Mathematische Randbemerkungen 1. Binomialkoeffizienten

Der binomische Lehrsatz ist eines der zentralen Resultate der Analysis. In meiner Vorlesung über Differential- und Integralrechnung habe ich ihn daher gleich zu Beginn ausführlich behandelt. Ich bin davon ausgegangen, dass $(1+x)^n$ ein Polynom $n-$ten Grades ist und daher eine Darstellung der Gestalt

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k \tag{1}$$

mit gewissen Koeffizienten $\binom{n}{k}$ besitzt und habe dann die Frage gestellt, wie man diese Koeffizienten bestimmen kann.
Durch Koeffizientenvergleich erhält man aus $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$ die Rekursion

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{2}$$

Die offensichtlichen Randbedingungen $\binom{0}{k} = [k=0]$ und $\binom{n}{0} = 1$ legen dann $\binom{n}{k}$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$ eindeutig fest und gestatten die Konstruktion des Pascal'schen Dreiecks.
Es bleibt also die Frage, ob es eine Formel für $\binom{n}{k}$ gibt. Diese wird üblicherweise einfach hingeschrieben und mit Induktion bewiesen. Diese Vorgangsweise gefällt mir nicht. Ich möchte zumindest andeuten, wie man eine solche Formel finden kann. Ich habe daher darauf hingewiesen, dass man aus dem Pascal'schen Dreieck vermuten kann, dass $\binom{n}{1} = n$ ist und das dann mit Induktion bewiesen. Aus der Rekursionsformel ergibt sich weiters
$\binom{n}{2} = (n-1) + \binom{n-1}{2} = \cdots = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n\frac{n-1}{2}$,

was genau so verifiziert werden kann. Das führt zur Vermutung, dass $\binom{n}{k} = p_k(n)$ ein Polynom $k-$ten Grades sein könnte. Da $\binom{0}{k} = \binom{1}{k} = \cdots = \binom{k-1}{k} = 0$ ist, hätte p_k die Nullstellen $0,1,\cdots,k-1$. Es wäre also $p_k(x) = a(x-0)(x-1)\cdots(x-(k-1))$ mit einer Konstanten a. Da $\binom{k}{k} = 1$ ist, ergibt sich $a = \frac{1}{k!}$ und daher $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$.

Im Nachhinein kann das mit Induktion verifiziert werden.
Viel einfacher wird natürlich alles, wenn man schon differenzieren kann. Aber das kommt ja in der Vorlesung erst später dran. Mir geht es hier vor allem um die Tatsache, dass man aus der Rekurrenz (2) die Formel für $\binom{n}{k}$ nicht unmittelbar erraten oder ableiten kann.

Die Situation wird paradoxerweise viel einfacher, wenn man eine kleine Verallgemeinerung vornimmt. Betrachten wir statt $(a+b)^n$ für reelle oder komplexe Zahlen a,b den Ausdruck $(A+B)^n$ für Elemente A,B einer Algebra über $\mathbb{C}$, die $BA=qAB$ mit einer positiven reellen Zahl q erfüllen. So etwas gibt es. Man kann etwa für A den Multiplikationsoperator mit x und für B den linearen Operator $Bp(x)=p(qx)$ auf dem Vektorraum der Polynome $p(x)$ nehmen. Denn dann ist $BAp(x)=Bxp(x)=qxp(qx)=qAp(qx)=qABp(x).$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, die man $q-$Binomialkoeffizienten nennt, so dass gilt

$$(A+B)^n=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}A^kB^{n-k}. \tag{3}$$

Aus $(A+B)^n=(A+B)(A+B)^{n-1}$ ergibt sich

$\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}A^kB^{n-k}=(A+B)\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}A^kB^{n-k-1}.$ Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, \tag{4}$$

weil $BA^k=q^kA^kB$ ist.

Analog folgt aus $(A+B)^n=(A+B)^{n-1}(A+B),$ dass

$\sum_{k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}A^kB^{n-k}=\sum_{k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}A^kB^{n-k-1}(A+B)$ ist. Daraus ergibt Koeffizientenvergleich

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Im Unterschied zum Fall $q=1$ gibt es hier wegen der Nichtkommutativität zwei verschiedene Rekurrenzrelationen für die $q-$Binomialkoeffizienten. Aus diesen lässt sich auch sofort eine Formel ableiten. Man braucht nur $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ aus den beiden Identitäten (4) und (5) eliminieren und erhält

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}=q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}-q^n\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{1-q^n}{1-q^k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}=\frac{[n]}{[k]}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix},$

wenn man $[n]=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+\cdots+q^{n-1}$ als $q-$Analogon der natürlichen Zahl n einführt.

Somit ergibt sich

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k][k-1]\cdots[1]}\begin{bmatrix} n-k \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k][k-1]\cdots[1]}. \tag{6}$$

Für den Spezialfall $q=1$ ergibt sich wieder die obige Formel.

Es gilt also der

Allgemeine q-binomische Lehrsatz
Seien A, B Elemente einer Algebra über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, welche die q-Kommutativitätsrelation $BA = qAB$ erfüllen. Dann gilt

$$(A+B)^n = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}. \tag{7}$$

Die Rekurrenzrelationen sind ein Spezialfall der

q-Vandermonde'schen Formel

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j\geq 0} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} q^{(m-j)(k-j)}. \tag{8}$$

Diese ergibt sich durch Koeffizientenvergleich aus $(A+B)^{m+n} = (A+B)^m (A+B)^n$.
Wenn man m und n vertauscht, ergibt sich die zweite Version.
Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich für $m = n = k$:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{j\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j)} = \sum_{j\geq 0} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 q^{j^2}. \tag{9}$$

Man kann bei diesen Resultaten q auf zwei Arten interpretieren: Entweder als reelle oder komplexe Zahl oder als Unbestimmte. Im ersten Fall kann man $q = 1$ setzen oder den Grenzwert für $q \to 1$ betrachten. Dann ergibt sich $\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$. Im zweiten Fall kann man in vielen Fällen Grenzübergänge durchführen, die im Fall $q = 1$ nicht möglich sind. Z.B. kann man in der Formel

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

auch $n \to \infty$ gehen lassen. Die rechte Seite ist ein Polynom in q und kann daher auch als formale Potenzreihe in q über $\mathbb{C}$ angesehen werden. Für formale Potenzreihen in q mit komplexen Koeffizienten versteht man unter $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} a_{n,k} q^k = \sum_{k\geq 0} a_k q^k$, dass für jedes K ein Index N existiert, so dass für alle $n > N$ gilt $a_{n,k} = a_k$ für alle k mit $0 \leq k \leq K$. Das heißt, für genügend große n wird der Beginn der Reihe nicht beeinflusst.

Dann ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}. \tag{10}$$

Denn ist K fest gewählt und $n > K+k$, dann stimmen alle Koeffizienten von q^j für $0 \le j \le K$
des Polynoms $\dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$ und der formalen Potenzreihe
$\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} = (1+q+q^2+\cdots)\cdots(1+q^k+q^{2k}+\cdots)$ überein, da die Multiplikation mit q^j, $j \ge n-k+1$, auf diese keinen Einfluss hat.
Aus der Formel (9) ergibt sich beispielsweise

$$\frac{1}{(1\div q)^\infty} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = \sum_{j\ge 0}\frac{q^{j^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^j)^2}. \tag{11}$$

Für $i \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{s\ge i} q^{(s-i)(s+i)}\begin{bmatrix} n+2i \\ s+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-2i \\ s-i \end{bmatrix} = \sum_{j\ge 0} q^{j(2i+j)}\begin{bmatrix} n+2i \\ n-j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-2i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$$

eine Verallgemeinerung von (9).

Wenn wir hier $n\to\infty$ gehen lassen, so folgt für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{s\ge i}\frac{q^{(s-i)(s+i)}}{(1\div q)^{s-i}(1\div q)^{s+i}} = \frac{1}{(1\div q)^\infty}. \tag{12}$$

Die bekannteste Anwendung von (7) ist die Formel

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k \tag{13}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Diese ergibt sich, wenn man $(A,B) = (x\varepsilon, a\varepsilon)$ für $a \in \mathbb{C}$ wählt, wobei ε der lineare Operator auf dem Vektorraum der Polynome ist, der durch $\varepsilon p(x) = p(qx)$ definiert ist.
Denn $(x\varepsilon + a\varepsilon)^n = (x+a)(qx+a)\cdots(q^{n-1}x+a)\varepsilon^n$ und daher ist
$(x+a)(qx+a)\cdots(q^{n-1}x+a)\varepsilon^n = \sum q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}\varepsilon^n$. (13) ergibt sich, wenn man diese Identität auf das konstante Polynom 1 anwendet.

Wir wollen eine Formel, die den Parameter q enthält und sich für $q \to 1$ auf eine klassische Formel reduziert, ein $q-$Analogon dieser Formel nennen.

In diesem Sinn ist (13) ein $q-$Analogon des binomischen Lehrsatzes $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Wenn man in (13) $n \to \infty$ gehen lässt, wobei man beide Seiten als formale Potenzreihen in den Unbestimmten x und q auffasst, so erhält man

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} x^k. \tag{14}$$

Ersetzt man darin $x \to (1-q)x,$ so ergibt sich

$$E(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!} x^k = (1+(1-q)x)(1+q(1-q)x)\cdots. \tag{15}$$

Da $\lim_{q\to 1} \sum_{k\geq 0} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{[k]!} x^k = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x$ ist, ist $E(x)$ ein $q-$Analogon der Exponentialfunktion.

Der Grenzübergang für $n \to \infty$ stellt in gewisser Weise ein Analogon der Formel $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für formale Potenzreihen dar.

Wählt man in (7) $A = x, B = (1-x)\varepsilon$, dann erhält man auf dieselbe Weise

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (x;q)_{n-k} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1 \underset{\cdot}{-} x)^{n-k} = 1. \tag{16}$$

Hier bedeutet $(x;q)_n = (1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x).$ Diese Schreibweise hat sich für die Theorie der $q-$hypergeometrischen Reihen als sehr vorteilhaft erwiesen. Für die elementaren Überlegungen dieses Essays setze ich lieber $(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a) = (x \underset{\cdot}{-} a)^n,$ weil daraus die Analogie zu $(x-a)^n$ direkt ersichtlich ist.
Wenn wir in der Formel (16) zum Grenzwert $n \to \infty$ übergehen, erhalten wir

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} = \frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots}. \tag{17}$$

Für $x \to (1-q)x$ ergibt sich hier

$$e(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{[k]!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)(1-q(1-q)x)\cdots}. \tag{18}$$

Das ist ebenfalls ein $q-$Analogon der Exponentialfunktion.

Ein Vergleich der beiden Formeln liefert sofort

$$e(x)E(-x)=1, \tag{19}$$

ein $q-$ Analogon der Formel $e^x e^{-x}=1.$

In der Analysis wird gezeigt, dass der binomische Lehrsatz in der Form (1) eine natürliche Erweiterung auf negative Indizes besitzt. Es gilt nämlich im Sinne von formalen Potenzreihen

$$(1+x)^{-n}=\sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}x^k=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k x^k. \tag{20}$$

Um ein $q-$ Analogon dieser Formel abzuleiten, bemerken wir zunächst, dass der allgemeine $q-$ binomische Lehrsatz (7) mit der Formel

$$e(Az)e(Bz)=e((A+B)z) \tag{21}$$

äquivalent ist. Denn

$$e(Az)e(Bz)=\sum_k \frac{A^k z^k}{[k]!}\sum_\ell \frac{B^\ell z^\ell}{[\ell]!}=\sum_n \frac{z^n}{[n]!}\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}=\sum_n \frac{z^n}{[n]!}(A+B)^n=e((A+B)z).$$

Diese Formel zeigt, dass die charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion $e^{x+y}=e^x e^y$ für die $q-$ Exponentialfunktion $e(x)$ durch (21) ersetzt werden muss.

Aus (21) ergibt sich sofort auch wieder (19), wenn man $(A,B)=(x,-x\varepsilon)$ wählt. Denn dann ist $e(x)e(-x\varepsilon)=e(x(1-\varepsilon)).$ Das bedeutet $\sum_n \frac{x^n}{[n]!}\sum_n \frac{(-x\varepsilon)^n}{[n]!}=\sum_n \frac{(x(1-\varepsilon))^n}{[n]!}.$

Wendet man diese Identität auf das konstante Polynom 1 an, so ergibt sich wegen

$(x\varepsilon)^n=q^{\binom{n}{2}}x^n\varepsilon^n$ und $(1-\varepsilon)(1)=0$

$$\sum_n \frac{x^n}{[n]!}\sum_n \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n}{[n]!}=1,$$

Wählt man $A=-x\varepsilon, B=a\varepsilon,$ dann ergibt sich
$e(-x\varepsilon z)e(a\varepsilon z)=e((a-x)\varepsilon z).$
Daraus folgt so wie oben

$$\frac{e(az)}{e(xz)}=e(az)E(-xz)=\sum_n \frac{(a-x)^n}{[n]!}z^n. \tag{22}$$

Das ist natürlich ein $q-$ Analogon der Formel $e^{az}e^{-xz}=e^{(a-x)z}.$

Ersetzt man $z \to \frac{z}{1-q}$ so bedeutet das

$$\frac{(1-xz)(1-qxz)(1-q^2xz)\cdots}{(1-az)(1-qaz)(1-q^2az)\cdots} = \sum_{k\geq 0} \frac{(a \dotplus x)^k}{(1 \dotplus q)^k} z^k. \tag{23}$$

Für $a=1$ und $x=q^n$ ergibt sich daraus

$$\frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{n-1}z)} = \sum_{k\geq 0} \frac{(1 \dotplus q^n)^k}{(1 \dotplus q)^k} z^k = \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} z^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} (q^n z)^k. \tag{24}$$

Damit haben wir das gesuchte $q-$Analogon der Formel (20) gefunden.
Auch hier zeigt sich, dass der Beweis wesentlich einfacher als im klassischen Fall ist.
Während im klassischen Fall für alle $m,n \in \mathbb{Z}$ die Identität $(1+z)^{m+n} = (1+z)^m (1+z)^n$ erfüllt ist, gilt hier

$$(1 \dotplus z)^{m+n} = (1 \dotplus z)^m (1 \dotplus q^m z)^n. \tag{25}$$

Speziell ist $\frac{1}{(1 \dotplus z)^m} = \frac{(1 \dotplus q^m z)^n}{(1 \dotplus z)^{m+n}} = \frac{(1 \dotplus q^m z)^\infty}{(1 \dotplus z)^\infty}$.

Als weitere Folgerung des $q-$binomischen Lehrsatzes wollen wir die folgende Identität von Cauchy zeigen:

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-q^j z} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k^2} z^k}{(1 \dotplus qz)^k}. \tag{26}$$

Diese ist ein $q-$Analogon der trivialen Formel $\frac{1}{(1-z)^n} = \left(1+\frac{z}{1-z}\right)^n = \sum_k \binom{n}{k} \left(\frac{z}{1-z}\right)^k$.

Wir wissen, dass

$$(1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x) = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

ist. Setzt man $x \to \varepsilon \frac{z}{1-z}$, dann ist

$$(1+\varepsilon \frac{z}{1-z})(1+q\varepsilon \frac{z}{1-z})\cdots(1+q^{n-1}\varepsilon \frac{z}{1-z})(1) = \sum_k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\varepsilon \frac{z}{1-z}\right)^k (1).$$

Die rechte Seite ergibt $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k^2} z^k}{(1 \dotplus qz)^k}$.

Für die linke Seite verwenden wir Induktion. Wir behaupten

$$(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1+q\varepsilon\frac{z}{1-z})\cdots(1+q^{n-1}\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=(1+q^{n-1}\varepsilon\frac{z}{1-z})\cdots(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^jz}.$$

Für $n=1$ stimmt das, weil $(1+\varepsilon\frac{z}{1-z})(1)=1+\frac{qz}{1-qz}=\frac{1}{1-qz}$ ist. Ist es für n bereits gezeigt, so erhalten wir

$$(1+q^n\varepsilon\frac{z}{1-z})\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^jz}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^jz}+\frac{q^{n+1}z}{1-qz})\prod_{j=2}^{n+1}\frac{1}{1-q^jz}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-q^jz}\left(1+\frac{q^{n+1}z}{1-q^{n+1}z}\right)=\prod_{j=1}^{n+1}\frac{1}{1-q^jz}.$$

Für $n\to\infty$ ergibt sich daraus

$$\frac{1}{(1\div qz)^{\infty}}=\sum_{k\geq 0}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div q)^k(1\div qz)^k} \tag{27}$$

als Verallgemeinerung von (11).

Die Formel (26) bleibt auch für negative ganze Zahlen richtig und lautet dann

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{z}{q^j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div qz)^k}. \tag{28}$$

Aus (24) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}z^k=\frac{1}{(1+q^{-n}z)\cdots(1+q^{-1}z)}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}\frac{q^{k^2}z^k}{(1\div qz)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}-n\\k\end{bmatrix}q^{\binom{k}{2}}\left(\varepsilon\frac{z}{(1-z)}\right)^k(1)=\left(1+q^{-n}\left(\varepsilon\frac{z}{(1-z)}\right)\right)^{-1}\cdots\left(1+q^{-1}\left(\varepsilon\frac{z}{(1-z)}\right)\right)^{-1}(1).$$

Beide Seiten von (28) genügen daher, wie man leicht sieht, der Gleichung $f_n(z)=f_{n+1}(z)+\frac{z}{q^n(1-qz)}f_{n+1}(qz)=\left(1+\frac{1}{q^{n+1}}\left(\varepsilon\frac{z}{(1-z)}\right)\right)f_{n+1}(z)$ mit $f_0(z)=1,$ durch die $f_n(z)$ eindeutig festgelegt ist.

Für $n=1$ ergibt sich speziell

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{z^k}{(1\div qz)^k}=1-z.$$