $n=1$ ergibt sich aus (2.27) $\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}[k+1]=\dfrac{1}{1-q}$. Das ist unmittelbar klar, denn

$$(1-q)\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}[k+1]=\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}(1-q^{k+1})=\sum_k \left(q^{\binom{k+1}{2}}-q^{\binom{k+2}{2}}\right)=1.$$

Aus einem Satz von Gauß folgt, dass der Zähler in (2.28) die Produktdarstellung $\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}}=\prod_{k\geq 1}\dfrac{1-q^{2k}}{1-q^{2k-1}}=\prod_{k\geq 1}(1-q^{2k})(1+q^k)$. besitzt. Damit lassen sich die beiden Formeln auch in der Gestalt $s_n(-1)=\prod_{k\geq 0}\dfrac{(1-q^{n+2k+1})}{(1-q^{2k+1})}=\prod_{k\geq 1}(1+q^k)(1-q^{n+2k+1})$ schreiben.

Die Äquivalenz der beiden Formeln folgt aus der Tatsache, dass

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots \tag{2.29}$$

gilt. Zum Beweis ergänze man die linke Seite mit $(1-q^2)(1-q^4)\cdots$. Dann ergibt sich

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}=\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\frac{(1-q^4)}{(1-q^2)}\frac{(1-q^6)}{(1-q^3)}\cdots=(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots.$$

(2.29) ist die analytische Form des berühmten Satzes von Euler, dass die Anzahl der Partitionen einer Zahl in ungerade Teile gleich der Anzahl der Partitionen in verschiedene Teile ist.
Daher gilt auch

$$s_n(-1)=\sum_k q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}=\prod_{k\geq 1}(1+q^k)(1-q^{n+2k-1})\ .$$

Wir wollen gleich eine Verallgemeinerung des Gauß'schen Resultats beweisen, nämlich die

Identität von Lebesgue

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(1\div x)^k}{(1\div q)^k}q^{\binom{k+1}{2}}=\prod_{k\geq 1}(1+q^k)(1-q^{2k-1}x). \tag{2.30}$$

Für $x=q$ reduziert sie sich auf die Gauß'sche Identität und für $x=q^n$ ergibt sich wegen $\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}=\frac{(1-q^{n+k-1})\cdots(1-q^n)}{(1\div q)^k}=\frac{(1\div q^n)^k}{(1\div q)^k}$ direkt die Formel für $s_n(-1)$.

Wir gehen von

$$(1+z\varepsilon)(1+qz\varepsilon)\cdots\frac{1}{(1\div x)^\infty}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1\div q)^k}z^k\varepsilon^k\frac{1}{(1\div x)^\infty}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1\div q)^k}\frac{z^k}{(1\div q^k x)^\infty}$$
$$=\frac{1}{(1\div x)^\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{k}{2}}(1\div x)^k z^k}{(1\div q)^k}$$
aus.

Wir können die linke Seite aber auch folgendermaßen schreiben:

$$(1+z\varepsilon)(1+qz\varepsilon)\cdots\frac{1}{(1\div x)^\infty}=(1+z\varepsilon)(1+qz\varepsilon)\cdots\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{(1\div q)^k}$$
$$=\sum_{k\geq 0}\frac{(1+q^k z)(1+q^{k+1}z)\cdots x^k}{(1\div q)^k}=(1+z)(1+qz)\cdots\sum_k\frac{x^k}{(1\div q)^k(1+z)\cdots(1+q^{k-1}z)}.$$

Wenn wir nun die beiden Seiten gleich setzen und überdies $z\to q$ übergehen lassen, erhalten wir

$$\frac{1}{(1\dot{-}x)^{\infty}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}(1\dot{-}x)^k}{(1\dot{-}q)^k}=(1+q)(1+q^2)\cdots\sum_k\frac{x^k}{(1\dot{-}q)^k(1+q)\cdots(1+q^k)}$$
$$=(1+q)(1+q^2)\cdots\sum_k\frac{x^k}{(1\dot{-}q^2)_{q^2}^k}=(1+q)(1+q^2)\cdots\frac{1}{(1-q^2x)(1-q^4x)\cdots},$$
woraus alles folgt.

Wir wollen nun auch eine endliche Version betrachten:

Polynomversion der Identität von Lebesgue

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dot{-}q^kx)^{n+1}}=\frac{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)}{(1-x)(1-q^2x)\cdots(1-q^{2n}x)}. \tag{2.31}$$

Für $q=1$ reduziert sich diese auf die triviale Aussage $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\sum_k\binom{n}{k}=\frac{2^n}{(1-x)^{n+1}}$.

Wenn wir in (2.31) $n\to\infty$ gehen lassen, ergibt sich
$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1\dot{-}q)^k}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dot{-}q^kx)^{\infty}}=\frac{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}{(1-x)(1-q^2x)(1-q^4x)\cdots}$, woraus sich durch Multiplikation mit $(1\dot{-}x)^{\infty}$ die Lebesgue'sche Identität ergibt.

Die linke Seite von (2.31) ist
$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{(1\dot{-}q^kx)^{n+1}}=\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k+1}{2}}\varepsilon^k\right)\frac{1}{(1\dot{-}x)^{n+1}}=(1\dot{+}q\varepsilon)^n\frac{1}{(1\dot{-}x)^{n+1}}.$$
Nun ist $(1\dot{+}q\varepsilon)^n(x^k)=(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})\cdots(1+q^{k+n})x^k$.

Daher ergibt sich
$$(1\dot{+}q\varepsilon)^n\left(\frac{1}{(1\dot{-}x)^{n+1}}\right)=(1\dot{+}q\varepsilon)^n\left(\sum_k\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}x^k\right)$$
$$=\sum_k\frac{(1-q^{n+k})\cdots(1-q^{k+1})}{(1\dot{-}q)^n}(1+q^{k+1})(1+q^{k+2})\cdots(1+q^{k+n})x^k$$
$$=\sum_k\frac{(1-q^{2k+2})\cdots(1-q^{2k+2n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)x^k$$
$$=(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^n)\sum_k\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_{q^2}x^k.$$
Damit ist wieder alles gezeigt.

Der allgemeine $q-$binomische Lehrsatz ist mit dem folgenden wichtigen Satz äquivalent:

Satz 2.8

Für $BA = qAB$ *und jedes* z *, das mit* A *und* B *kommutiert,* $Az = zA, Bz = zB,$ *gilt*

$$e(Az)e(Bz) = e((A+B)z). \tag{2.32}$$

Beweis

$$e(Az)e(Bz) = \sum_k \frac{A^k z^k}{[k]!}\sum_\ell \frac{B^\ell z^\ell}{[\ell]!} = \sum_n \frac{z^n}{[n]!}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k} = \sum_n \frac{z^n}{[n]!}(A+B)^n = e((A+B)z).$$

Wir wollen uns nun einige Spezialfälle anschauen:

1) Für $(A,B) = (x, -x\varepsilon)$ ergibt sich
$e(x)e(-x\varepsilon) = e(x(1-\varepsilon)).$
Das bedeutet $\sum_n \frac{x^n}{[n]!}\sum_n \frac{(-x\varepsilon)^n}{[n]!} = \sum_n \frac{(x(1-\varepsilon))^n}{[n]!}.$

Wendet man diese Identität auf das konstante Polynom 1 an, so ergibt sich wegen
$(x\varepsilon)^n = q^{\binom{n}{2}} x^n \varepsilon^n$ und $(1-\varepsilon)(1) = 0$

$$\sum_n \frac{x^n}{[n]!}\sum_n \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{[n]!} = 1,$$

d.h. $e(x)E(-x) = 1.$ Wir erhalten also nochmals (2.10).

2) Für $(A,B) = (x, a\varepsilon), a \in \mathbb{C},$ erhalten wir analog die erzeugende Funktion der Rogers-Szegö Polynome. Denn es gilt
$e(xz)e(a\varepsilon z) = e((x + a\varepsilon)z)$, d.h. $\sum_n \frac{x^n z^n}{[n]!}\sum_n \frac{(a\varepsilon)^n z^n}{[n]!} = \sum_n \frac{(x+a\varepsilon)^n z^n}{[n]!}$, und
wegen $(x + a\varepsilon)^n (1) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}$ nach Anwendung auf 1 schließlich

$$e(xz)e(az) = e(xz)e(a\varepsilon z)(1) = \sum_n \frac{(x \dotplus a)^n}{[n]!} z^n.$$

3) Wählt man $(A,B) = (-x\varepsilon, a\varepsilon),$ so ergibt sich
$e(-x\varepsilon z)e(a\varepsilon z) = e((a-x)\varepsilon z).$
Daraus folgt so wie oben wieder

$$\frac{e(az)}{e(xz)} = e(az)E(-xz) = \sum_n \frac{(a \dot{-} x)^n}{[n]!} z^n.$$

Als nächstes wollen wir den Operator $e(\varepsilon z)$ auf $e(ax)$ anwenden. Das ergibt

$$e(\varepsilon z)(e(ax))=\sum_k \frac{\varepsilon^k z^k}{[k]!}\left(\sum_\ell \frac{a^\ell x^\ell}{[\ell]!}\right)=\sum_k \frac{z^k}{[k]!}\left(\sum_\ell \frac{a^\ell q^{k\ell} x^\ell}{[\ell]!}\right)$$
$$=\sum_\ell \frac{a^\ell x^\ell}{[\ell]!}\sum_k \frac{(q^\ell z)^k}{[k]!}=\sum_\ell \frac{(ax)^\ell}{[\ell]!}e(q^\ell z).$$

Nun ist $e(\frac{x}{1-q})=\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)(1-q^n x)\cdots}=\frac{1}{(1\dot{-}x)^n}e(\frac{q^n x}{1-q}).$

Daher ist

$$e(q^\ell z)=(1\dot{-}(1-q)z)^\ell e(z). \tag{2.33}$$

Somit erhalten wir

$$e(\varepsilon z)(e(ax))=\sum_\ell \frac{(ax)^\ell}{[\ell]!}e(q^\ell z)=e(z)\sum_\ell \frac{(ax)^\ell (1\dot{-}(1-q)z)^\ell}{[\ell]!}=e(z)\frac{e(ax)}{e((1-q)axz)}. \tag{2.34}$$

Eine Folgerung ist

Satz 2.9

$$\sum_n \frac{(x\dot{+}1)^n (y\dot{+}1)^n}{[n]!}z^n=\frac{e(z)e(xz)e(yz)e(xyz)}{e((1-q)xyz^2)}. \tag{2.35}$$

Wir wissen schon, dass $\sum_n \frac{(y\dot{+}1)^n}{[n]!}v^n=e(yv)e(v)$ gilt, wenn y und v kommutieren. Daher ist

$$\sum_n \frac{(x\dot{+}1)^n (y\dot{+}1)^n}{[n]!}z^n=\sum_n \frac{(y\dot{+}1)^n}{[n]!}((x+\varepsilon)z)^n(1)=e(y(x+\varepsilon)z)e((x+\varepsilon)z)(1)$$
$$=e(yxz)e(yz\varepsilon)e(xz)e(\varepsilon z)(1)=e(z)e(xyz)e(yz\varepsilon)(e(xz))=e(z)e(xyz)\frac{e(xz)e(yz)}{e((1-q)yzxz)},$$

womit alles bewiesen ist.

Für $q=1$ reduziert sich (2.35) auf $e^{(x+1)(y+1)z}=e^{xyz}e^{xz}e^{yz}e^z$.

Aus

$$e((A+B)z)=e(Az)e(Bz)=e(Az)e(az)\frac{e(Bz)}{e(az)}=\sum_k \frac{(A\dot{+}a)^k}{[k]!}\sum_\ell \frac{(B\dot{-}a)^\ell}{[\ell]!}$$

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(A\dot{+}a)^k (B\dot{-}a)^{n-k}$$

für beliebiges $a\in\mathbb{C}$.

Für die $q-$Exponentialfunktion $E(z)$ gilt

Satz 2.10
Für $BA = qAB$ *gilt*

$$E(A+B) = E(B)E(A). \tag{2.36}$$

Das folgt sofort aus $E(z) = e(-z)^{-1}$.
Denn $E(A+B) = \left(e(-A-B)\right)^{-1} = \left(e(-A)e(-B)\right)^{-1} = e(-B)^{-1}e(-A)^{-1} = E(B)E(A)$.

Dagegen gilt für die $q-$Exponentialfunktion $e(z)$

Satz 2.11

$$\begin{aligned} e(Bz)e(Az) &= e(Az-(1-q)ABz^2)e(Bz) = e(Az+Bz-(1-q)ABz^2) \\ &= e(Az)e((q-1)ABz^2)e(Bz) = e(Az)e(Bz-(1-q)ABz^2). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Beweis

$$e(Bz)e(Az) = \sum_{k,\ell} \frac{B^k A^\ell z^{k+\ell}}{[k]![\ell]!} = \sum_{k,\ell} \frac{q^{k\ell} A^\ell B^k z^{k+\ell}}{[k]![\ell]!} = \sum_\ell \frac{A^\ell z^\ell}{[\ell]!} e(q^\ell Bz) = \sum_\ell \frac{A^\ell z^\ell}{[\ell]!} (1 \mathbin{\underset{\cdot}{-}} (1-q)Bz)^\ell e(Bz)$$

nach (2.33).

Nun zeigt man sofort mit Induktion, dass $A^\ell (1 \mathbin{\underset{\cdot}{-}} (1-q)Bz)^\ell = \left(A(1-(1-q)Bz)\right)^\ell$ gilt.

Daher ist $e(Bz)e(Az) = e(Az-(1-q)ABz^2)e(Bz)$. Wegen
$B(A-(1-q)ABz) = q(A-(1-q)ABz)B$ gilt auch
$e(Az-(1-q)ABz^2)e(Bz) = e(Az+Bz-(1-q)ABz^2)$.
Aus $(B-(1-q)ABz)A = qA(B-(1-q)ABz)$ ergibt sich der Rest.
Wegen des Auftretens von z^2 gibt es für die Koeffizienten keine schönen Beziehungen.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, treten sehr oft formale Potenzreihen in einer Unbestimmten x auf, deren Koeffizienten rationale Funktionen in der Unbestimmten q sind. Wir bezeichnen die Menge dieser formalen Potenzreihen mit $\mathbb{C}(q)[[x]]$. Diese bilden klarerweise einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}(q)$ der rationalen Funktionen in q und außerdem einen Ring bezüglich der Multiplikation.
Das innere Produkt $\left\langle x^k, x^\ell \right\rangle$ lässt sich auf Paare $f(x)$ und $g(x)$ aus $\mathbb{R}(q)[[x]]$ erweitern, falls eine der beiden Reihen abbricht, d.h. ein Polynom aus $\mathbb{R}(q)[x]$ ist. Denn

$$\left\langle \sum_k a_k(q)x^k, \sum_\ell b_\ell(q)x^\ell \right\rangle = \sum_{k,\ell} a_k(q)b_\ell(q)[k]![k=\ell] = \sum_{k\geq 0} a_k(q)b_k(q)[k]!$$

ist endlich, weil eine der beiden Folgen nur endlich viele nicht verschwindende Werte hat.
Ist $f(x) = \sum_k a_k x^k$ eine formale Potenzreihe mit reellen Koeffizienten, dann ist der adjungierte Operator zum Multiplikationsoperator mit $f(x)$ der Operator $f(D) = \sum_k a_k D^k$,

weil $\left\langle f(x)x^m, x^n \right\rangle = \sum_k a_k \left\langle x^k \cdot x^m, x^n \right\rangle = \sum_k a_k \left\langle x^m, D^k x^n \right\rangle = \left\langle x^m, \sum_k a_k D^k x^n \right\rangle = \left\langle x^m, f(D)x^n \right\rangle$

ist.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

1) Der Operator $e(aD)=\sum_{n\geq 0}\frac{a^n D^n}{[n]!}$ ist ein $q-$Analogon des Operators $e^{aD_1}=\sum_n \frac{a^n D_1^n}{n!}$.
Dieser erfüllt auf Grund des Taylor'schen Lehrsatzes
$e^{aD_1}f(x)=\sum_k \frac{a^k}{k!}f^{(k)}(x)=f(x+a)$, stimmt also mit dem Verschiebungsoperator
$T_a f(x)=f(x+a)$ überein.
Nun ist $e(aD)x^n=\sum_k \frac{a^k D^k}{[k]!}x^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}a^k x^{n-k}=(x\dotplus a)^n=(x+a\varepsilon)^n(1).$ Daher gilt für jedes Polynom $f(x)$

$$e(aD)f(x)=f(x+a\varepsilon)(1). \tag{2.38}$$

Das ist also auch eine Art Verschiebungsoperator.

Ist $\sum_k a_k(x)z^k$ eine formale Potenzreihe, deren Koeffizienten Polynome in $\mathbb{C}(q)[x]$ sind, dann definieren wir $e(aD)(\sum_k a_k(x)z^k)=\sum_k e(aD)(a_k(x))z^k.$ Das ist wieder eine wohldefinierte formale Potenzreihe mit Polynomkoeffizienten. Speziell ergibt sich

$$e(aD)(e(xz))=e((x+a\varepsilon)z)(1)=\sum_n \frac{(x\dotplus a)^n}{[n]!}z^n=e(az)e(xz). \tag{2.39}$$

2) Der Operator $E(-aD)=\frac{1}{e(aD)}=\sum_k(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{a^k D^k}{[k]!}$ erfüllt

$$\frac{1}{e(aD)}(x^n)=\sum_k(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{a^k D^k}{[k]!}(x^n)=\sum_k(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}a^k x^{n-k}=(x\dot{-}a)^n. \tag{2.40}$$

Speziell ist also
$$\frac{1}{e(aD)}e(xz)=\sum\frac{(x\dot{-}a)^n}{[n]!}z^n=\frac{e(xz)}{e(az)}.$$

Derartige Differentialoperatoren sind auch in anderen Fällen sehr nützlich.
Aus $e(qx)=(1-(1-q)x)e(x)$ ergibt sich z.B.

$$\frac{1}{1-(1-q)D}((x\dot{-}1)^n)=\frac{1}{1-(1-q)D}\frac{1}{e(D)}(x^n)=\frac{1}{e(qD)}(x^n)=(x\dot{-}q)^n. \tag{2.41}$$

Eine direkte Verifikation ist etwas mühsamer:
Aus $\frac{1}{1-(1-q)D}=\sum_k(1-q)^k D^k$ folgt
$$\frac{1}{1-(1-q)D}((x\dot{-}1)^n)=\sum_k(1-q)^k[n][n-1]\cdots[n-k+1](x\dot{-}1)^{n-k}=\sum(1-q^n)\cdots(1-q^{n-k+1})(x\dot{-}1)^{n-k}.$$

Andererseits lässt sich $(x\dot{-}q)^n$ als Linearkombination $\sum a_k(x\dot{-}1)^{n-k}$ schreiben. Dabei ergibt sich

$[n-k]!a_k = D^{n-k}((x \div q)^n)\Big|_{x=1} = [n]\cdots[k+1](1\div q)^k$, woraus wieder alles folgt.

Aus (2.41) ergibt sich

$$(x \div 1)^n = \left((x-1)\frac{1}{1-(1-q)D}\right)^n 1. \qquad (2.42)$$

Denn das stimmt für $n=0$ und ergibt sich mit Induktion aus
$\left((x-1)\frac{1}{1-(1-q)D}\right)((x\div 1)^n) = (x-1)(x\div q)^n = (x\div 1)^{n+1}.$

Als Anwendung wollen wir zwei verschiedene q – Analoga der Identität $\sum_k \frac{t^k}{(1+t)^{k+1}} = 1$

geben, die sich aus $\sum_k (-1)^k (x-t)^k = \frac{1}{1+x-t} = \frac{1}{1+x}\frac{1}{1-\frac{t}{1+x}} = \sum_k \frac{t^k}{(1+x)^{k+1}}$ für $x=t$ ergibt.

Solche q – Analoga zu finden, ist in vielen Fällen ein Glücksfall, weil man a priori nicht weiß, bei welchen Abänderungen sich schöne Formeln ergeben.

Ein q – Analogon der linken Seite ist $\sum_k (-1)^k (x \div t)^k$. Das kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\sum_k (-1)^k (x\div t)^k = \sum_k (-1)^k \frac{1}{e(tD)} x^k = \frac{1}{e(tD)}\frac{1}{1+x} =$$

$$= \sum_k (-1)^k \frac{q^{\binom{k}{2}} t^k D^k}{[k]!}\frac{1}{1+x} = \sum_k q^{\binom{k}{2}} t^k \frac{1}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^k x)},$$

weil

$$D^k \frac{1}{1+ax} = (-a)^k \frac{[k]!}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^k x)}, \qquad (2.43)$$

gilt, wie man sofort nachrechnet. (vgl. (2.24).)

Für $t = x$ reduziert sich das auf

$$\sum_k q^{\binom{k}{2}} \frac{t^k}{(1+t)(1+qt)\cdots(1+q^k t)} = 1. \qquad (2.44)$$

Ein anderes q – Analogon der linken Seite ist $\sum_k (-1)^k r_k(x,-t)$. Das kann auf folgende Weise umgeformt warden:

$$\sum_k (-1)^k r_k(x,-t) = \sum_k (-1)^k e(-tD)x^k = e(-tD)\frac{1}{1+x} =$$
$$= \sum_k (-1)^k \frac{t^k D^k}{[k]!}\frac{1}{1+x} = \sum_k t^k \frac{1}{(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^k x)}.$$

Für $x = t$ ist $r_k(t,-t) = t^k r_k(1,-1)$ und daher erhalten wir

$$\sum_k \frac{t^k}{(1+t)(1+qt)\cdots(1+q^k t)} = \sum_{k\geq 0}(1-q)\cdots(1-q^{2k-1})t^{2k}. \tag{2.45}$$

Analog ergibt sich als q – Analogon der Identität
$$\sum_{n\geq 0} z^n(1-a)^n = \frac{1}{1-z(1-a)} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1+\frac{az}{1-z}} = \sum_{k\geq 0}\frac{a^k z^k}{(1-z)^{k+1}}$$
die Formel
$$\sum_{n\geq 0} z^n(1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}a)^n = \sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{a^k z^k}{(1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}z)^{k+1}}. \tag{2.46}$$

Denn aus $\frac{e(D)}{e(aD)} = \sum_k (1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}a)^k \frac{D^k}{[k]!}$ folgt $(1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}a)^n = L\frac{e(D)}{e(aD)}(x^n).$

Somit ergibt sich unter Verwendung von (2.43)

$$\sum_{n\geq 0} z^n(1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}a)^n = L\frac{e(D)}{e(aD)}\left(\sum_n x^n z^n\right) = L\frac{e(D)}{e(aD)}\left(\frac{1}{1-xz}\right) = Le(D)\sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{D^k}{[k]!}\left(\frac{1}{1-xz}\right)$$
$$= Le(D)\left(\sum_k (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{a^k z^k}{(1\mathbin{\underset{\cdot}{-}}xz)^{k+1}}\right).$$

Damit ist alles gezeigt, da $Le(D)(f(x)) = f(1)$ ist. Das folgt sofort aus
$Le(D)(x^n) = L(x\dotplus 1)^n = 1 = 1^n.$