Elementare q-Identitäten

Johann Cigler

1. Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der $q-$Analysis, des so genannten Quantum Calculus gelegt. Es geht dabei um ein diskretes Analogon der Differentialrechnung, bei dem die formale Analogie zur Differentialrechnung wesentlich enger ist als bei der klassischen Differenzenrechnung. Wir beschränken uns dabei auf den Vektorraum $\mathbb{C}[x]$ der Polynome in x. Dieser stellt eine ideale Spielwiese dar, weil auf ihm die Differentiation und die Multiplikation mit x ohne Einschränkungen definiert sind und als lineare Operatoren interpretiert werden können, die außerdem bezüglich eines inneren Produkts adjungiert zueinander sind. Weiters sind dort die Taylorentwicklung und der binomische Lehrsatz äquivalent. Dasselbe gilt auch für ihre $q-$Analoga.

Sei $\mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome in x über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Einer der wichtigsten Begriffe der Analysis ist der Differentiationsoperator D_1, d.h. der lineare Operator auf $\mathbb{C}[x]$, der durch $D_1 f(x) = \lim\limits_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ für $f \in \mathbb{C}[x]$ definiert ist. Er ist auf $\mathbb{C}[x]$ charakterisiert durch $D_1 x^n = nx^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.
Es gibt im wesentlichen zwei diskrete Analoga des Differentiationsoperators D_1. Das sind der Differenzenoperator Δ_h, definiert durch $\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und der $q-$Differentiationsoperator D_q, definiert durch

$$D_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x} = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}, \tag{1.1}$$

für $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
Diese Operatoren können ebenfalls durch ihre Wirkung auf eine Basis von $\mathbb{C}[x]$ charakterisiert werden. Für Δ_h sind das die Polynome $(x)_{n,h} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h).$ Hier gilt $\Delta_h (x)_{n,h} = n(x)_{n-1,h}$.
Für den $q-$Differentiationsoperator sind es wieder die Monome $x^n,$ welche nun

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n-1}{q-1} x^{n-1} = [n]x^{n-1} \tag{1.2}$$

erfüllen. Dabei ist

$$[n] = \frac{q^n-1}{q-1} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} \tag{1.3}$$

ein so genanntes $q-$Analogon der natürlichen Zahl n, weil dieser Ausdruck für $q=1$ mit n zusammenfällt.

Es ist klar, dass $\lim_{h\to 0}\Delta_h = \lim_{q\to 1} D_q = D_1$ auf $\mathbb{C}[x]$ ist.
Der Operator Δ_h führt auf die klassische Differenzenrechnung, die in meinem Skriptum „Konkrete Analysis“ behandelt wird, das man von meiner Homepage herunter laden kann.

Der Operator D_q erweist sich überraschenderweise als wesentlich schöneres diskretes Analogon des Differentiationsoperators, weil die formale Analogie zur Differentialrechnung noch enger und interessanter ist als bei der Differenzenrechnung und führt zur $q-$ Analysis, dem so genannten „Quantum Calculus“, da sie auch in der Quantentheorie eine große Rolle spielt. Hier gibt es auch interessante Querverbindungen zur Theorie der Partitionen natürlicher Zahlen und zu verschiedensten $q-$ Identitäten der klassischen Mathematik.
Es ist a priori schwer zu sagen, warum das so ist. Es scheint ein glücklicher Zufall zu sein, der durch mehrere schöne Resultate zustande kommt, wie wir noch sehen werden.

In der Differentialrechnung spielt die Produktformel $(fg)' = f'g + fg'$ eine wichtige Rolle. Diese kann auf $\mathbb{C}[x]$ folgendermaßen interpretiert werden: Sei D_1 der Differentiationsoperator, der durch $D_1(g(x)) = g'(x)$ für $g(x)\in\mathbb{C}[x]$ definiert ist. Für festes $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ sei $\underline{f}$ (oder $\underline{f}(x)$) der Multiplikationsoperator mit $f(x)$, der durch $\underline{f}(g(x)) = f(x)g(x)$ gegeben ist. Dann lässt sich die Produktformel auch in der Gestalt $D_1\underline{f} = \underline{f'} + \underline{f}D_1$ schreiben. Aus ihr ist ersichtlich, dass die linearen Operatoren D_1 und $\underline{f}$ nicht kommutieren, sondern dass ihre Differenz durch $D_1\underline{f}(x) - \underline{f}(x)D_1 = \underline{f'}(x)$ gegeben ist. Speziell ist also $D_1\underline{x} - \underline{x}D_1 = I$, wobei I die Identität bedeutet. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass diese Identität eine der Grundlagen der Analysis bildet. Sie ist auch (fortgesetzt auf quadratisch integrierbare Funktionen) in der Quantenmechanik unentbehrlich. Man denke nur an die Heisenberg’sche Unschärferelation, die aus ihr folgt. Ihre $q-$ Analoga werden daher im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

Für den $q-$ Differentiationsoperator lautet die Produktformel

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x) = g(x)D_q f(x) + f(qx)D_q g(x). \qquad (1.4)$$

Sie ergibt sich aus
$$D_q(f(x)g(x)) = \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x} = \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(qx) + f(x)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x}$$
$$= g(qx)D_q f(x) + f(x)D_q g(x) = f(x)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) + (q-1)xD_q f(x)\cdot D_q g(x)$$
und der Symmetrie zwischen $f(x)$ und $g(x)$.
Wir formulieren sie ebenfalls mit Hilfe linearer Operatoren auf $\mathbb{C}[x]$. Sei ε der lineare Operator, der durch $\varepsilon g(x) = g(qx)$ für alle $g\in\mathbb{C}[x]$ definiert ist. Dann schreibt sich (1.4) in der folgenden Form:

$$D_q\underline{f}(x) = \underline{f}(qx)D_q + (\underline{D_q f})(x) \qquad (1.5)$$

bzw.
$$D_q\underline{f}(x) = \underline{f}(x)D_q + (\underline{D_q f})(x)\varepsilon. \qquad (1.6)$$

Für $f(x)=x$ ergibt das

$$D_q\underline{x}-q\underline{x}D_q = I \tag{1.7}$$

bzw.

$$D_q\underline{x}-\underline{x}D_q = \varepsilon. \tag{1.8}$$

Für $q\to 1$ reduziert sich das auf $D_1\underline{x}-\underline{x}D_1 = I$. Man sieht schon hier, dass sich in der $q-$Analysis klassische Identitäten meistens in doppelter Version spiegeln.
Um die Formulierung der Formeln nicht zu umständlich zu machen, wollen wir im Folgenden meistens D statt D_q, $f'(x)$ statt $D_q(f(x))$ und kurz $f(x)$ statt $\underline{f}(x)$ für den entsprechenden Multiplikationsoperator schreiben. Um zwischen der $q-$Ableitung $f'(x)$ und der Hintereinanderausführung von D und $\underline{f}$ klar zu unterscheiden, schreiben wir $f'(x)=D(f(x))$ mit Klammern und $D\underline{f} = Df = Df(x)$ ohne Klammern.
Wir schreiben also (1.5) in der Form $Df(x)-f(qx)D=f'(x)$ und (1.6) in der Form $Df(x)-f(x)D=f'(x)\varepsilon.$

Beachtet man, dass $(x^k)'=D(x^k)=\left[k\right]x^{k-1}$ ist, so folgt aus (1.5) und (1.6), dass

$Dx^k-q^kx^kD=[k]x^{k-1}$ bzw. $Dx^k-x^kD=[k]x^{k-1}\varepsilon$ gilt.

Wenden wir diese Formeln auf $x^n\in\mathbb{C}[x]$ an, so ergibt sich $[n+k]-q^k[n]=[k]$ bzw. $[n+k]-[n]=[k]q^n$, was natürlich auch direkt aus der Definition von $[n]$ folgt.

Bemerkung
Die allgemeine Formel (1.5) folgt bereits ohne zusätzliche Informationen aus (1.7).
Denn zunächst gilt $Dx^k-q^kx^kD=[k]x^{k-1}$ für beliebige $k\in\mathbb{N}$ mit Induktion. Denn für $k=1$ ist das (1.7). Ist es für k bereits bewiesen, dann folgt
$Dx^{k+1}-q^{k+1}x^{k+1}D=(Dx^k-q^kx^kD)x+q^kx^k(Dx-qxD)=\left[k\right]x^{k-1}x+q^kx^k=\left[k+1\right]x^k.$
Wenn die Formel für alle k bereits bewiesen ist, dann gilt sie auch für alle Linearkombinationen $f(x)=\sum a_kx^k$. Denn
$Df(x)-f(qx)D=\sum a_k(Dx^k-q^kx^kD)=\sum a_k\left[k\right]x^{k-1}=f'(x).$
Wir nennen diese Argumentation das Linearisierungsprinzip. Wir werden es im Folgenden noch öfter anwenden.

In der klassischen Analysis liefert das Linearisierungsprinzip, dass im Vektorraum $\mathbb{C}[x]$ der binomische Lehrsatz und der Taylor'sche Lehrsatz äquivalent sind.
Der Taylor'sche Lehrsatz besagt, dass jedes Polynom eine eindeutige (abbrechende) Darstellung der Gestalt

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1.9}$$

besitzt. Wendet man diese Formel auf $f(x)=x^n$ an, so erhält man eine Version des binomischen Lehrsatzes, nämlich

$$x^n=\sum_k\binom{n}{k}a^{n-k}(x-a)^k. \tag{1.10}$$

Aus dieser folgt mit dem Linearisierungsprinzip wieder der Taylor'sche Lehrsatz. Denn (1.10) bedeutet, dass $z^n = L_a \sum_k \frac{(x^n)^{(k)}}{k!}(z-a)^k$ gilt, wobei $L_a f(x) = f(a)$ bedeutet, dass also der $q-$Taylor'sche Lehrsatz für $f(x) = x^n$ gilt. Da L_a ein lineares Funktional ist, ergibt sich alles wie oben.

Wir benötigen im Folgenden auch die $q-$Faktoriellen $[n]! = [1][2]\cdots[n]$ und die $q-$Binomialkoeffizienten

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \tag{1.11}$$

für $0 \le k \le n$. Diese reduzieren sich natürlich für $q=1$ auf die üblichen Binomialkoeffizienten. Für $k < 0$ und $k > n$ setzt man $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0.$

Es ist zweckmäßig, auf $\mathbb{R}[x]$ ein bilineares inneres Produkt durch

$$\left\langle x^k, x^\ell \right\rangle = [k]![k=\ell] \tag{1.12}$$

einzuführen. Dieses lässt sich auch folgendermaßen beschreiben: Sei L das lineare Funktional auf dem Vektorraum der Polynome, das durch $Lf(x) = f(0)$ definiert ist. Dann gilt

$$\left\langle x^k, x^\ell \right\rangle = \left\langle x^\ell, x^k \right\rangle = LD^k(x^\ell). \tag{1.13}$$

Ist $f(x) = \sum_k \frac{a_k}{[k]!} x^k,$ dann ergibt sich $a_k = \left\langle f(x), x^k \right\rangle = LD^k(f(x)) = f^{(k)}(0).$

Anders ausgedrückt: für jedes Polynom $f(x)$ gilt die

q-Taylor-Formel

$$f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{[k]!} x^k.$$

Bemerkung

Für $q=1$ hat die Fortsetzung des inneren Produkts auf $\mathbb{C}[x]$ die explizite Darstellung

$\left\langle f(x), g(x) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} dxdy,$ wenn man wie üblich die komplexe Zahl z in der Form $z = x+iy$ schreibt. Die Vervollständigung bezüglich dieses inneren Produktes ist ein Hilbertraum analytischer Funktionen, der in der Physik als Fockraum bezeichnet wird.

Die Monome $\frac{x^n}{\sqrt{n!}}$ bilden dort eine orthonormale Basis.

Mit Hilfe des inneren Produktes können wir jedem linearen Operator A einen adjungierten Operator A^t zuordnen durch $\left\langle Ax^k, x^\ell \right\rangle = \left\langle x^k, A^t x^\ell \right\rangle$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}.$ Dieser ist nach dem eben Gezeigten dadurch eindeutig bestimmt und erfüllt natürlich $(A^t)^t = A.$

Für den Multiplikationsoperator $A = x$ ergibt sich

$$x^t = D, D^t = x. \tag{1.14}$$

Denn

$\left\langle x \cdot x^k, x^\ell \right\rangle = LD^\ell(x^{k+1}) = [\ell]![\ell = k+1] = [\ell]![k = \ell - 1] = [\ell][\ell - 1]![k = \ell - 1]$

$= \left\langle x^k, [\ell] x^{\ell-1} \right\rangle = \left\langle x^k, D(x^\ell) \right\rangle.$

Weiters ist $\varepsilon^t = \varepsilon.$

Allgemein gilt $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t, (AB)^t = B^t A^t.$

Ist also $f(x) = \sum a_k x^k$ mit reellen Koeffizienten, so ist der zum Multiplikationsoperator $\underline{f}(x)$ adjungierte Operator gegeben durch $f(D) = \sum a_k D^k.$

Speziell ist $Lf(D)(g(x)) = \langle f(x), g(x) \rangle = \langle g(x), f(x) \rangle = Lg(D)(f(x)).$

Zum Beispiel ist $Lf(D)(x) = LD(f(x)) = Lf'(x) = f'(0).$

Jede Operatoridentität geht durch Transposition wieder in eine Operatoridentität über. Beispielsweise folgt aus (1.5) und (1.6)

$$f(D)x = xf(qD) + f'(D) \tag{1.15}$$

und

$$f(D)x = xf(D) + \varepsilon f'(D). \tag{1.16}$$

Speziell ist also $D^k x = x(qD)^k + [k] D^{k-1}.$ Wendet man diese Identität auf x^n an und beachtet, dass $D^k \dfrac{x^n}{[k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}$ ist, so erhält man eine Rekursionsformel für die q-Binomialkoeffizienten:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Genau so erhält man aus $D^k x = xD^k + \varepsilon [k] D^{k-1}$ eine weitere Rekursionsformel

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

Bemerkung

Man hätte diese Rekursionen natürlich auch direkt aus der Definition der $q-$Binomialkoeffizienten erhalten können. Wir wollen im Folgenden oft eine Formel der Gestalt $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k$ in der Form $\sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k$ oder $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k$ schreiben. Das ist möglich, weil wir $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ setzen, wenn k nicht zwischen 0 und n liegt. Außerdem gelten die Rekursionsformeln (1.17) und (1.18) für alle $k \in \mathbb{Z}.$ Das erspart bei Koeffizientenvergleich viele lästige Ausnahmefälle am Rand des Intervalls. Beachtet man $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$, so folgt (1.18) sofort aus (1.17), wenn man k durch $n+1-k$ ersetzt.

Umgekehrt kann man aus (1.17) und (1.18) sofort die Formel für $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ableiten.

Wir formulieren das als

Satz 1.1
Sei $c_{n,k}$ eine Folge, welche $c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + q^k c_{n-1,k}$ und $c_{n,k} = q^{n-k} c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k}$ erfüllt. Dann gilt $c_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} c_{n-k,0}$.

Beweis
Aus beiden Gleichungen kann man $c_{n-1,k}$ eliminieren und erhält
$c_{n,k} - c_{n-1,k-1} = q^k c_{n,k} - q^n c_{n-1,k-1}$. Das bedeutet $c_{n,k} = \frac{1-q^n}{1-q^k} c_{n-1,k-1} = \frac{[n]}{[k]} c_{n-1,k-1}$. Somit ist
$c_{n,k} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k][k-1]\cdots[1]} c_{n-k,0} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} c_{n-k,0}$.

Man beachte, dass das hier so einfach geht, weil man zwei Rekursionsformeln zur Verfügung hat. Die Situation für $q-$Binomialkoeffizienten ist also einfacher als für die gewöhnlichen Binomialkoeffizienten, wo man aus der Rekursionsformel die explizite Formel nicht so direkt ableiten kann.

Analog zum Fall der Binomialkoeffizienten kann man die $q-$Binomialkoeffizienten in Matrixform schreiben und erhält dann die q-Pascal'sche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1+q & 1 & & \\ 1 & 1+q+q^2 & 1+q+q^2 & 1 & \\ 1 & 1+q+q^2+q^3 & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & 1+q+q^2+q^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun ein $q-$Analogon des Taylor'schen Lehrsatzes (1.9) suchen. Dazu benötigen wir ein $q-$Analogon der Polynome $(x-a)^n$. Wir schauen also, ob es Polynome $p_n(x,a)$ gibt, so dass jedes $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ eine eindeutige Darstellung $f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(a)}{[k]!} p_k(x,a)$ hat.

Wenn es solche Polynome gibt, dann muss speziell $p_n(x,a) = \sum_k \frac{p_n^{(k)}(a,a)}{[k]!} p_k(x,a)$ gelten.

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung ergibt sich daraus $p_n^{(k)}(a,a) = [n]![k=n]$. Weiters ist
$p_n{}'(x,a) = \sum_k \frac{p_n^{(k+1)}(a,a)}{[k]!} p_k(x,a) = \sum_k \frac{[n]![k+1=n]}{[k]!} p_k(x,a) = [n]\, p_{n-1}(x,a)$.

Es erhebt sich also die Frage, ob es auch für beliebige q eine Polynomfolge gibt, welche $D(p_n(x,a)) = [n]\, p_{n-1}(x,a)$ und $p_n(a,a) = [n=0]$ erfüllt.
Wir wollen schauen, wie so eine Folge ausschauen müsste.

$D(p_n(x,a)) = [n]\, p_{n-1}(x,a)$ bedeutet, dass $p_n(qx,a) - p_n(x,a) = (q^n - 1)x p_{n-1}(x,a)$ gilt. Daraus folgt $p_n(qa,a) = 0$ für $n > 1$ und daher mit Induktion $p_n(q^j a, a) = 0$ für $n > j$. Das Polynom $p_n(x,a)$ hat also die Nullstellen $a, qa, \cdots, q^{n-1}a$.
Da $Dp_0 = 0$ ist, muss p_0 konstant sein und wegen $p_0(a,a) = 1$ ist also $p_0(x,a) = 1$. Daraus folgt, dass $p_n(x,a)$ ein Polynom vom Grad n sein muss. Da dieses n Nullstellen hat, folgt $p_n(x,a) = c(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)$ mit einer Konstanten c, die sich mit Induktion als 1 ergibt. Man überprüft nun sofort, dass diese Polynome tatsächlich alle gewünschten Eigenschaften besitzen. Um die Analogie zum klassischen Fall hervorzuheben, bezeichnen wir sie mit $p_n(x,a) = (x \div a)^n$. Es gilt also der

Satz 1.2
Die eindeutig bestimmten Polynome $p_n(x,a)$ mit $p_n(a,a) = [n=0]$ und $D(p_n(x,a)) = [n]\, p_{n-1}(x,a)$ sind gegeben durch

$$p_n(x,a) = (x \div a)^n = (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k} x^k. \tag{1.19}$$

Es ist nur mehr die letzte Identität zu zeigen. Diese folgt jedoch sofort aus der $q-$Taylorformel. Denn setzt man $(x \div a)^n = \sum_k a_{n,k} x^k$, so ist

$$a_{n,k} = L\frac{D^k((x \div a)^n)}{[k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (0 \div a)^{n-k} = (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k}.$$

Mit den Polynomen $(x \div a)^n$ kann man also den Taylor'schen Lehrsatz für Polynome beweisen.

Satz 1.3 (q-Taylor'scher Lehrsatz für Polynome)
Für jedes $a \in \mathbb{C}$ ist die Taylor-Entwicklung des Polynoms $f(x)$ um a gegeben durch

$$f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(a)}{[k]!}(x \div a)^k.$$

Beweis
Die Polynome $(x \div a)^n, n \in \mathbb{N},$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}[x]$. Daher gibt es eine Entwicklung der Gestalt

$$f(x) = \sum_k a_k (x \div a)^k.$$

Wegen $D^k((x \div a)^n)\big|_{x=a} = [n]![n=k]$ ist $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Wählt man $f(x)=(x\underset{\cdot}{-}b)^n$, so ergibt sich daraus

$$(x\underset{\cdot}{-}b)^n=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (a\underset{\cdot}{-}b)^{n-k}(x\underset{\cdot}{-}a)^k. \tag{1.20}$$

Für $b=0$ ergibt sich speziell

$$x^n=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k}(x\underset{\cdot}{-}a)^k. \tag{1.21}$$

Wählt man in (1.20) $x=1, b=-z, a=0$, so erhält man

$$f_n(z)=(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z)=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} z^k. \tag{1.22}$$

Das ist ein schönes $q-$Analogon des binomischen Lehrsatzes $(1+z)^n=\sum \binom{n}{k} z^k$.

Wir schreiben auch $f_n(z)=(1\underset{\cdot}{+}z)^n$, wobei jedoch auf die Reihenfolge der Summanden zu achten ist. So gilt etwa $D\left((x\underset{\cdot}{+}1)^n\right)=[n](x\underset{\cdot}{+}1)^{n-1}$, während $D\left((1\underset{\cdot}{+}x)^n\right)=[n](1\underset{\cdot}{+}qx)^{n-1}$ ist.

Für die $q-$Binomialkoeffizienten gilt auch die
q-Vandermonde'sche Formel

$$\begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix} q^{(r-k)(n-k)}. \tag{1.23}$$

Sie ergibt sich durch Koeffizientenvergleich aus der Identität $(1\underset{\cdot}{+}z)^{r+s}=(1\underset{\cdot}{+}z)^r(1\underset{\cdot}{+}q^r z)^s$.
Ein wichtiger Spezialfall ist für $r=s=n$ die Formel

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} q^{(n-k)^2}=\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2 q^{k^2}.$$

Die Formel (1.22) ist nur *ein* $q-$Analogon des binomischen Lehrsatzes. Es gibt viele andere Formeln, die sich für $q\to 1$ auf den binomischen Lehrsatz reduzieren.

Eine abstrakte Version des $q-$binomischen Lehrsatzes ist

Satz 1.4 (Allgemeiner q-binomischer Lehrsatz)
Seien A, B Elemente einer Algebra über $\mathbb{C}$, welche die q-Kommutativitätsrelation

$$BA=qAB \tag{1.24}$$

erfüllen. Dann gilt

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}. \tag{1.25}$$

Beweis

Rechnet man $(A+B)^n$ aus, so ergibt sich eine Summe von Termen der Gestalt $C_1 \cdots C_n$ mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten, wo jedes C_i ein A oder B ist. Wegen der $q-$Kommutativität ist jeder dieser Ausdrücke von der Gestalt $q^i A^k B^{n-k}$. Dabei gibt k an, wie oft A in diesem Produkt auftritt. Wir können daher schreiben $(A+B)^n = \sum_k c_{n,k} A^k B^{n-k}$, wobei $c_{n,k}$ ein Polynom in q mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten ist.

Aus $(A+B)^n = (A+B)(A+B)^{n-1}$ ergibt sich

$\sum_k c_{n,k} A^k B^{n-k} = (A+B) \sum_k c_{n-1,k} A^k B^{n-k-1}$. Durch Koeffizientenvergleich folgt $c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + q^k c_{n-1,k}$, weil $BA^k = q^k A^k B$ ist.

Analog folgt aus $(A+B)^n = (A+B)^{n-1}(A+B)$, dass $\sum_k c_{n,k} A^k B^{n-k} = \sum_k c_{n-1,k} A^k B^{n-k-1}(A+B)$ ist. Daraus ergibt Koeffizientenvergleich $c_{n,k} = q^{n-k} c_{n-1,k-1} + c_{n-1,k}$.

Aus Satz 1.1 ergibt sich $c_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} c_{n-k,0}$. Wegen $c_{n,0} = 1$ für alle n ist alles bewiesen.

Bemerkung

Die Summe der Wörter $w = C_1 \cdots C_n$ mit den Buchstaben A, B, welche genau k mal den Buchstaben A enthalten, ergibt nach (1.25) genau $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}$. Bezeichnet man mit $inv(w)$ die Anzahl der Inversionen des Wortes w, d.h. die Anzahl, wie oft ein Buchstabe B links vor einem Buchstaben A steht, so gilt also für ein Wort w der Länge n, das aus k Buchstaben A und $n-k$ Buchstaben B besteht, $w = q^{inv(w)} A^k B^{n-k}$.

Das ergibt

Satz 1.5

Sei $W_{n,k}$ die Menge der Wörter $w = C_1 \cdots C_n$ der Länge n, die $k-$mal den Buchstaben A enthalten. Dann gilt

$$\sum_{w \in W_{n,k}} q^{inv(w)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Zum Beispiel ist $W_{4,2} = \{AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA\}$ mit $inw(AABB) = 0, inv(ABAB) = 1, inv(ABBA) = 2, inv(BAAB) = 2, inv(BABA) = 3, inv(BBAA) = 4.$

Daher ist $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = q^0 + q^1 + 2q^2 + q^3 + q^4.$

Es ist instruktiv, aus dieser Darstellung die Rekursionsformeln für die $q-$Binomialkoeffizienten abzuleiten:
Jedes Wort $w \in W_{n+1,k}$ beginnt entweder mit $A,$ d.h. ist von der Form $w = Au, u \in W_{n,k-1}$, mit $inv(w) = inv(u),$ oder es beginnt mit $B,$ ist also von der Form $w = Bv, v \in W_{n,k}$, mit $inv(w) = k + inv(v).$ Daher gilt

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{w \in W_{n+1,k}} q^{inv(w)} = \sum_{u \in W_{n,k-1}} q^{inv(u)} + q^k \sum_{v \in W_{n,k}} q^{inv(v)} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Die zweite Rekursionsformel ergibt sich, wenn man den letzten Buchstaben betrachtet.
Jedes Wort $w \in W_{n+1,k}$ endet entweder mit $A,$ d.h. ist von der Form $w = uA, u \in W_{n,k-1},$ mit $inv(w) = n+1-k+inv(u),$ oder es endet mit $B,$ ist also von der Form $w = vB, v \in W_{n,k}$, mit $inv(w) = inv(v).$ Daher gilt

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \sum_{w \in W_{n+1,k}} q^{inv(w)} = q^{n+1-k} \sum_{u \in W_{n,k-1}} q^{inv(u)} + \sum_{v \in W_{n,k}} q^{inv(v)} = q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Mit derselben Methode kann man noch einmal die $q-$Vandermonde'sche Formel ableiten.
Hier betrachtet man die Menge $W_{m+n,k}$ und zerlegt jedes Wort nach dem $m-$ten Buchstaben in der Form $w = uv$ mit $u \in W_{m,j}, v \in W_{n,k-j}$, für ein j mit $0 \leq j \leq k.$
Dann ist $inv(w) = inv(u) + (m-j)(k-j) + inv(v).$ Daher erhalten wir

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} q^{(m-j)(k-j)}.$$

Wir können ein Wort $w \in W_{n,k}$ kombinatorisch als einen Gitterweg im $\mathbb{R}^2$ interpretieren, der von $(0,0)$ nach $(n-k,k)$ geht und aus k vertikalen Aufstiegen der Länge 1 und $n-k$ horizontalen Stücken der Länge 1 besteht. Jedem solchen Weg w ist als Gewicht $q^{inv(w)}$ zugeordnet. Das Gesamtgewicht aller Gitterwege in $W_{n,k}$, d.h. die Summe der Gewichte aller solchen Gitterwege ist also $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Wählt man $q = 1$, so ergibt sich als Anzahl $\binom{n}{k}$. Das ist natürlich trivial, denn man kann aus n Wegstücken genau $\binom{n}{k}$ auswählen, die k Aufstiege besitzen.
Das Gewicht $q^{inv(w)}$ des Gitterweges w kann geometrisch als Flächeninhalt des Teiles des Rechteckes mit Höhe k und Länge $n-k$ gedeutet werden, der über dem Weg w liegt. Denn für jedes horizontale Stück ist die Anzahl der vertikalen Stücke, die rechts davon liegen, dasselbe wie der Flächeninhalt über dem horizontalen Stück.

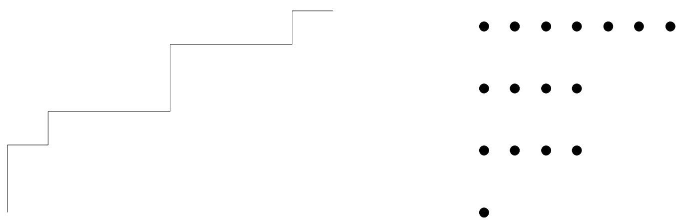
Eine eng damit verwandte kombinatorische Deutung von $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ist als erzeugende Funktion der Menge $P_{k,n-k}$ aller Partitionen λ mit $\ell \le k$ Teilen, wobei der größte Teil $\lambda_1 \le n-k$ ist.
Zur Erinnerung: Eine Partition λ einer Zahl N mit Länge ℓ ist eine Darstellung von N der Gestalt $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$ mit $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_\ell > 0.$ Man nennt λ_i die Teile von λ und schreibt $N = |\lambda|.$
Es gilt also

Satz 1.6
Die erzeugende Funktion der Menge $P_{k,n-k}$ aller Partitionen mit höchstens k Teilen, wobei jeder höchsten $n-k$ ist, ist gegeben durch

$$\sum_{\lambda \in P_{n,k}} q^{|\lambda|} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \tag{1.27}$$

Diese Aussage wird sofort klar, wenn man bedenkt, dass die horizontalen Stücke des Teiles des Rechteckes mit Höhe k und Länge $n-k$ eine Partition aus $P_{k,n-k}$ bilden und dass jede solche Partition einen Gitterweg w als unteren Rand besitzt.
Zum Beispiel entspricht dem Wort $AABABBBAABBBAB \in W_{14,6}$ mit $inv(w) = 16$ die Partition $\lambda = (7,4,4,1) \in P_{6,8}$ und umgekehrt.

Dieser Gitterweg und die zugehörige Partition schauen folgendermaßen aus:



Durch spezielle Wahl von A, B erhält man wichtige $q-$Analoga des binomischen Lehrsatzes.
Die linearen Operatoren $A = \underline{x}^a \varepsilon^b$ und $B = \underline{x}^c \varepsilon^d$ auf dem Vektorraum der Polynome erfüllen die $q-$Kommutativitätsrelation, falls $ad - bc = 1$ ist. Denn
$BAf(x) = Bx^a f(q^b x) = x^c (q^d x)^a f(q^{b+d} x) = q^{ad} x^{a+c} f(q^{b+d} x)$ und
$ABf(x) = Ax^c f(q^c x) = x^a (q^b x)^c f(q^{b+d} x) = q^{bc} x^{a+c} f(q^{b+d} x).$ Daraus folgt die Behauptung.
Geht man zu den Transponierten über, so haben auch $A = \varepsilon^d D^c$ und $B = \varepsilon^b D^a$ diese Eigenschaft.
Als Beispiel betrachten wir $(A,B) = (x\varepsilon, a\varepsilon)$ für $a \in \mathbb{C}.$
Hier gilt
$$(x\varepsilon + a\varepsilon)^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x\varepsilon)^k (a\varepsilon)^{n-k}.$$

Nun ist $(x\varepsilon + a\varepsilon)^n = (x+a)\varepsilon(x+a)\varepsilon\cdots(x+a)\varepsilon = (x+a)(qx+a)\cdots(q^{n-1}x+a)\varepsilon^n$

und $(x\varepsilon)^k = x\varepsilon x\varepsilon\cdots x\varepsilon = q^{\binom{k}{2}} x^k \varepsilon^k$. Also schreibt sich unsere Identität in der Form

$$(x+a)(qx+a)\cdots(q^{n-1}x+a)\varepsilon^n = \sum q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k} \varepsilon^n.$$

Wendet man diese Identität auf das konstante Polynom 1 an, so erhält man schließlich

$$(a \dotplus x)^n = (x+a)(qx+a)\cdots(q^{n-1}x+a) = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}.$$

Durch geeignete Wahl von x und a erhält man die obigen $q-$Analoga des binomischen Lehrsatzes.

Wählt man dagegen $(A,B) = (x, a\varepsilon)$, so ergibt sich

$$(x+a\varepsilon)^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (a\varepsilon)^{n-k}.$$

Damit erhält man

$$r_n(x,a) = (x+a\varepsilon)^n 1 = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}. \tag{1.28}$$

Das sind die sogenannten Rogers-Szegö Polynome. Die rechte Seite ist das „natürlichste“ $q-$Analogon des binomischen Lehrsatzes. Allerdings gibt es für die linke Seite keine explizite Formel. Stattdessen können wir eine Rekurrenz ableiten.

Statt $r_n(x,a)$ wollen wir wieder eine suggestivere Notation einführen. Wir schreiben hier $r_n(x,a) = (x \dotplus a)^n$. Hier sind die beiden Summanden symmetrisch, d.h. es gilt $(x \dotplus a)^n = (a \dotplus x)^n$.

Satz 1.7

Die Rogers-Szegö Polynome $r_n(x,a) = (x \dotplus a)^n$ *sind die eindeutig bestimmten Polynome* $p_n(x)$ *welche* $p_n'(x) = [n]\, p_{n-1}(x)$ *und* $p_n(0) = a^n$ *erfüllen.*

Beweis

Wenn es solche Polynome gibt, so ist $p_n(x) = \sum_k a_{n,k} x^k$ mit

$$a_{n,k} = L\frac{p_n^{(k)}(0)}{[k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p_{n-k}(0) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^{n-k}.$$

Wir müssen also nur zeigen, dass $\left(\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}\right)' = [n]\sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}$ gilt.

Das ist aber wegen $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]}{[k]} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ klar.

Satz 1.8

Die Rogers-Szegö Polynome $(x \dotplus a)^n$ *genügen der Rekurrenz*

$$(x \dotplus a)^n = (x+a)(x \dotplus a)^{n-1} + (q^{n-1}-1)ax(x \dotplus a)^{n-2}. \tag{1.29}$$

Beweis

Das folgt aus $(x+a\varepsilon)^n = (x+a\varepsilon)(x+a\varepsilon)^{n-1} = (x+a)(x+a\varepsilon)^{n-1} + (a\varepsilon - a)(x+a\varepsilon)^{n-1}$.
Denn $\varepsilon - 1 = (q-1)xD$ und daher ergibt sich durch Anwenden der obigen Gleichung auf das konstante Polynom 1
$(x \dotplus a)^n = (x+a)(x \dotplus a)^{n-1} + (q-1)axD(x \dotplus a)^{n-1} = (x+a)(x \dotplus a)^{n-1} + (q^{n-1}-1)ax(x \dotplus a)^{n-2}$.

Für $q=1$ reduziert sich natürlich alles auf die triviale Rekurrenz $(x+a)^n = (x+a)(x+a)^{n-1}$.

Wir erwähnen zwei Spezialfälle:
Für $x=a=1$ ergibt sich für $G_n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ die Rekurrenz $G_n = 2G_{n-1} + (q^{n-1}-1)G_{n-2}$.

Für $q=1$ reduziert sich das natürlich auf 2^n.

Für $x=-1, a=1$ ergibt sich

Satz 1.9 (Gauß'sche Identität)

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n+1 \\ k \end{bmatrix} = 0$$
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \begin{bmatrix} 2n \\ k \end{bmatrix} = (1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1}).$$

Beweis

Das folgt sofort aus $r_n(-1,1) = (1-q^{n-1})r_{n-2}(-1,1)$ und $r_0(-1,1)=1, r_1(-1,1)=0$.

Eine kleine Verallgemeinerung ist

Satz 1.10

$$(x \dotminus 1)^n = \sum_k (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ 2k \end{bmatrix} (x \dotminus 1)^{n-2k}(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2k-1}). \tag{1.30}$$

Beweis

Es existiert eine Darstellung $r_n(x,-1) = \sum_k c_{n,k}(x \dotminus 1)^{n-k}$. Dabei ist

$$c_{n,k} = \frac{D^{n-k} r_n(x,-1)}{[n-k]!}\Big|_{x=1} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} r_k(1,-1).$$

Satz 1.11

Für die Ableitungen eines Produktes gilt die Leibniz'sche Formel in der Gestalt

$$D^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (D^{n-k}(f))(q^k x) D^k(g(x)). \tag{1.31}$$

Das kann man mit Induktion beweisen.

Allerdings zeigt ein solcher Beweis nicht, warum die Formel dem binomischen Lehrsatz ähnlich sieht. Das sieht man aus der folgenden Überlegung.

Wir schreiben die obige Formel für $n=1$ in der Form

$$D_x(f(x)g(x)) = [(D_x f(x))g(y) + (\varepsilon_x f(x)) D_y g(y)]_{y=x}. \tag{1.32}$$

Hier betrachten wir D_x, D_y, ε_x als Operatoren auf dem Vektorraum der Polynome $h(x,y)$ von zwei Variablen x, y und deuten durch einen Index an, auf welche Variable der Operator wirken soll. Diese Operatoren erfüllen

$D_x(\varepsilon_x D_y) = q(\varepsilon_x D_y) D_x$, wie man sofort durch Anwendung auf Polynome $x^n y^m$ sieht.

Daher ist nach dem $q-$binomischen Lehrsatz

$$(D_x + \varepsilon_x D_y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \varepsilon_x^k D_y^k D_x^{n-k}.$$

Wenden wir das auf $f(x)g(y)$ an und setzen dann im Resultat $y = x$, so ergibt sich die Leibniz'sche Formel.
Etwas pedantischer formuliert haben wir folgendes gemacht:
Sei $A := D_x + \varepsilon_x D_y$ und $\mu : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x]$ die Abbildung von der Algebra der Polynome in zwei Unbestimmten in die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten, die durch $\mu(f(x,y)) = f(x,x)$ definiert ist. Dann bedeutet (1.32), dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x,y] & \xrightarrow[\mu]{} & \mathbb{C}[x] \\ A\downarrow & & \downarrow D \\ \mathbb{C}[x,y] & \xrightarrow[\mu]{} & \mathbb{C}[x] \end{array}$$

kommutiert.

Daher ist $D^n \circ \mu = \mu \circ A^n$ und das ist die gewünschte Formel.

In Operatorform lautet die Leibniz'sche Formel

$$D^n f(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (\varepsilon^k f^{(n-k)}(x)) D^k. \tag{1.33}$$

Wählt man hier $f(x)=x^{\ell}$, so ergibt sich

$$D^n x^{\ell} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[\ell]!}{[\ell-k]!} q^{(n-k)(\ell-k)} x^{\ell-k} D^{n-k}. \tag{1.34}$$

Wir erhalten also eine Formel, die angibt, wie die Potenzen von D und $\underline{x}$ kommutieren. Diese kann man auch direkt mit der $q-$Vandermonde Formel beweisen, indem man beide Seiten auf x^j für alle $j \in \mathbb{N}$ anwendet. Denn dann ergibt sich nach leichter Umformung

$$\begin{bmatrix} \ell+j \\ n \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} \ell \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ n-k \end{bmatrix} q^{(n-k)(\ell-k)}.$$

Wendet man (1.34) auf Linearkombinationen $\sum c_{\ell} x^{\ell}$ an, so ergibt sich wieder die allgemeine Leibniz'sche Formel.