

Fibonacci-Zahlen, Gitterpunktwege und die Identitäten von Rogers-Ramanujan

Johann Cigler

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

A-1090 Wien, Nordbergstraße 15

email: Johann.Cigler@univie.ac.at

Zusammenfassung

Die von I. Schur entdeckten Polynomversionen der Identitäten von Rogers – Ramanujan sind q – Analoga von Identitäten für die Fibonacci-Zahlen. Eine gemeinsame mathematische Wurzel dieser Identitäten ist ihre Interpretation als Anzahl bzw. Gewicht bestimmter Mengen von Gitterpunktwegen, die im Streifen $-2 \leq y \leq 1$ um die x – Achse liegen und deren Berechnung mit Hilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion. Diese Gitterpunktwege liefern einen einfachen Zugang zu den Rogers-Ramanujan Identitäten. Wie immer in der Mathematik spielen auch hier Analogien eine fundamentale Rolle. Um diese deutlich zum Ausdruck zu bringen, habe ich die Darstellung etwas breiter gehalten, als es sonst in der Mathematik üblich ist.

Zur Vorgeschichte

Erstaunlicherweise treten neue mathematische Ideen sehr oft an verschiedenen Orten unabhängig voneinander auf. Das war auch bei den **Rogers-Ramanujan Identitäten** der Fall, deren Entdeckung so unterschiedlichen Mathematikern wie **Leonard James Rogers** (1862-1933), **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920) und **Issai Schur** (1875 – 1941) zu verdanken ist.



Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920)

Der bekannteste unter ihnen ist wohl Ramanujan, ein wahrer Virtuose im Umgang mit Formeln, um den sich zahlreiche Legenden ranken. (Einen schönen Einblick in sein Leben und Wirken gibt [9]). Ramanujan stammte aus einer armen Brahmanen-Familie aus dem Süden Indiens. Er war seit frühester Jugend der Mathematik verfallen, die er im wesentlichen aus einer Formelsammlung lernte. Er brachte es zu keinem Universitätsabschluss, da seine Gedanken nur um Mathematik und Religion kreisten und alles andere ignorierten. Im Alter von 23 Jahren schrieb er an den berühmten Mathematiker G.H. Hardy und sandte ihm einige seiner Formeln. Hardy erkannte, dass er es mit einem außergewöhnlichen mathematischen Genie zu tun hatte und holte ihn nach England. In seinem kurzen tragischen Leben – er starb im Alter von 33 Jahren

an Tuberkulose - entdeckte Ramanujan eine Unzahl merkwürdiger Formeln, die er meistens ohne Beweis in seinen Notizbüchern aufschrieb. Einige Formeln sollen ihm von der Göttin Namagiri, die er sehr verehrte, im Traum offenbart worden sein. Um 1913 entdeckte er die Identitäten, um die es uns geht, und zahlreiche damit zusammenhängende Resultate. Allerdings gelang es ihm vorerst nicht, Beweise dafür zu finden.



Leonard James Rogers (1862-1933)

James Rogers war ein hervorragender englischer Mathematiker, dessen Leistungen jedoch von seinen Zeitgenossen kaum gewürdigt wurden. Außer Mathematik liebte er auch Sprachen und Musik, hatte aber eine Abneigung gegen alles, was mit Naturwissenschaft zusammen hing. Er hat die nach ihm benannten Identitäten im Jahre 1894 entdeckt und auch bewiesen. Seine Arbeiten blieben jedoch unbeachtet und wurden erst ab 1917 bekannt, nachdem Ramanujan bei der Durchsicht alter Bände der Proceedings of the London Mathematical Society auf sie gestoßen war.



Issai Schur (1875 – 1941)

Im Jahr 1917 entdeckte auch I. Schur diese Identitäten und fand zwei ganz anders geartete Beweise. Schur stammte ursprünglich aus Russland und studierte ab 1894 in Berlin. Einer seiner wichtigsten Lehrer war Frobenius. 1919 wurde er ordentlicher Professor in Berlin. Er arbeitete hauptsächlich über Gruppendarstellungen, schrieb aber auch Arbeiten über Zahlentheorie und Analysis und war ein hervorragender Vortragender, der viele Studenten anzog. Er war geradezu das Idealbild eines preußischen Professors. Umso tragischer war es, dass er 1935 gezwungen wurde, von seinem Amt zurückzutreten und später nach Israel auszuwandern. Dieser Schicksalsschlag hat sein Leben total zerstört.

Seit der mathematische Physiker **Rodney J. Baxter** 1981 bei der Untersuchung des so genannten „hard hexagon model“ noch einmal auf diese q – Identitäten gestoßen ist (vgl. [3] und [10]), spielen sie auch in der mathematischen Physik eine bedeutende Rolle.

Mittlerweile kennt man eine große Anzahl ganz unterschiedlicher Beweise (vgl. [2]). Jeder davon beleuchtet einen anderen Aspekt dieser Identitäten. Besonders interessant finde ich ihre Verwandtschaft mit den Fibonacci-Zahlen, die in der Mathematik ebenfalls an unerwarteten Stellen auftauchen (vgl. [4]). Aus heutiger Sicht beruht diese Verwandtschaft darauf, dass diese Identitäten eng mit bestimmten Mengen von Gitterpunktwegen, die im Streifen $-2 \leq y \leq 1$ um die x – Achse liegen, verknüpft sind.

Die Fibonacci-Zahlen

Die Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$ der **Fibonacci-Zahlen** F_n ist wohlbekannt und braucht daher nicht näher erläutert zu werden. Sie kann durch die Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (0.1)$$

mit den Anfangswerten

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad (0.2)$$

definiert werden.

Die Schur'schen Polynomversionen der Rogers-Ramanujan Identitäten sind q – Analoga der folgenden Formeln für die Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{\lfloor \frac{n+5i}{2} \rfloor} \quad (0.3)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} = F_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{\lfloor \frac{n+5i-1}{2} \rfloor}. \quad (0.4)$$

Dabei ist die linke Seite eine wohlbekannte Darstellung der Fibonacci-Zahlen, während die rechte Seite weniger bekannt sein dürfte. Es ist klar, dass auch rechts nur endlich viele Terme von Null verschieden sind. Z.B. reduziert sich (0.3) für $n = 6$ auf

$$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = F_7 = - \binom{6}{\lfloor \frac{6+5 \cdot (-1)}{2} \rfloor} + \binom{6}{\lfloor \frac{6+5 \cdot 0}{2} \rfloor} - \binom{6}{\lfloor \frac{6+5 \cdot 1}{2} \rfloor} = -1 + 20 - 6 = 13.$$

Die Formeln auf der rechten Seite lassen sich zwar relativ leicht verifizieren (vgl. z.B. [5]), wirklich verständlich und verallgemeinerungsfähig werden sie jedoch erst, wenn man die Fibonacci-Zahlen als Anzahlen von beschränkten Gitterwegen interpretiert und diese mit Hilfe des Prinzips der Inklusion-Exklusion berechnet. Das soll im ersten Teil dieses Artikels geschehen.

Um Formeln wie $F_{n+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-k}{k}$ ohne explizite Angabe der Grenzen schreiben zu können, wollen wir

abweichend von der üblichen Konvention $\binom{n}{k} = 0$ setzen, wenn $n < 0$ ist.

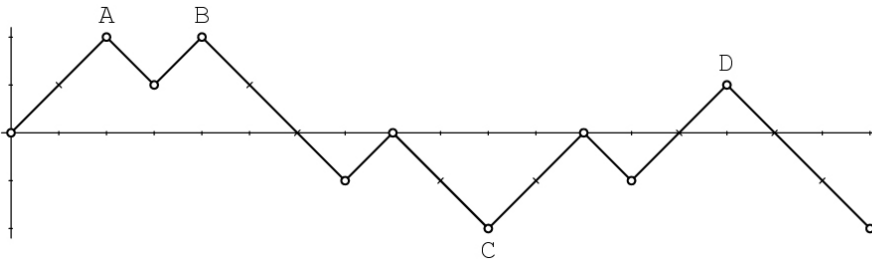
Gitterpunktwege.

Zum Beweis der Formeln (0.3) und (0.4) erweisen sich spezielle Gitterpunktwege, auf welche R.J. Baxter aus physikalischen Überlegungen gestoßen ist, als geeignete Hilfsmittel.

Definition der Gitterpunktwege.

Unter einem **Gitterpunktweg** der Länge n verstehen wir eine Folge von Gitterpunkten, d.h. Punkten mit ganzzahligen Koordinaten $(i, j), 0 \leq i \leq n$. Wir betrachten nur solche Wege, für welche die einzelnen Schritte $(i, j) \rightarrow (i+1, k)$ entweder **Aufstiege**, d.h. $k = j+1$, oder **Abstiege**, d.h. $k = j-1$, sind. Unter einem **Gipfel** verstehen wir einen Punkt, zu welchem ein Aufstieg führt und von welchem ein Abstieg weggeht, unter einem **Tal** einen Punkt, zu welchem ein Abstieg führt und von welchem ein Aufstieg weggeht. Der Weg heißt **nicht-negativ**, wenn alle y -Koordinaten ≥ 0 sind. Unter der **Höhe** eines Punktes verstehen wir seine y -Koordinate. Die **Gipfel**, deren Höhen ≥ 1 und die **Täler**, deren Höhen ≤ -2 sind, heißen **Extremalpunkte**.

Die folgende Figur zeigt einen Gitterpunktweg w von $(0,0)$ nach $(18,-2)$ mit 8 Aufstiegen, 10 Abstiegen, 5 Gipfeln und 4 Tälern, wobei die Gipfel $A = (2,2), B = (4,2), D = (15,1)$ und das Tal $C = (10,-2)$ Extremalpunkte sind. Die Verbindungsstrecken zwischen den Gitterpunkten dienen nur der besseren Veranschaulichung.



Figur 1

Auf den Geraden $y = 0$ und $y = -1$ liegen keine Extremalpunkte. Wenn man einen Weg um die $y = -\frac{1}{2}$ -Achse spiegelt, gehen Extremalpunkte wieder in Extremalpunkte über.

Uns interessieren vor allem Gitterpunktwege, die ganz in einem Streifen um die x -Achse enthalten sind.

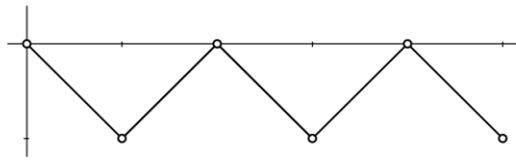
Definition beschränkter Wege.

Seien $r > 0$ und $1 \leq p \leq r$ natürliche Zahlen. Mit $A_{r,p}(n)$ bezeichnen wir die Menge aller Gitterpunktwege der Länge n , die im Punkt $(x,y) = (0, r-p)$ beginnen, auf der Höhe 0 oder -1 enden und ganz im Streifen $S_r : -r-1 < y < r$ oder gleichbedeutend $-r \leq y \leq r-1$ eingeschlossen sind. Wir nennen solche Wege kurz **beschränkte Wege**. Für $p = r$ schreiben wir kurz $A_{r,r}(n) = A_r(n)$.

Beispiele von beschränkten Wegen:

1) Die Menge $A_1(n)$ aller Gitterpunktwege, die im Ursprung $(0,0)$ beginnen und ganz im Streifen $-2 < y < 1$ bleiben, besteht aus genau einem Weg. Dieser beginnt mit einem Abstieg und hat dann abwechselnd Aufstiege und Abstiege. Jeder Punkt hat Höhe 0 oder -1 , daher auch der Endpunkt. Es gibt keine Extremalpunkte.

Zum Beispiel besteht $A_1(5)$ aus dem folgenden Weg:



Figur 2

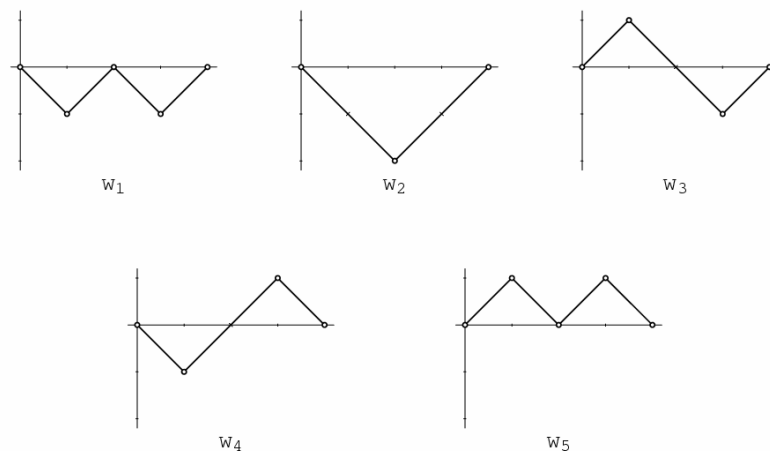
2) Als besonders wichtig erweist sich die Menge $A_2(n)$. Sie stellt unser kombinatorisches Modell für die Formel (0.3) und die Schur'sche Polynomversion der ersten Rogers-Ramanujan Identität dar.

Jeder Weg aus $A_2(n)$ beginnt im Ursprung $(0,0)$ und bleibt ganz im Streifen $-2 \leq y \leq 1$. Wenn er auf der Höhe 0 endet, also gleich viel Aufstiege wie Abstiege hat, muss n gerade sein. Endet er auf der Höhe -1 , muss n ungerade sein. In beiden Fällen gibt es genau $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Aufstiege und $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Abstiege. Die Gipfel der Höhe 1 und die Täler der Höhe -2 sind Extrempunkte.

Sei $a_2(n)$ die Anzahl der Wege in $A_2(n)$. Wenn der vorletzte Punkt eines Weges kein Extrempunkt ist, ist dieser Weg die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung eines Weges aus $A_2(n-1)$. Es gibt also $a_2(n-1)$ derartige Wege. Andernfalls bilden die zwei letzten Wegstücke einen Gipfel oder ein Tal. Lässt man diese weg, so erhält man einen Weg aus $A_2(n-2)$ und jeder solche Weg lässt sich eindeutig zu einem Weg aus $A_2(n)$ fortsetzen, dessen vorletzter Punkt ein Extrempunkt ist. Es gilt also $a_2(n) = a_2(n-1) + a_2(n-2)$. Für $n=0$ gibt es nur den leeren Weg, der nur aus dem Nullpunkt besteht. Für $n=1$ gibt es auch nur einen Weg. Da der Weg auf der Höhe -1 enden muss, kann er also nur aus einem Abstieg bestehen. Somit ist $a_2(0) = a_2(1) = 1$. Insgesamt ist also

$$a_2(n) = |A_2(n)| = F_{n+1}. \quad (0.5)$$

Beispielsweise besteht $A_2(4)$ aus $F_5 = 5$ Wegen von $(0,0)$ nach $(4,0)$, wie aus der folgenden Figur ersichtlich ist.



Figur 3

Die Wege w_4 und w_5 enden mit einem Gipfel der Höhe 1. Lässt man diesen weg, so ergeben sich die Wege aus $A_2(2)$. Die anderen Wege enden mit einem Aufstieg, dessen Anfangspunkt kein Extrempunkt ist. Entfernt man diesen, so bleiben die Wege aus $A_2(3)$.

Die linke Seite von (0.3) ist eine wohlbekannte Darstellung der Fibonacci-Zahlen. Sie kann in unserem Modell folgendermaßen abgeleitet werden:

Sei $c_{n,k}$ die Anzahl aller Wege in $A_2(n)$ mit genau k Extrempunkten. Dann folgt mit derselben Überlegung wie oben die Rekursion $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-2,k-1}$. Dabei ist $c_{n,k} = 0$ für $n < 2k$, weil es dann keine solchen Wege gibt. Außerdem ist $c_{n,0} = 1$ für alle $n \geq 0$. Durch diese Bedingungen ist $c_{n,k}$ eindeutig festgelegt.

Da auch $\bar{c}_{n,k} = \binom{n-k}{k}$ dieselben Eigenschaften hat, muss es mit $c_{n,k}$ übereinstimmen.

Insgesamt ergibt sich also $a_2(n) = \sum_k c_{n,k} = \sum_k \binom{n-k}{k}$ und damit die linke Seite von (0.3).

3) Die Wege aus $A_{2,1}(n)$ haben als Anfangspunkt $(0,1)$ und müssen daher mit einem Abstieg beginnen. An diesen schließt ein Weg aus $A_2(n-1)$ an. Es ist also $a_{2,1}(n) = |A_{2,1}(n)| = F_n$.

Diese Menge bildet das kombinatorische Modell für die Formel (0.4) und die Schur'sche Polynomversion der zweiten Identität von Rogers-Ramanujan.

1. Abzählung von Gitterpunktwegen

Das Prinzip der Inklusion-Exklusion

Die Anzahl der Elemente von $A_{r,p}(n)$ lässt sich durch eine überraschend schöne Formel ausdrücken, aus welcher sich schließlich die gesuchten Identitäten ergeben:

Satz 1.1 (Abzählformel für beschränkte Wege).

Sei $r > 0$ und $1 \leq p \leq r$. Für die Anzahl $a_{r,p}(n) = |A_{r,p}(n)|$ aller Gitterpunktwege aus $A_{r,p}(n)$ gilt

$$a_{r,p}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \left\lfloor \binom{n}{\frac{n + (2r+1)j + p - r}{2}} \right\rfloor. \quad (1.1)$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige einfache kombinatorische Überlegungen.

Seien u, v positive ganze Zahlen und $B_{u,v}(k, \ell)$ die Menge aller Gitterpunktwege die im Punkt

$(x, y) = (0, 0)$ beginnen, k Aufstiege und ℓ Abstiege haben und ganz im Streifen $S_{u,v} : -v < y < u$ bleiben.

Sei $b(k, \ell) = b_{u,v}(k, \ell)$ ihre Anzahl.

Der Einfachheit halber lassen wir im Folgenden bei fest gegebenen u, v den Hinweis auf diese Zahlen weg. Unter dem **Rand** des Streifens $S_{u,v}$ verstehen wir die Geraden $y = -v$ und $y = u$, welche nicht mehr zum Streifen gehören. Ein Punkt, der auf dem Rand des Streifens liegt, heiße **Randpunkt**.

Für einen Weg w , der den Streifen S verlässt, sei $(x_1, y_1) = (x_1(w), y_1(w))$ der Randpunkt von w mit minimaler x -Komponente und allgemeiner $(x_i, y_i) = (x_i(w), y_i(w))$ der erste Randpunkt mit $x_i > x_{i-1}$ und $\text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(y_{i-1})$. Sei $J = J(w)$ die Anzahl dieser Punkte.

Sei w der Weg von Figur 1. Für den Streifen $S = S_{1,2}$ erhalten wir auf diese Weise die Randpunkte $(1, 1), (10, -2), (15, 1), (18, -2)$, für den Streifen $S_{3,1}$ gibt es nur den Punkt $(7, -1)$.

Für jedes $j \leq J$ verlässt w den Streifen mindestens j -mal abwechselnd nach oben oder unten. Sei $S(k, \ell)$ die Menge aller Wege mit k Aufstiegen und ℓ Abstiegen. Mit $S_j(k, \ell)$ bezeichnen wir die Teilmenge von $S(k, \ell)$, für die es von links nach rechts mindestens j Randpunkte P_1, \dots, P_j gibt, die alternierend am oberen bzw. unteren Rand liegen. Die Teilmenge, wo P_1 am oberen Rand gewählt werden kann, bezeichnen wir mit $S_j^+(k, \ell)$. Analog bezeichne $S_j^-(k, \ell)$ die Teilmenge, wo man mit einem P_1 am unteren Rand beginnen kann.

Für $(u, v) = (1, 2)$ liegt der Weg w von Figur 1 in

$S(8, 10), S_1^+(8, 10), S_1^-(8, 10), S_2^+(8, 10), S_2^-(8, 10), S_3^+(8, 10), S_3^-(8, 10)$ und $S_4^+(8, 10)$.

Sei $s_j^+(k, \ell)$ die Anzahl aller Wege in $S_j^+(k, \ell)$ und $s_j^-(k, \ell)$ die Anzahl aller Wege von $S_j^-(k, \ell)$.

Des weiteren bezeichne $s(k, \ell) = s_0^\pm(k, \ell)$ die Anzahl aller Wege von $(0, 0)$ nach $(k + \ell, k - \ell)$.

Um $b_{u,v}(k, \ell) = b(k, \ell)$ abzuzählen, verwenden wir eine einfache Variante des **Prinzips der Inklusion – Exklusion**:

Inklusions-Exklusion-Lemma.

Die Anzahl $b(k, \ell)$ aller Wege aus $S(k, \ell)$, die ganz im Streifen $S_{u,v}$ bleiben, ist gegeben durch

$$b(k, \ell) = s(k, \ell) + \sum_{j \geq 1} (-1)^j (s_j^+(k, \ell) + s_j^-(k, \ell)). \quad (1.2)$$

Denn ein Weg w , der den Streifen S verlässt, wird in jedem s_j^\pm mit $j < J$ genau einmal gezählt. Dagegen wird er nur in einem der beiden Terme s_j^+ bzw. s_j^- berücksichtigt, je nachdem ob y_1 positiv oder negativ ist. Da die Summe $1 - 2 + 2 - \dots + 2(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$ ist, werden auf der rechten Seite von (1.2) nur die Wege, die den Streifen nicht verlassen, gezählt und zwar jeder genau einmal.

Als Beispiel betrachten wir die $\binom{2+2}{2} = 6$ Wege aus $S(2, 2)$ (vgl. Figur 4) und den Streifen $-2 < y < 1$.

Hier ist $B_{1,2}(2, 2) = \{u_2\}$, $S_1^+(2, 2) = \{u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $S_1^-(2, 2) = \{u_1\}$, alle anderen $S_j^\pm(2, 2)$ sind leer. Daher gilt $b(2, 2) = 6 - 4 - 1 = 1$.

Das Lemma nützt uns nur dann etwas, wenn es für die Anzahlen $s_j^\pm(k, \ell)$ einfache Formeln gibt. Das ist aber tatsächlich der Fall, wie der folgende Satz zeigt. Dabei betrachten wir bei gegebenem j die Abhängigkeit von k und ℓ .

Satz 1.2 (Abzählformeln für die Wege, die den Streifen verlassen)

Seien $u, v \geq 1$ gegeben und $j \geq 1$. Dann ist für alle $k \geq 0$ und alle ℓ mit $0 \leq \ell \leq k + v$

$$s_{2j}^+(k, \ell) = \binom{k + \ell}{k + (u + v)j} = \binom{k + \ell}{\ell - (u + v)j}, \quad (1.3)$$

und

$$s_{2j-1}^-(k, \ell) = \binom{k + \ell}{\ell - (u + v)j + u} = \binom{k + \ell}{k + (u + v)j - u}. \quad (1.4)$$

Analog ist für alle $\ell \geq 0$ und alle k mit $0 \leq k \leq \ell + u$

$$s_{2j-1}^+(k, \ell) = \binom{k + \ell}{\ell + (u + v)j - v} = \binom{k + \ell}{k - (u + v)j + v}, \quad (1.5)$$

und

$$s_{2j}^-(k, \ell) = \binom{k + \ell}{k - (u + v)j} = \binom{k + \ell}{\ell + (u + v)j}. \quad (1.6)$$

Im Fall $j = 0$ gilt

$$s(k, \ell) = \binom{k + \ell}{k} \quad (1.7)$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

Bei festem $j \geq 1$ gibt es einen kürzesten Weg mit j Randpunkten, der mit einem Aufstieg beginnt. Das ist der Weg, dessen Randpunkte die x -Koordinaten $u, 2u + v, 3u + 2v, \dots, ju + (j-1)v$ haben. Er beginnt also mit u Aufstiegen, dann kommen $u + v$ Abstiege, dann wieder $u + v$ Aufstiege, usw. Analog hat der kürzeste Weg mit j Randpunkten, der mit einem Abstieg beginnt, die x -Koordinaten $v, 2v + u, 3v + 2u, \dots, jv + (j-1)u$.

Beispielsweise hat der kürzeste Weg mit $2j$ Randpunkten, der mit einem Aufstieg beginnt, die Länge $2ju + (2j-1)v = (u+v)j - v$ und genau $\ell = (u+v)j$ Abstiege und $k = (u+v)j - v$ Aufstiege.

Beweis.

Üblicherweise beweist man derartige Aussagen mit dem Spiegelungsprinzip von Desiré André. Ein solcher Beweis lässt sich jedoch nicht auf die uns interessierenden q -Analoge übertragen, weil er die Menge der Extrempunkte nicht invariant lässt. Wir gehen daher anders vor.

Wir beweisen zuerst die Aussagen über $s_j^+(k, \ell)$ mit Induktion nach j .

Für $j = 0$ ist die Aussage kombinatorisch trivial. Denn für einen Weg mit k Aufstiegen und ℓ Abstiegen muss man unter den $k + \ell$ Wegstücken der Länge 1 genau k als Aufstiege wählen. Das gibt $\binom{k + \ell}{k}$

Möglichkeiten. Also ist die Anzahl $s(k, \ell) = s_0^+(k, \ell)$ dieser Wege gegeben durch $s(k, \ell) = \binom{k + \ell}{k}$.

Um die Analogie zu unserem Beweis des entsprechenden q -Analogons hervorzuheben, geben wir noch einen weiteren Beweis:

Für $k \geq 1, \ell \geq 1$ gilt

$$s(k, \ell) = s(k-1, \ell) + s(k, \ell-1) \quad (1.8)$$

mit den Anfangswerten $s(k, 0) = s(0, \ell) = 1$. Denn es gibt $s(k-1, \ell)$ Wege, die mit einem Aufstieg enden und $s(k, \ell-1)$ Wege, die mit einem Abstieg enden. Durch (1.8) und die Anfangswerte ist $s(k, \ell)$ eindeutig

festgelegt. Da $c(k, \ell) = \binom{k + \ell}{k}$ dieselben Eigenschaften hat, ist also $s(k, \ell) = c(k, \ell)$.

Nun zum Fall $j = 1$.

Wir müssen zeigen, dass für $0 \leq k \leq \ell + u$ die Formel $s_1^+(k, \ell) = \binom{k + \ell}{\ell + u}$ gilt.

Wir verwenden dazu Induktion nach ℓ .

Für $\ell = 0$ ist zu zeigen, dass $s_1^+(k, 0) = \binom{k}{u}$ für alle k mit $k \leq u$ gilt. Das ist aber klar, weil ein Weg mit

$k < u$ Aufstiegen den Wert u nicht erreicht und es für $k = u$ genau einen solchen Weg gibt.

Wir können daher als Induktionsannahme davon ausgehen, dass für $k \leq (\ell-1) + u$ die Formel

$$s_1^+(k, \ell-1) = \binom{k + \ell - 1}{\ell - 1 + u} \text{ erfüllt ist.}$$

Nun gilt wie oben die Identität

$$s_1^+(k, \ell) = s_1^+(k-1, \ell) + s_1^+(k, \ell-1) \quad (1.9)$$

für $1 \leq k < \ell + u$ und daher nach Induktionsvoraussetzung

$$s_1^+(k, \ell) = s_1^+(k-1, \ell) + \binom{k+\ell-1}{\ell-1+u}.$$

Wegen $s_1^+(0, \ell) = 0$ ist $s_1^+(k, \ell)$ dadurch für alle $0 \leq k < u + \ell$ eindeutig festgelegt.

Da $c(k, \ell) = \binom{k+\ell}{\ell+u}$ auch alle diese Eigenschaften besitzt, muss es wegen der Eindeutigkeit mit

$s_1^+(k, \ell)$ übereinstimmen.

Für $k = \ell + u$ stimmt die Formel auch, denn dann ist der Endpunkt $(k + \ell, k - \ell) = (k + \ell, u)$ des Weges ein oberer Randpunkt und daher ist die Bedingung, dass der Weg den Streifen an der Oberseite verlässt, von selbst erfüllt. Daher ist $s_1^+(k, \ell) = s(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k} = \binom{k+\ell}{\ell+u}$.

Für $k > \ell + u$ gilt natürlich aus demselben Grund $s_1^+(k, \ell) = s(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k}$.

Da die Aussagen für $s_j^+(k, \ell)$ für $j = 0$ und $j = 1$ richtig sind, können wir als Induktionsannahme davon ausgehen, dass die Aussage des Satzes für $s_{2j-1}(k, \ell)$ und $s_{2j-2}(k, \ell)$ mit $j > 0$ erfüllt ist.

Wir wollen zuerst mit Induktion nach k zeigen, dass für $0 \leq \ell \leq v + k$ die Formel

$$s_{2j}^+(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k+(u+v)j} \text{ gilt.}$$

Da für diesen Fall der kürzeste Weg genau $k = (u+v)j - v$ Aufstiege und $\ell = k + v$ Abstiege enthält,

gilt die Formel für alle $k < (u+v)j - v$ und $\ell \leq k + v$, weil dann keine derartigen Wege existieren und die Binomialkoeffizienten verschwinden. Ebenso für $k = (u+v)j - v$ und $\ell < k + v$.

Für $k = (u+v)j - v$ und $\ell = (u+v)j$ gilt dagegen

$$s_{2j}^+(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k+(u+v)j} = 1, \text{ weil es genau einen solchen Weg gibt, nämlich den kürzesten Weg mit } 2j$$

Randpunkten, der mit einem Aufstieg beginnt.

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $k-1 \geq (u+v)j - v$ richtig ist.

Für $0 \leq \ell < k + v$ gilt wie oben

$$s_{2j}^+(k, \ell) = s_{2j}^+(k, \ell-1) + s_{2j}^+(k-1, \ell). \quad (1.10)$$

Es ist also nach Induktionsannahme $s_{2j}^+(k, \ell) = s_{2j}^+(k, \ell-1) + \binom{k-1+\ell}{k-1+(u+v)j}$.

Daraus lassen sich wegen $s_{2j}^+(k, 0) = 0$ alle Werte $s_{2j}^+(k, \ell)$ für $0 \leq \ell < k + v$ eindeutig berechnen. Da auch

$c(k, \ell) = \binom{k+\ell}{k+(u+v)j}$ dieselben Eigenschaften hat, haben wir diese Formel für $\ell < k + v$ bewiesen.

Für $\ell = k + v$ gilt sie auch, weil dann

$$s_{2j}^+(k, \ell) = s_{2j-1}^+(k, \ell) = \binom{k + \ell}{\ell + (u + v)j - v} = \binom{k + \ell}{k + (u + v)j}$$

ist.

Für $\ell > k + v$ gilt natürlich wieder $s_{2j}^+(k, \ell) = s_{2j-1}^+(k, \ell)$.

Ganz analog zeigt man, dass $s_{2j+1}^+(k, \ell) = \binom{k + \ell}{\ell + (u + v)j + u}$ gilt, wenn $k \leq u + \ell$ ist.

Der einzige Unterschied ist, dass man hier wieder Induktion nach ℓ verwenden muss. Damit sind die Formeln (1.3) und (1.5) bewiesen.

Die Formeln für $s_j^-(k, \ell)$ ergeben sich sofort aus Symmetriegründen, wenn man k und ℓ sowie u und v vertauscht.

Beweis von Satz 1.1

Für Gitterpunktwege der Länge n , die auf der Höhe 0 oder -1 enden, ist $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \ell = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Wählt man $u = r, v = r + 1$, so ergibt sich

$$s_{2j}^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (2r+1)j} = \binom{n}{\frac{n + (2r+1)(2j)}{2}} \text{ und}$$

$$s_{2j+1}^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + (2r+1)j + r} = \binom{n}{\frac{n + (2r+1)(2j+1)}{2}},$$

also in jedem Fall

$$s_j^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{n}{\frac{n + (2r+1)j}{2}}. \quad (1.11)$$

Analog erhalten wir $s_{2j}^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{n}{\frac{n - (2r+1)(2j)}{2}}$ und

$$s_{2j+1}^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - (2r+1)j - r - 1} = \binom{n}{\frac{n - (2r+1)(2j+1)}{2}},$$

also in jedem Fall

$$s_j^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \binom{n}{\frac{n - (2r+1)j}{2}}. \quad (1.12)$$

Damit ist Satz 1.1 für $p = r$ bewiesen.

Für $r = 1$ ergibt sich

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{\frac{n+3i}{2}} = 1. \quad (1.13)$$

Für $r = 2$ erhalten wir die rechte Seite der Formel (0.3).

Nun wollen wir dasselbe für die Anzahl $a_{r,p}(n) = |A_{r,p}(n)|$ aller Gitterpunktwege im \mathbb{R}^2 , die im Punkt $(x, y) = (0, r-p)$ beginnen, $\left\lfloor \frac{n+p-r}{2} \right\rfloor$ Aufstiege und $\left\lfloor \frac{n+1+r-p}{2} \right\rfloor$ Abstiege haben und ganz im Streifen $S: -r-1 < y < r$ bleiben, machen.

Um diese zu berechnen, verschieben wir jeden solchen Weg um $r-p$ Einheiten nach unten, sodass er also im Nullpunkt $(0,0)$ beginnt und auf der Höhe $p-r$ oder $p-r-1$ endet. Er liegt dann ganz im Streifen $p-2r-1 < y < p$.

Es ergibt sich dann $s_j^+ \left(\left\lfloor \frac{n-r+p}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1+r-p}{2} \right\rfloor \right) = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+(2r+1)j+p-r}{2} \right\rfloor}$

und

$$s_j^- \left(\left\lfloor \frac{n-r+p}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1+r-p}{2} \right\rfloor \right) = \binom{n}{\left\lfloor \frac{n-(2r+1)j+p-r}{2} \right\rfloor}$$

Also erhalten wir

$$a_{r,p}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \binom{n}{\left\lfloor \frac{n+(2r+1)j+p-r}{2} \right\rfloor}. \quad (1.14)$$

Für $r = 2, p = 1$ liefert das die rechte Seite der Identität (0.4).

2. q-Analoga

q-Binomialkoeffizienten.

Es ist nicht leicht, eine vernünftige Beschreibung des Begriffs q -Analogon einer Identität $a = b$ zu geben. Man versteht darunter im wesentlichen eine Identität $a(q) = b(q)$, die einen Parameter q enthält, der eine Unbestimmte oder auch eine reelle Zahl sein kann, und die im zweiten Fall im Limes für $q \rightarrow 1$ mit der ursprünglichen Identität zusammenfällt.

Als wichtiges Beispiel betrachten wir den binomischen Lehrsatz $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$. Von diesem kennt man viele interessante q -Analoga. Wir benötigen das folgende:

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k} x^k. \quad (2.1)$$

Hier ist $\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$ der q -Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$ und $\binom{n}{k} = 0$ sonst.

Das sieht man am einfachsten, wenn man den q – **Differentiationsoperator** D , d.h. ein q – Analogon des üblichen Differentiationsoperators, einführt, der durch $Df(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx}$ definiert ist. Er erfüllt

$$Dx^n = \frac{1 - q^n}{1 - q} x^{n-1} = [n] x^{n-1}. \text{ Hier ist } [n] = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{n-1} \text{ ein } q\text{-Analogon der natürlichen}$$

Zahl n .

Um (2.1) zu beweisen, setzen wir $f_n(x) = (1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x)$. Dann ist $f_n(x)$ ein Polynom n – ten

Grades in x und kann daher in der Form $f_n(x) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} a_{n,k} x^k$ geschrieben werden. Außerdem gilt in

$$\text{Analogie zu } \frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} Df_n(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(qx)}{(1-q)x} = \frac{(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x)\{(1+x) - (1+q^n x)\}}{(1-q)x} = \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} f_{n-1}(qx) = [n] f_{n-1}(qx). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_k q^{\binom{k}{2}} a_{n,k} [k] x^{k-1} = Df_n(x) = \frac{1 - q^n}{1 - q} f_{n-1}(qx) = \sum_k q^{\binom{k-1}{2} + k-1} [n] a_{n-1, k-1} x^{k-1}.$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_{n,k} = \frac{[n]}{[k]} a_{n-1, k-1}$ für $1 \leq k \leq n$, woraus sich wegen $a_{n,0} = 1$ alles ergibt.

$$\text{Es gilt natürlich } \lim_{q \rightarrow 1} \frac{[n]}{[k]} = \binom{n}{k}.$$

Man kann aber auch $n \rightarrow \infty$ gehen lassen. Dann ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]}{[k]} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}$ und

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots = \sum_{k \geq 0} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^k)} x^k.$$

Ersetzt man hier q durch q^2 und x durch q , so erhält man

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})} = \prod_{i \geq 0} (1 + q^{2i+1}). \quad (2.2)$$

Wenn man x durch q^2 ersetzt, erhält man auf dieselbe Art

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})} = \prod_{i \geq 0} (1 + q^{2i+2}). \quad (2.3)$$

Das sind zwei alte Formeln von Euler. Die linken Seiten schauen fast so aus wie die linken Seiten der Rogers-Ramanujan Identitäten (2.21) und (2.22). Der einzige Unterschied besteht darin, dass im Nenner q durch q^2 ersetzt ist. Die Rogers-Ramanujan Identitäten sind jedoch bedeutend schwieriger zu beweisen.

Man kann einen solchen Grenzübergang auf zwei Arten interpretieren. Entweder man wählt $|q| < 1$ und nimmt den Limes im klassischen Sinn, wobei man aber bei der zweiten Formel etwas subtile Überlegungen anstellen muss, oder man interpretiert beide Seiten als **formale Potenzreihen** in einer Unbestimmten q und versteht unter $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} a_{n,k} q^k = \sum_{k \geq 0} a_k q^k$, dass für jedes K ein Index N existiert, so dass für alle $n > N$ gilt $a_{n,k} = a_k$ für alle k mit $0 \leq k \leq K$. Dann ist alles unmittelbar klar.

Aus

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = (1+x)(1+qx) \cdots (1+q^{n-1}x)(1+q^n x) = (1+x) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (qx)^k \right)$$

bzw.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = (1+x)(1+qx) \cdots (1+q^{n-1}x)(1+q^n x) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \right) (1+q^n x)$$

ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die **Rekursionsformeln für die q-Binomialkoeffizienten**

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Wir wollen auch hier $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ setzen, wenn $n < 0$ ist.

Das q – Analogon der Pascalmatrix beginnt daher folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1+q & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1+q+q^2 & 1+q+q^2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1+q+q^2+q^3 & 1+q+2q^2+q^3+q^4 & 1+q+q^2+q^3 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Eine weitere Formel, die wir öfter benötigen, ist

$$(q^k - 1) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (q^n - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

die aus der obigen Herleitung unmittelbar ersichtlich ist.

Als Folgerung ergibt sich

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^{n-1} - 1) \begin{bmatrix} n-2 \\ m-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Denn es ist

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^{n-1} - 1) \begin{bmatrix} n-2 \\ m-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^m - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}.$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man, dass (2.7) äquivalent mit der Rekursionsformel

$$r_n(x) = (x+1)r_{n-1}(x) + (q^{n-1} - 1)xr_{n-2}(x)$$

für die sogenannten Rogers-Szegö-Polynome $r_n(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$ ist, die ebenfalls ein q – Analogon des

binomischen Lehrsatzes bilden.

Außerdem benötigen wir die Formel

$$q^{2m-n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^{n-1} - 1) \begin{bmatrix} n-2 \\ m-2 \end{bmatrix} = q^{2m-n-1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Diese folgt aus

$$\begin{aligned} & q^{2m-n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^{n-1} - 1) \begin{bmatrix} n-2 \\ m-2 \end{bmatrix} = q^{2m-n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + (q^{m-1} - 1) \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} = \\ & = q^{2m-n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} \right) = q^{2m-n-1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Formeln (2.7) und (2.8) reduzieren sich für $q = 1$ ebenfalls auf die Rekursionsformel

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \text{ der Binomialkoeffizienten. Sie können also genauso wie (2.4) und (2.5) als}$$

q – Analoga dieser Rekursionsformel interpretiert werden.

Gewichte für Gitterpunktwege

Der für das folgende entscheidende Schritt besteht nun darin, ein geeignetes q – Analogon für die Anzahl von Gitterpunktmengen zu finden. Dazu ordnen wir einem Gitterpunktweg ein **Gewicht** zu, das von q abhängt und sich für $q = 1$ auf 1 reduziert. Die spezielle Form des Gewichts ist physikalisch motiviert (vgl. [10]).

Definition des Gewichts von Gitterpunktwegen.

Sei w ein Weg mit s Extremalpunkten, welche die x – Koordinaten i_1, \dots, i_s haben. Dann ordnen wir diesem Weg das **Gewicht** $\gamma(w) = q^{i_1+i_2+\dots+i_s}$ zu. Für $s = 0$ sei $\gamma(w) = 1$. Das Gewicht einer Menge A von Wegen sei $\gamma(A) = \sum_{w \in A} \gamma(w)$.

Beispielsweise hat der Weg w von Figur 1 das Gewicht $q^{2+4+10+15} = q^{31}$, der Weg in Figur 2 hat das Gewicht 1 und aus Figur 3 liest man ab, dass $\gamma(w_1) = 1, \gamma(w_2) = q^2, \gamma(w_3) = q, \gamma(w_4) = q^3$ und $\gamma(w_5) = q^{1+3} = q^4$ ist. Die Summe der Gewichte dieser Wege ist somit $\gamma(A_2(4)) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4$.

Wir wollen zuerst $\gamma(A_2(n))$ berechnen. Für die Anfangswerte gilt $\gamma(A_2(0)) = \gamma(A_2(1)) = 1$.

Des weiteren gilt die Rekurrenz

$$\gamma(A_2(n)) = \gamma(A_2(n-1)) + q^{n-1} \gamma(A_2(n-2)). \quad (2.9)$$

Das sieht man sofort, wenn man schaut, wie der Weg endet: Der erste Term auf der rechten Seite ergibt sich, wenn der vorletzte Punkt des Weges ein Randpunkt ist, der erste Term in den anderen Fällen. Man beachte, dass hier die Extremalpunkte mit den Randpunkten übereinstimmen. Lässt man z.B. in Figur 3 bei den Wegen w_1, w_2, w_3 den letzten Aufstieg weg, so ergeben sich alle Wege aus $A_2(3)$, lässt man bei w_4, w_5 den letzten Gipfel weg, so bleiben die Wege aus $A_2(2)$ übrig.

Es ist klar, dass $\gamma(A_2(n))$ ein q – Analogon von F_{n+1} ist. Die ersten Werte sind

$$1, 1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3 + q^4, 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6, \dots$$

Interessant ist auch der Fall $q = -1$. Hier ergibt sich $\gamma(A_2(2n)) = F_{n-1}$ und $\gamma(A_2(2n+1)) = F_{n+1}$, wie man sofort verifizieren kann.

Aus der Rekurrenz (2.9) lässt sich eine Formel für $\gamma(A_2(n))$ angeben (vgl. z.B. [6]). Man kann etwa folgendermaßen argumentieren:

Sei $c_{n,k}(q)$ das Gewicht aller Wege in $A_2(n)$ mit genau k Randpunkten. Dann folgt mit derselben

Überlegung wie oben die Rekursion $c_{n,k}(q) = c_{n-1,k}(q) + q^{n-1} c_{n-2,k-1}(q)$, wobei $c_{n,k}(q) = 0$ für $n < 2k$ ist, weil es dann keine solchen Wege gibt. Außerdem ist $c_{n,0}(q) = 1$ für alle $n \geq 0$. Durch diese Bedingungen ist $c_{n,k}(q)$ eindeutig festgelegt.

Nun hat auch $\bar{c}_{n,k}(q) = q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}$ wegen (2.5) dieselben Eigenschaften und stimmt daher mit $c_{n,k}(q)$ überein.

Daher ist $c_{n,k}(q) = q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}$ und somit

$$\gamma(A_2(n)) = \sum_{2k \leq n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Beispielsweise ist $\gamma(A_2(5)) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3) + q^4(1 + q + q^2)$.

Sei andererseits $A_{2,1}(n)$ die Menge aller Wege im Streifen $-3 < y < 2$, die im Punkt $(0,1)$ beginnen und ebenfalls in $(n,0)$ oder $(n,-1)$ enden. Jeder solche Weg beginnt mit einem Abstieg $(0,1) \rightarrow (1,0)$. Er ist also im wesentlichen ein Weg aus $A_2(n-1)$, der um eine Stelle nach rechts verschoben ist.

Sei also $d_{n,k}(q)$ das Gewicht aller Wege der Länge $n-1$ im Streifen $-3 < y < 2$ mit k Randpunkten, die im Punkt $(1,0)$ beginnen und im Punkt $(n,0)$ oder $(n,-1)$ enden. Dann gilt auch hier

$d_{n,k}(q) = d_{n-1,k}(q) + q^{n-1} d_{n-2,k-1}(q)$, wobei jedoch jetzt $d_{n,k}(q) = 0$ für $n-1 < 2k$ und $d_{n,0}(q) = 1$ für $n \geq 1$ gilt. Es ergibt sich wie oben

$$d_{n,k}(q) = q^{k^2+k} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix}.$$

Daher ist

$$\gamma(A_{2,1}(n)) = \sum_{2k \leq n-1} q^{k^2+k} \begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Das sind natürlich wieder q -Analoge der Fibonacci-Zahlen F_n . Diese Folge beginnt mit

$0, 1, 1, 1 + q^2, 1 + q^2 + q^3, 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^6, \dots$

Für $q = -1$ erhält man $\gamma(A_{2,1}(2n)) = F_n$ und $\gamma(A_{2,1}(2n+1)) = F_{n+2}$.

Bemerkung

Die obigen Formeln werden übersichtlicher, wenn man die q -Fibonacci-Polynome

$F_n(x) = \sum_k q^{k^2-k} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} x^k$ betrachtet (vgl. [6]). Man rechnet leicht nach, dass sie die Rekurrenz

$F_n(x) = F_{n-1}(qx) + xF_{n-2}(q^2x)$ erfüllen. Mit dieser Notation ist also $\gamma(A_2(n)) = F_{n+1}(q)$ und $\gamma(A_{2,1}(n)) = F_n(q^2)$.

Diese q -Analoge der Fibonacci-Zahlen treten auch bei der Berechnung des Kettenbruchs $K_n(1, q)$ auf, wenn man

$$K_n(x, q) := \frac{x}{1 + \frac{qx}{1 + \frac{q^2x}{1 + \dots \frac{1}{1 + q^n x}}}} \quad (2.12)$$

setzt.

Denn offenbar ist $K_n(x, q) = \frac{x}{1 + K_{n-1}(qx, q)}$ mit $K_0(x, q) = x$.

Nun ergibt sich mit Induktion, dass $K_n(x, q) = x \frac{F_{n+1}(q^2x)}{F_{n+2}(qx)}$ gilt. Denn

$$K_n(x, q) = \frac{x}{1 + K_{n-1}(qx, q)} = x \frac{1}{1 + x \frac{F_n(q^3x)}{F_{n+1}(q^2x)}} = x \frac{F_{n+1}(q^2x)}{F_{n+1}(q^2x) + xF_n(q^3x)} = x \frac{F_{n+1}(q^2x)}{F_{n+2}(qx)}.$$

Speziell ist also

$$K_n(1, q) = \frac{F_{n+1}(q^2)}{F_{n+2}(q)}. \quad (2.13)$$

Das ist ein q -Analogon der bekannten Tatsache, dass $K_n(1, 1) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ ist (vgl. [4]).

Die Identitäten von Rogers-Ramanujan

Unser Ziel sind die folgenden Sätze von I. Schur [11]:

Satz 2.1 (Schur'sche Polynomversion der 1. Identität von Rogers-Ramanujan)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} = \gamma(A_2(n)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ \frac{n+5i}{2} \end{matrix} \right\rfloor \quad (2.14)$$

und

Satz 2.2 (Schur'sche Polynomversion der 2. Identität von Rogers-Ramanujan)

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q^{k^2+k} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} = \gamma(A_{2,1}(n)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i-3)}{2}} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ \frac{n+5i-1}{2} \end{matrix} \right\rfloor. \quad (2.15)$$

Das sind ganz offenbar q -Analoga der Identitäten (0.3) und (0.4), auf welche sie sich für $q = 1$ reduzieren.

Für $n = 5$ lautet (2.14) folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + q^4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3) + q^4(1 + q + q^2) = \gamma(A_2(5)) = -q^3 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - q^2 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = -q^3 + (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)(1 + q^2) - q^2.$$

Bevor ich diese Identitäten beweise, möchte ich der Vollständigkeit halber zeigen, wie man daraus die üblichen Versionen der Rogers-Ramanujan-Identitäten ableiten kann. Dazu gehen wir zum Limes für $n \rightarrow \infty$ über.

$$\text{Dann ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q) \cdots (1-q^k)} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ \frac{n+5i}{2} \end{matrix} \right\rfloor = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3) \cdots}.$$

Daher geht (2.14) über in

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2}}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i-1)}{2}}, \quad (2.16)$$

wobei $(q)_\infty = \prod_{i \geq 1} (1-q^i)$ bedeutet.

In der physikalischen Literatur wird die linke Seite **fermionische Darstellung**, die rechte **bosonische Darstellung** genannt (vgl. [10]).

Die bosonische Darstellung lässt sich als einfaches unendliches Produkt schreiben. Dafür benötigen wir die so genannte Tripelproduktidentität von Jacobi.

Um diese abzuleiten, setzen wir im q -binomische Lehrsatz (2.1) $n = 2N$ und $x = q^{-N}z$. Das gibt

$$\begin{aligned} (1+q^{-N}z)(1+q^{-N+1}z) \cdots (1+\frac{z}{q})(1+z)(1+qz) \cdots (1+q^{N-1}z) = \\ = \sum_{k=0}^{2N} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} 2N \\ k \end{bmatrix} (q^{-N}z)^k = \sum_{\ell=-N}^N q^{\binom{\ell+N}{2} - N(\ell+N)} \begin{bmatrix} 2N \\ \ell+N \end{bmatrix} z^{\ell+N} \end{aligned}$$

und nach Multiplikation beider Seiten mit $q^{\binom{N+1}{2}} z^{-N}$

$$\begin{aligned} (1+\frac{q^N}{z})(1+\frac{q^{N-1}}{z}) \cdots (1+\frac{q}{z})(1+z)(1+qz) \cdots (1+q^{N-1}z) = \\ = \sum_{\ell=-N}^N q^{\binom{\ell}{2}} \begin{bmatrix} 2N \\ \ell+N \end{bmatrix} z^\ell. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Lassen wir hier wieder $N \rightarrow \infty$ gehen, so geht das über in

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{q^{\binom{\ell}{2}}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)} z^\ell = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-1}z)(1+\frac{q^n}{z}).$$

Wir erhalten also die

Tripelproduktidentität von Jacobi

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} q^{\binom{\ell}{2}} z^\ell = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-1}z)(1+\frac{q^n}{z})(1-q^n). \quad (2.18)$$

Ersetzen wir darin $q \rightarrow q^2, z \rightarrow qz$ und ändern den Index $n \rightarrow n+1$ im Produkt so ergibt sich

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} q^{\ell^2} z^\ell = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^{2n+1}z)(1+\frac{q^{2n+1}}{z})(1-q^{2n+2}). \quad (2.19)$$

Die Transformation $q \rightarrow q^{\frac{3}{2}}, z \rightarrow -q^{\frac{1}{2}}$ liefert

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell q^{\frac{\ell(3\ell+1)}{2}} = \prod_{i \geq 0} (1-q^{3i+2})(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+3}) = \prod_{i > 0} (1-q^i) = (q)_\infty.$$

Das ist der berühmte

Pentagonalzahlensatz von Leonhard Euler

$$\prod_{k \geq 1} (1-q^k) = 1 + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \left(q^{\frac{3j^2-j}{2}} + q^{\frac{3j^2+j}{2}} \right) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - \cdots. \quad (2.20)$$

Ersetzen wir nun $q \rightarrow q^{\frac{5}{2}}, z \rightarrow -q^{\frac{1}{2}}$, so geht (2.19) über in

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell q^{\frac{\ell(5\ell+1)}{2}} = \prod_{i \geq 0} (1 - q^{5i+3})(1 - q^{5i+2})(1 - q^{5i+5}).$$

Setzt man das in (2.16) ein, so bekommt man die

Erste Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2}}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{\prod_{i \geq 0} (1 - q^{5i+1})(1 - q^{5i+4})} \quad (2.21)$$

Geht man andererseits in (2.15) mit $n \rightarrow \infty$, so erhält man

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i-3)}{2}}.$$

Aus (2.19) ergibt sich für $q \rightarrow q^{\frac{5}{2}}, z \rightarrow -q^{\frac{3}{2}}$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^{\frac{i(5i+3)}{2}} = \prod_{i \geq 0} (1 - q^{5i+4})(1 - q^{5i+1})(1 - q^{5i+5}).$$

Setzt man das in (2.16) ein, so ergibt sich die

Zweite Identität von Rogers-Ramanujan

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(1-q) \cdots (1-q^k)} = \frac{1}{\prod_{i \geq 0} (1 - q^{5i+2})(1 - q^{5i+3})}. \quad (2.22)$$

Diese Identitäten haben interessante partitionentheoretische Interpretationen (vgl. [1]). So bedeutet etwa (2.21), dass die Anzahl der Partitionen einer Zahl n in Teile mit minimaler Differenz 2 gleich groß ist wie die Anzahl der Partitionen von n in Teile der Form $5i+1$ und $5i+4$. So gibt es für $n=9$ jeweils 5 Partitionen von jedem Typ, nämlich $9=8+1=7+2=6+3=5+3+1$ und $9=6+1+1+1=4+4+1=4+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+1+1$.

Bemerkung

Aus den Identitäten von Rogers-Ramanujan lässt sich auch der Kettenbruch von Rogers-Ramanujan

$$K(1, q) = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{\ddots}}} \quad (2.23)$$

berechnen.

Es gilt nämlich

$$\frac{1}{K(1, q)} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(1, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(q^2)}{F_{n+2}(q)}$$

und daher

$$K(1, q) = \prod_{i \geq 0} \frac{(1 - q^{5i+2})(1 - q^{5i+3})}{(1 - q^{5i+1})(1 - q^{5i+4})}. \quad (2.24)$$

Für $q = 1$ ist bekanntlich $K(1,1) = \varphi$, wobei $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ die Zahl des goldenen Schnitts ist (vgl. [4]), weil dann $K(1,1)$ die positive Wurzel der Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$, d.h. $x^2 - x - 1 = 0$, ist.

Aus (2.24) ergibt sich im Limes für $q = 1$ die Produktdarstellung

$$\prod_{i \geq 0} \frac{(5i+2)(5i+3)}{(5i+1)(5i+4)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 13 \cdots}{1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 14 \cdots} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Der obige Kettenbruch spielte eine große Rolle bei der Entdeckung der Rogers-Ramanujan Identitäten. Denn sowohl Rogers als auch Ramanujan und Schur wurden von ihm inspiriert. Hier zeigt sich noch einmal die enge Verwandtschaft mit den Fibonacci-Zahlen.

Die Beweise.

Wir gehen ganz analog wie im Fall $q = 1$ vor, wobei wir statt der Anzahl der Wege ihr Gewicht betrachten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass unsere Überlegungen wegen der Asymmetrie bei der Definition der Extrempunkte nur für $v \geq 2$ gelten. Wir setzen $b(q; k, \ell) = b_{u,v}(q; k, \ell) = \gamma(B_{u,v}(k, \ell))$,

$s_j^+(q; k, \ell) = \gamma(S_j^+(k, \ell))$, $s_j^-(q; k, \ell) = \gamma(S_j^-(k, \ell))$ und bezeichnen mit $s(q; k, \ell) = s_0^\pm(q; k, \ell)$ das Gewicht aller Wege von $(0,0)$ nach $(k + \ell, k - \ell)$. Das Inklusions-Exklusions-Lemma gilt natürlich auch in diesem Fall. Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 1.2

Satz 2.3 (Berechnung der Gewichte der Wege, die den Streifen verlassen)

Seien $u \geq 1$ und $v \geq 2$ gegeben und $j \geq 1$. Dann ist für alle $k \geq 0$ und alle ℓ mit $0 \leq \ell < k + v$

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j+1}{2}u + \binom{2j}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$s_{2j-1}^-(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}v + \binom{2j-1}{2}u} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell - (u + v)j + u \end{bmatrix} = q^{\binom{2j}{2}v + \binom{2j-1}{2}u} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j - u \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

und für $\ell = k + v$

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix}, s_{2j-1}^-(q; k, \ell) = q^{\binom{2j-1}{2}v + \binom{2j-2}{2}u} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell - (u + v)j + u \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Analog gilt für alle $\ell \geq 0$ und alle k mit $0 \leq k < \ell + u$

$$s_{2j-1}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell + (u + v)j - v \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$s_{2j}^-(q; k, \ell) = q^{\binom{2j+1}{2}v + \binom{2j}{2}u} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k - (u + v)j \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

und für $k = \ell + u$

$$s_{2j-1}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j-1}{2}u + \binom{2j-2}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell + (u + v)j - v \end{bmatrix}, s_{2j}^-(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}v + \binom{2j-1}{2}u} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k - (u + v)j \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Für $j = 0$ gilt

$$s(q; k, \ell) = \begin{bmatrix} k + \ell \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Bemerkung

Diese Formeln sind sehr nahe liegend. Denn man wird natürlich erwarten, dass beim Übergang zu einem vernünftigen q – Analogon die Binomialkoeffizienten durch q – Binomialkoeffizienten ersetzt werden. Die Hauptschwierigkeit besteht natürlich darin, ein „vernünftiges“ q – Analogon zu finden. Das geschah durch die Wahl des Gewichts. Erklärungsbedürftig sind aber vielleicht die im allgemeinen Fall in $s_j^+(k, \ell)$

aufretenden q – Potenzen $q^{\binom{j+1}{2}u + \binom{j}{2}v}$. Diese sind das Gewicht des kürzesten Weges mit j Randpunkten, dessen Extrempunkte ja die x – Koordinaten $u, 2u + v, 3u + 2v, \dots, ju + (j-1)v$ haben. Jeder andere Weg mit j Randpunkten hat dann ein Vielfaches davon als Gewicht.

Beweis von Satz 2.3

Wir wollen zunächst den Fall $j = 0$ betrachten.

Das geht im Prinzip genauso wie beim zweiten Beweis für $q = 1$.

Nur gilt hier eine etwas kompliziertere Rekursion, nämlich

$$s(q; k, \ell) = s(q; k-1, \ell) + s(q; k, \ell-1) + (q^{k+\ell-1} - 1)s(q; k-1, \ell-1) \quad (2.32)$$

mit $s(q; k, 0) = s(q; 0, \ell) = 1$.

Das ergibt sich sofort, wenn man schaut, mit welchen Schritten die Wege enden. Denn sei zuerst $k - \ell \geq 0$.

Für die Wege, die vor dem letzten Abstieg einen Aufstieg haben, ist der Punkt $(k + \ell, k - \ell + 1)$ ein

Extrempunkt. Ihr Gewicht ist daher $q^{k+\ell-1}s(q; k-1, \ell-1)$. Für die Wege, die mit zwei Abstiegen enden,

ergibt sich dagegen als Gewicht $s(q; k, \ell-1) - s(q; k-1, \ell-1)$. Die Wege, die mit einem Aufstieg enden,

haben dasselbe Gesamtgewicht $s(q; k-1, \ell)$ wie die Anfangswege, weil die Täler mit einer Höhe ≥ -1 keine Extrempunkte sind.

Für $k - \ell < 0$ ergibt sich alles analog, wenn man Aufstiege und Abstiege vertauscht.

Es ist klar, dass durch diese Bedingungen $s(q; k, \ell)$ eindeutig festgelegt ist.

Wir brauchen also nur zu verifizieren, dass (2.32) erfüllt ist, wenn wir $s(q; k, \ell) = \begin{bmatrix} k + \ell \\ k \end{bmatrix}$ setzen.

Das folgt aber sofort, wenn wir in (2.7) $n = k + \ell$ und $m = k$ setzen.

Wir müssen nun wieder Induktion nach j anwenden und alle Fälle $s_1^+(q; k, \ell)$, $s_{2j+1}^+(q; k, \ell)$ und $s_{2j}^+(q; k, \ell)$ gesondert untersuchen. Da sich die Beweise kaum voneinander unterscheiden, will ich hier nur den Fall $s_{2j}^+(q; k, \ell)$ im Detail behandeln und die Übertragung auf die anderen Fälle dem Leser überlassen.

Unter der Voraussetzung, dass die Formeln für $i < 2j$ gelten, wollen wir also zeigen, dass

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j+1}{2}u + \binom{2j}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u+v)j \end{bmatrix} \text{ für } 0 \leq \ell < v + k \quad \text{und} \quad s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u+v)j \end{bmatrix} \text{ für}$$

$\ell = v + k$ erfüllt ist.

Das zeigen wir wie im Fall $q = 1$ mit Induktion nach k . Im Unterschied zu jenem Fall stimmen jetzt die Formeln nicht überein, sondern haben verschiedene q – Potenzen. Das bedeutet für den Beweis eine zusätzliche Fallunterscheidung.

Der kürzeste Weg mit $2j$ Randpunkten hat $k = (u + v)j - v$ Aufstiege und $\ell = (u + v)j$ Abstiege. Sein Gewicht ist

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell + (u + v)j - v \end{bmatrix} = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix} = s_{2j-1}^+(q; k, \ell).$$

Allgemein gilt für $\ell = k + v$

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = s_{2j-1}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ \ell + (u + v)j - v \end{bmatrix} = q^{\binom{2j}{2}u + \binom{2j-1}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix}.$$

Damit ist (2.27) bewiesen.

Nun wollen wir die Aussage (2.25) des Satzes für $\ell < k + v$ beweisen.

Für $k \leq (u + v)j - v$ gibt es keine derartigen Wege und die Formel stimmt, weil dann $\begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix} = 0$

ist. Das gleiche gilt für $k = (u + v)j - v + 1$ und $\ell < k + v - 1 = (u + v)j$.

Für $k = (u + v)j - v + 1$ und $\ell = (u + v)j$ ist

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j+1}{2}u + \binom{2j}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix} = q^{\binom{2j+1}{2}u + \binom{2j}{2}v}. \text{ Das ist klar, weil es nur einen solchen Weg gibt und}$$

dieser das angegebene Gewicht hat.

Wir nehmen nun an, dass die Aussage des Satzes für $k - 1 \geq (u + v)j - v + 1$ richtig ist.

Für $\ell < k + v - 1$ gilt so wie oben

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = s_{2j}^+(q; k, \ell - 1) + s_{2j}^+(q; k - 1, \ell) + (q^{k+\ell-1} - 1)s_{2j}^+(q; k - 1, \ell - 1). \quad (2.33)$$

Daraus lassen sich wegen $s_{2j}^+(q; k, 0) = 0$ alle Werte $s_{2j}^+(q; k, \ell)$ für $\ell < k + v - 1$ eindeutig berechnen.

Es genügt nun wieder zu zeigen, dass diese Identität für $s_{2j}^+(q; k, \ell) = q^{\binom{2j+1}{2}u + \binom{2j}{2}v} \begin{bmatrix} k + \ell \\ k + (u + v)j \end{bmatrix}$ erfüllt ist.

Das folgt sofort aus (2.7) für $n = k + \ell$ und $m = k + (u - v)j$.

Zweitens zeigen wir, dass die Formel auch für $\ell = k + v - 1$ gilt, falls $v \geq 2$ ist, was ja vorausgesetzt wurde. Denn dann ist die Höhe des Endpunktes $k - \ell = 1 - v \leq -1$ und daher ist ein Tal im Punkt $(k + \ell - 1, k - \ell - 1)$ ein Extrempunkt, was für $v = 1$ nicht der Fall wäre. Außerdem liegt das Tal auf der Höhe $-v$, sodass jeder Weg aus $S_{2j-1}^+(k, \ell)$ auch in $S_{2j}^+(k, \ell)$ liegt.

In diesem Fall ergibt sich daher statt (2.33) die Rekursion

$$s_{2j}^+(q; k, \ell) = s_{2j}^+(q; k, \ell - 1) + s_{2j-1}^+(q; k - 1, \ell) + (q^{k+\ell-1} - 1)s_{2j-1}^+(q; k - 1, \ell - 1). \quad (2.34)$$

Dann folgt die gewünschte Formel aus (2.8), wenn man wieder $n = k + \ell$ und $m = k + (u - v)j$ setzt und beachtet, dass $\ell = k + v - 1$ ist.

Somit ist alles gezeigt.

Die Formeln für $s_j^-(k, \ell)$ ergeben sich genauso. Es werden dabei k und ℓ sowie u und v vertauscht.

Beweis der Schur'schen Polynomversionen der Rogers-Ramanujan Identitäten

Für $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $\ell = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ und $u = r, v = r + 1$ ergibt sich aus Satz 2.3

$$s_j^+ \left(q; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) = q^{\frac{j((2r+1)j-1)}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ n + (2r+1)j \\ 2 \end{matrix} \right]. \quad (2.35)$$

Analog erhalten wir

$$s_j^- \left(q; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) = q^{\frac{j((2r+1)j+1)}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ n - (2r+1)j \\ 2 \end{matrix} \right]. \quad (2.36)$$

Allgemein sehen wir, dass das Gewicht $a_r(q; n)$ aller Gitterpunktwege im \mathbb{R}^2 , die im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ beginnen, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Aufstiege und $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ Abstiege haben und ganz im Streifen $S: -r-1 < y < r$ bleiben, gegeben ist durch

$$a_r(q; n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j((2r+1)j-1)}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ n + (2r+1)j \\ 2 \end{matrix} \right]. \quad (2.37)$$

Für $r = 1$ ergibt das eine weitere Formel von I. Schur

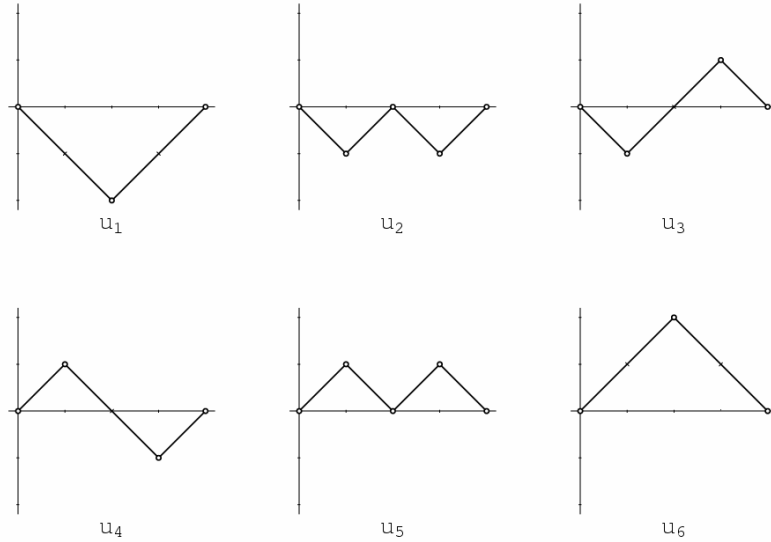
$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ n + 3j \\ 2 \end{matrix} \right] = 1. \quad (2.38)$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert diese wieder zum Pentagonalzählensatz von L. Euler, der also ebenfalls als Aussage über Gewichte von Gitterpunktwegen interpretiert werden kann.

Wenn wir als einfaches Beispiel $n = 4$ wählen, so reduziert sich diese Formel auf

$$\begin{aligned} -s_1^-(q; 2, 2) + s_0(q; 2, 2) - s_1^+(q; 2, 2) &= -q^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - q \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \\ &= -q^2 + \frac{(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)}{1+q} - q(1+q+q^2+q^3) = \\ &= -q^2 + (1+q+2q^2+q^3+q^4) - (q+q^2+q^3+q^4) = 1. \end{aligned}$$

Es ist instruktiv, sich in diesem relativ trivialen Fall den kombinatorischen Hintergrund explizit vor Augen zu führen. Es gibt $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$ Gitterpunktwege mit 2 Aufstiegen und 2 Abstiegen, nämlich



Figur 4

Diese Wege haben die folgenden Gewichte

$\gamma(u_1) = q^2, \gamma(u_2) = 1, \gamma(u_3) = q^3, \gamma(u_4) = q, \gamma(u_5) = q^{1+3} = q^4, \gamma(u_6) = q^2$. Davon liegt nur der Weg u_2 im Streifen $-2 < y < 1$. Dieser hat das Gewicht 1, welches durch die rechte Seite von (2.38) gezählt wird. Das

Gesamtgewicht aller Wege ist $s(q; 2, 2) = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$. Es gibt 4 Wege, die den

Streifen auf der Oberseite verlassen, nämlich u_3, u_4, u_5, u_6 , mit dem Gewicht

$s_1^+(q; 2, 2) = q^{\binom{2}{2} + \binom{1}{2}} \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2+1 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = q + q^2 + q^3 + q^4$, und einen Weg, der den Streifen auf der Unterseite

verlässt, nämlich u_1 , mit dem Gewicht $s_1^-(q; 2, 2) = q^{\binom{2}{2} + \binom{1}{2}} \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = q^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = q^2$.

Wege, die den Streifen öfter als einmal verlassen, gibt es hier nicht.

Für $r = 2$ erhalten wir die endliche Version der ersten Identität von Rogers-Ramanujan (2.14).

Nun wollen wir dasselbe für das Gewicht $a_{r,p}(q; n)$ aller Gitterpunktwege im \mathbb{R}^2 , die im Punkt

$(x, y) = (0, r - p)$ beginnen, $\left\lfloor \frac{n + p - r}{2} \right\rfloor$ Aufstiege und $\left\lfloor \frac{n + 1 + r - p}{2} \right\rfloor$ Abstiege haben und ganz im Streifen $S: -r - 1 < y < r$ bleiben, machen.

Im Fall $q = 1$ haben wir jeden solchen Weg um $r - p$ Einheiten nach unten verschoben. Dabei bleiben jedoch die Extrempunkte nicht erhalten.

Wir wollen daher das Verschieben eines Weges um eine Einheit nach unten etwas modifizieren. Wir führen zunächst alle Gipfel der Höhe 1 in Täler der Höhe -1 und alle Täler der Höhe -1 in Gipfel der Höhe 1 über und verschieben diesen neuen Weg um eine Einheit nach unten. Wir nennen diese kombinierte Abbildung einen Shift nach unten. Bei dieser Abbildung, die klarerweise invertierbar ist, wird die Menge der Extrempunkte auf sich abgebildet, sie lässt daher das Gewicht invariant.

Wir wenden nun auf den ursprünglichen Weg $(r - p) -$ mal einen solchen Shift nach unten an und erhalten einen Weg, der im Nullpunkt $(0, 0)$ beginnt und auf der Höhe $p - r$ oder $p - r - 1$ endet. Er liegt dann ganz im Streifen $p - 2r - 1 < y < p$ und hat dasselbe Gewicht wie der ursprüngliche Weg.

Es ergibt sich dann $s_j^+(q; \left\lfloor \frac{n-r+p}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1+r-p}{2} \right\rfloor) = q^{\frac{j((2r+1)j+2p-2r-1)}{2}} \left\lfloor \frac{n}{n+(2r+1)j+p-r} \right\rfloor$ und

$$s_j^-(q; \left\lfloor \frac{n-r+p}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n+1+r-p}{2} \right\rfloor) = q^{\frac{j((2r+1)j-2p+2r+1)}{2}} \left\lfloor \frac{n}{n-(2r+1)j+p-r} \right\rfloor.$$

Also erhalten wir

$$a_{r,p}(q; n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{j((2r+1)j+2p-2r-1)}{2}} \left\lfloor \frac{n}{n+(2r+1)j+p-r} \right\rfloor. \quad (2.39)$$

Für $r = 2, p = 1$ liefert das (2.15).

Damit sind die Rogers-Ramanujan Identitäten vollständig bewiesen.

3. Schlussbemerkungen

Unser Ziel war es, eine elementare Darstellung der Schur'schen Polynomversionen (2.14) und (2.15) der Identitäten von Rogers-Ramanujan zu geben. In diesen Formeln wird das Gesamtgewicht aller Wege, die in einem gewissen Streifen parallel zur $x -$ Achse liegen, auf zwei verschiedene Arten berechnet. Diese Wege und ihr Gewicht haben eine physikalische Interpretation (vgl. [10]), auf welche wir hier nicht eingehen konnten. Die linke Seite wird von den Physikern als fermionische Darstellung und die rechte Seite als die bosonische Darstellung des Gewichts bezeichnet. Diese Polynomversionen der Rogers-Ramanujan Identitäten ergeben sich also durch Vergleich der bosonischen mit der fermionischen Darstellung. Sie wurden zuerst von I. Schur [11] auf anderem Wege gefunden. Die physikalische Interpretation und die daraus entspringende kombinatorische Darstellung durch Wege geht auf R.J. Baxter zurück (vgl. [10]). Wie wir gesehen haben, lassen sich diese Versionen, die als q -Analoge der Identitäten (0.3) und (0.4) für die Fibonacci-Zahlen interpretiert werden können, rein mathematisch ohne Rückgriffe auf physikalische Überlegungen beweisen. Der physikalische Hintergrund versteckt sich dabei in der speziellen Wahl des Gewichts für die Gitterpunktwege. Das mysteriöse Auftreten der Zahl 5 bei den Fibonacci-Zahlen und den Rogers-Ramanujan Identitäten lässt sich damit zwar nicht wirklich erklären, beruht aber zum Teil darauf, dass die Ränder des dabei verwendeten Streifens um 5 Einheiten voneinander entfernt sind.

Die hier dargestellten Sätze sind nur der einfachste Spezialfall einer Fülle interessanter Resultate, die sich mit denselben Methoden beweisen lassen (vgl. [7], [8] und die dort zitierte Literatur). Es gibt auch andere Polynomversionen der Identitäten von Rogers-Ramanujan und verwandter Identitäten (vgl. [12] oder [1]). Allerdings geht bei diesen die Analogie zu den Fibonacci-Zahlen verloren. Eine elementare Einführung in die Theorie der Partitionen findet man in [1].

Literatur

- [1] Andrews, G. E., Eriksson, K.: Integer Partitions, Cambridge University Press 2004
- [2] Andrews, G. E.: On the proofs of the Rogers-Ramanujan identities, in *q-Series and Partitions, The IMA volumes in Mathematics and its Applications* **18**, 1-14 (1989)
- [3] Andrews, G. E., Baxter, R.J.: A motivated proof of the Rogers-Ramanujan identities, *Am. Math. Mon.* **96**, 401-409 (1989)
- [4] Beutelspacher, A., Petri, B.: *Der goldene Schnitt*, B.I. Wissenschaftsverlag 1988
- [5] Cigler, J.: Recurrences for some sequences of binomial sums, *Sitzungsber. ÖAW Abt. II*, 61-83 (2001) (<http://www.oeaw.ac.at>)
- [6] Cigler, J.: q-Fibonacci polynomials, *Fibonacci Quarterly* **41**, 31-40 (2003)
- [7] Cigler, J.: q-Fibonacci polynomials and the Rogers-Ramanujan identities, *Annals of Combinatorics* **8**, 269-285 (2004)
- [8] Cigler, J.: A class of Rogers-Ramanujan type recursions, erscheint in *Sitzungsber. ÖAW* 2004
- [9] Kanigl, R.: *Der das Unendliche kannte. Das Leben des genialen Mathematikers Srinivasa Ramanujan*, Verlag Vieweg 1995
- [10] Okado, M., Schilling, A., Shimozone, M.: Crystal bases and q-identities, *Contemp. Math.* **291**, 29-53 (2001)
- [11] Schur, I.: Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche, 1917, in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd.2, 117-136, Springer 1973
- [12] Sills, A.V.: Finite Rogers-Ramanujan type identities, *Electronic J. Comb.* **10** (2003), R 13