Einige Bemerkungen zur Darstellung mathematischer Theorien

Manche Lehrbücher bieten eine Art Momentaufnahme der logischen Grundlagen des derzeitigen Stands der Mathematik. Sie erwecken den Eindruck, dass die Mathematik durch reines Nachdenken entstanden ist, wobei die Mengenlehre eine Art mathematischen Urknall bildet, aus dem sich alles andere auf rein logische Weise entwickelt hat. Dabei wird die historische Entwicklung der Mathematik vollständig ignoriert. Insbesondere fällt unter den Tisch, dass viele Teile der Mathematik aus dem Wunsch heraus entstanden sind, eine objektive Beschreibung der Welt zu geben, so wie sie uns naiverweise erscheint.
Die ersten mathematischen Objekte wie Zahlen und einfache geometrische Figuren entstanden offenbar aus verschiedenen praktischen Bedürfnissen und waren direkte Beschreibungen der erfahrenen Wirklichkeit. Dann haben die alten Griechen versucht, komplizierte Dinge so lange auf einfachere zurückzuführen, bis man zu anschaulich evidenten Sachverhalten gelangte und haben auf diese Weise den Begriff des mathematischen Beweises gefunden. Man hat sich auch von den jeweils erzielten Ergebnissen inspirieren lassen und weiter darauf aufgebaut, ohne Rücksicht darauf, ob die erhaltenen Resultate noch physikalisch sinnvoll waren oder nicht. Im Laufe der Zeit kamen auch immer wieder neue Impulse von außen hinzu. Eine faszinierende Darstellung der Anfänge dieser Entwicklung gibt David Mumford in „Applied Mathematics 18: Modelling the World with Mathematics.“ (http://www.dam.brown.edu/people/mumford/AM18/.

Diese Entwicklung ging nicht immer stetig vor sich, sondern weist an entscheidenden Stellen große Sprünge oder Paradigmenwechsel auf. Diese Sprünge sind zum Teil auch dafür verantwortlich, dass die Mathematik dem Außenstehenden so oft als unverständlich und besonders schwierig erscheint. Auch der Übergang von der Schul- zur Universitätsmathematik stellt einen derartigen Sprung dar. Manche Mathematiker haben anscheinend den Ehrgeiz, alles so darzustellen, wie es die letzte mathematische Mode verlangt, auch auf die Gefahr hin, dass das intuitive Verständnis des Stoffes darunter leidet. Ich habe mich dagegen bei meiner langjährigen Tätigkeit als Hochschullehrer immer bemüht, vom intuitiven Verständnis des Stoffes auszugehen und schrittweise zu präziseren Begriffen vorzustoßen, wobei ich besonders auf die Hintergründe derartiger Sprünge eingegangen bin.

Da ich weder Philosoph noch Logiker bin, möchte ich keine allgemeinen Thesen aufstellen, sondern mich auf einige typische Beispiele beschränken.
Wer Anfängervorlesungen halten soll, steht vor dem Problem, wie er den Sprung von der Schul- zur Universitätsmathematik bewältigen kann. Man kann natürlich so tun, als ob es diesen Sprung nicht gäbe, und den Hörern sagen, sie sollten alles vergessen, was sie bisher wussten, und sozusagen ab ovo beginnen, wobei man entweder von den natürlichen Zahlen oder der Mengenlehre ausgeht und dazu noch die Grundlagen der mathematischen Logik entwickelt. Das mag zwar für Studenten, die ausschließlich an den logischen Grundlagen interessiert sind, geeignet sein, die große Masse der Hörer wird dadurch aber ziemlich irritiert werden. Natürlich sollten die Studenten diese Zurückführung auf einfachere Dinge einmal kennen lernen. Es wäre aber vernünftiger, wenn das erst dann geschieht, wenn sie die Notwendigkeit dafür erkennen können.

Ich habe dieses Problem in meiner Vorlesung über Differential- und Integralrechnung so gelöst, dass ich die reellen Zahlen als Menge aller Dezimalzahlen, die ich anschaulich als die Menge aller Punkte der Zahlengeraden interpretiert habe, aus der Schule als bekannt vorausgesetzt habe. Um ein „solides“ Fundament für die weiteren Ausführungen zu erhalten, habe ich die Eigenschaften der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die sich aus dieser Vorstellung ergeben, auf die übliche Weise explizit beschrieben: Es gibt Operationen, genannt Addition und Multiplikation, welche die Körperaxiome erfüllen. Außerdem sind die reellen Zahlen total geordnet und bilden einen angeordneten Körper. Da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ sind, gilt auch das archimedische Axiom. Schließlich folgt aus der Darstellung durch abbrechende und nichtabbrechende Dezimalzahlen, dass das Prinzip der Intervallschachtelung

gilt. Die Menge $\mathbb{R}$ bildet also einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper und ist dadurch sogar eindeutig festgelegt.
Ein Logiker könnte einwenden, dass das keine Beschreibung, sondern bestenfalls eine Präzisierung der Schulkenntnisse ist, da ja in der Schule nicht alle Eigenschaften bewiesen werden können. Man sollte also die reellen Zahlen gleich axiomatisch als den eindeutig bestimmten vollständigen archimedisch angeordneten Körper definieren und im Nachhinein beweisen, dass man für jedes Element eine Dezimaldarstellung finden kann. Eine solche Vorgangsweise halte ich jedoch vom didaktischen Standpunkt aus für ungeeignet, da dabei „alles vom Himmel herunterfällt" und ihr jede anschauliche Motivation fehlt. Bei der oben skizzierten Einführung erkennen die Studenten dagegen nach und nach selbst, dass ihre Schulkenntnisse lückenhaft sind und einer Präzisierung bedürfen. Natürlich muss man auch zeigen, wie man aus der abstrakten Charakterisierung wieder die konkrete Dezimaldarstellung zurückgewinnt.

Sehr oft wird behauptet, dass in der heutigen Mathematik kein Platz mehr für mathematische „Objekte" und inhaltliche Ableitungen sei, sondern alles auf formal-logische Weise aus Axiomensystemen deduziert werden sollte. Das halte ich nicht nur vom didaktischen Standpunkt aus für verfehlt, sondern empfinde es – zumindest in der Analysis – als kontraproduktiv. Natürlich kann man vom Standpunkt formaler Beweise aus Objekte als „überflüssig" ansehen, aber gerade in der Analysis würde mit den Objekten auch der ganze Sinn eliminiert. Die Liste der Körperaxiome ist genau so eine Fiktion wie die Vorstellung der Zahlengeraden. Ein Unterschied besteht vielleicht darin, dass man sich an die Zahlengerade bereits gewöhnt hat, während angeordnete Körper was Neues sind. Ich glaube, man braucht zumindest in der Analysis beides: die axiomatische Darstellung für formal-logisch exakte Beweise und die anschauliche Vorstellung, um die Beweise zu verstehen und überhaupt zu erkennen, was man beweisen kann.
Yu.I. Manin hat in „A course in mathematical logic" geschrieben, dass ein Beweis nicht notwendigerweise gewisse formale Kriterien erfüllen muss, sondern eine überzeugende Darstellung des gegebenen Sachverhalts geben muss. Er weist auch explizit darauf hin, dass das, was man unter Beweis versteht, zeit- und kulturabhängig ist. Paul Feyerabend hat in seinem Buch „Wider den Methodenzwang" u.a. geschrieben: „Begriffe haben nicht nur einen logischen Gehalt, sie haben auch Assoziationen, sie geben Anlass zu Emotionen, sie sind verbunden mit Bildern. Diese Assoziationen, Emotionen und Bilder sind ganz wesentlich bei der Beziehung zu unseren Mitmenschen. Fallen sie weg oder verändern sie sich auf grundlegende Weise, dann werden die Begriffe vielleicht „objektiver", d.h. sie gehorchen dann vielleicht einem intellektuellem Kriterium, aber sie verletzen ein soziales Kriterium, nämlich zu Menschen als Menschen zu reden und nicht als ob sie Steine wären."

Für die meisten Studenten ist es eine Überraschung, wenn sie erfahren, dass der anschauliche Begriff der Geraden nicht eindeutig festgelegt ist, sondern auf verschiedene Weise präzisiert werden kann. Als typisches Beispiel erwähne ich gerne den Körper $\mathbb{R}(x)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$, der aus allen Ausdrücken $\frac{p(x)}{q(x)}$ besteht, wo $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Man braucht dabei nur die Funktion x als unendlich groß aufzufassen, also $r < x$ für alle $r \in \mathbb{R}$ zu setzen. Da alle Elemente eines angeordneten Körpers miteinander vergleichbar sind, kann man sie insbesondere mit den reellen Zahlen vergleichen und daher als Elemente einer Geraden interpretieren.

Ein spezielles Kapitel stellt die Mengenlehre dar. Man ist im Laufe des 19. Jahrhunderts zur Einsicht gekommen, dass es oft vorteilhaft ist, die Untersuchung individueller mathematischer Objekte auf das Studium von ganzen Klassen von Objekten zurückzuführen. So wird etwa die Theorie der Fourierreihen erst richtig verständlich, wenn man solche Reihen als Punkte eines Funktionenraums interpretiert. Dafür benötigt man eine adäquate „Sprache". Diese wird durch die Mengenlehre geliefert, die in ihren Grundzügen von Georg Cantor entwickelt wurde. Er beschrieb eine „Menge" als Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Da diese Beschreibung gelegentlich zu Missverständnissen führte, hat man sich bemüht, präzisere Formulierungen zu finden, wie etwa die folgende, die von L. Pozsgay (Liberal intuitionism as a basis for set theory, Proc. Symp. pure Math. XIII, 1971) stammt: „Eine Menge ist eine gedankliche Konstruktion, welche darin besteht, dass man sich eine Gesamtheit von Objekten, welche bereits vorher gefunden oder konstruiert wurden, vorstellt und dann diese Gesamtheit als ein einziges neues Objekt – die Menge der gegebenen Objekte – betrachtet. Dabei kann jeder wohldefinierte gedankliche Prozess zur Konstruktion von Mengen, welcher klar und ohne Zweideutigkeiten oder Widersprüche ist, bereits als vollendet betrachtet werden, ungeachtet aller praktischen Schwierigkeiten, welche dem im Wege stünden."
Diese Formulierung garantiert, dass man weder die Menge aller Mengen noch die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, bilden kann. Die damit verbundenen Antinomien sind also gar nicht formulierbar. Denn um die Menge aller Mengen zu bilden, müsste man alle Mengen, also auch die neu zu konstruierende, bereits vorher konstruiert haben. Aus demselben Grund kann sich eine Menge nicht selbst als Element enthalten.
Dieser anschauliche, so genannte naive, Mengenbegriff hat meiner Meinung nach vor allem deshalb eine so gewaltige Wirkung auf die Entwicklung der Mathematik ausgeübt, weil er eine Art Mythos war, der mehr das Gefühl als den rationalen Verstand ansprach und dazu motivierte, unendliche Gesamtheiten so anzuschauen oder so zu interpretieren, als ob sie etwas Ähnliches wären wie „harmlose" endliche Mengen.

Man hat sich natürlich bemüht, auch diesen Mengenbegriff axiomatisch zu beschreiben, d.h. durch seine formalen Eigenschaften zu charakterisieren. Das bekannteste Axiomensystem, ZFC, stammt von Zermelo und Fraenkel. Es zeigt sich jedoch, dass man den intuitiven Mengenbegriff rein axiomatisch nicht vollständig in den Griff bekommen kann. Schon die naheliegende Frage nach den möglichen Mächtigkeiten von Teilmengen der reellen Zahlen, speziell also die Kontinuumhypothese, ist in ZFC unentscheidbar, während sie in der naiven Mengenlehre – wenn die Anschauung nicht trügt – entweder gilt oder nicht. Die Situation ist so ähnlich, wie wenn man die Menge der reellen Zahlen nur durch die Axiome eines angeordneten Körpers ohne das archimedische Axiom beschrieben hätte. Dann wäre die Existenz unendlich großer Elemente in dieser axiomatischen Theorie ebenfalls unentscheidbar, obwohl man weiß, dass es in $\mathbb{R}$ keine solchen Elemente gibt.

Man hat also im wesentlichen zwei verschiedene Mengentheorien: die naive Mengenlehre, die auf Cantor zurückgeht, wo eine Menge ein Objekt ist, das durch die oben gegebene Formulierung beschrieben werden kann, und eine axiomatische Mengenlehre, bei der das Wort „Menge" ein undefinierter primitiver Begriff ist, der nur durch seine Eigenschaften festgelegt ist. Da man bei Beweisen nur auf diese Eigenschaften zurückgreift, wird sehr oft ausschließlich der axiomatische Mengenbegriff ernst genommen.
Ich glaube, man muss dabei unterscheiden, ob man die Mengenlehre, so wie etwa die Gruppentheorie, als innermathematische Theorie auffasst oder ob man sie als universelle Sprache zur Beschreibung mathematischer Begriffe verwenden oder gar als „Grundlage" der Mathematik etablieren will. Im ersten Fall spielen beweistheoretische Aspekte die Hauptrolle. Hier ist natürlich die axiomatische Version der geeignete Ausgangspunkt. Als „Grundlage der Mathematik", was immer man darunter verstehen will, eignet sich aber meiner Meinung nach höchstens die naive Mengenlehre. Der axiomatische Mengenbegriff ist ja ohne die naive Mengenlehre Cantors gar nicht denkbar, sie ist ja erst als Beschreibung des naiven Mengenbegriffs entstanden. Ohne diesen wäre man nie auf die entscheidenden Axiome

gekommen. Die gesamte Mathematik auf einem Begriff aufzubauen, von dem man nicht sagen kann, was er inhaltlich bedeutet, empfinde ich als schizophren. Außerdem hängt die übliche Vorstellung der Menge der natürlichen Zahlen oder der Menge der reellen Zahlen wesentlich am naiven Mengenbegriff. Geht man zu einem anderen Mengenbegriff über, so erhalten diese Mengen ganz andere inhaltliche Interpretationen.
Der angewandte Mathematiker C.W. Churchman (Philosophie des Managements, Rombach 1973) wies darauf hin, dass die Mathematik umso „weicher" werden muss, je mehr man sich mit grundlegenden Dingen beschäftigt. Hart ist dabei alles, was exakt, nachprüfbar oder objektiv ist, weich dagegen alles, was das Gesamtsystem betrifft, subjektiv ist und alle denkbaren Vernetzungen berücksichtigt. Das lässt sich meist nur in Form von „Geschichten" oder „Mythen" formulieren. Während Beweise richtig oder falsch sein können, ist eine solche Unterscheidung bei Geschichten sinnlos. Sie können gut oder schlecht gelungen sein, sie können uns überzeugen oder unbefriedigt lassen. Bei ihrer Beurteilung spielen also ganz andere Kriterien eine Rolle als sie der Mathematiker von seiner täglichen Arbeit her gewohnt ist. Die naive Mengenlehre ist eine Geschichte, die mir brauchbar erscheint. Auch wenn sich die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre nicht beweisen lässt, gibt uns der naive Mengenbegriff wenigstens das Gefühl, dass sie widerspruchsfrei sein könnte, während die axiomatische Version allein nichts dergleichen bewirkt.

Ich möchte nicht missverstanden werden. Ich habe nichts gegen die axiomatische Mengenlehre. Im Gegenteil, sie erweist sich u.a. als sehr nützlich als Vereinfachung der Nonstandardanalysis, wie Edward Nelson eindrucksvoll gezeigt hat. Ich möchte kurz skizzieren, wobei es dabei geht:
Im 17. und 18. Jahrhundert hat man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ im wesentlichen als echten Quotienten zweier unendlich kleiner Zahlen, der Differentiale dx und dy, interpretiert. Man hat so getan, als ob man sich eine Kurve aus unendlich vielen unendlich kleinen geradlinigen Strecken vorstellen könnte. Die Tangente an die Kurve im Punkt $(x, f(x))$ wäre dann die Gerade, welche das unendlich kleine geradlinige Kurvenstück durch den Punkt $(x, f(x))$ enthält. Wenn dieses die Endpunkte $(x, f(x))$ und $(x+dx, f(x)+dy)$ besitzt, so ergibt sich die Steigung als $\frac{dy}{dx}.$ Für $y = x^2$ ist zum Beispiel $dy = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$ und daher $\frac{dy}{dx} = 2x + dx.$ Nachträglich hat man das infinitesimale dx wieder vernachlässigt und als Steigung $2x$ erhalten. Der Philosoph George Berkeley hat im Jahre 1734 auf die in dieser Methode enthaltenen Widersprüche hingewiesen und deshalb die Infinitesimalrechnung als widersprüchlich abgelehnt. Dagegen hat der Philosoph Hans Vaihinger in seiner „Philosophie des Als-Ob" die obigen Ableitungen verteidigt. Er beschrieb die Differentiale resp. Fluxionen als „rein fiktive, widerspruchsvolle Vorstellungsgebilde, vermittels welcher aber jene Subsumtion des Krummen unter das allgemeine Vorstellungsgebilde des Geraden und seiner Gesetze gelingt." Seiner Meinung nach führt man durch die Fiktion der unendlich kleinen Zahlen Widersprüche ein, die am Schluss durch neue Widersprüche (indem man dx=0 setzt) wieder so eliminiert werden, dass man zu richtigen Resultaten gelangt.
Für einen Mathematiker ist eine solche Argumentation natürlich unannehmbar. Was dahinter steckt ist folgendes: Statt gekrümmte Linien durch immer mehr und immer kleinere Geradenstücke zu approximieren, versuchte man sozusagen einen idealen Grenzzustand zu beschreiben. Man hat es lange Zeit für unmöglich gehalten, eine exakte Version eines solchen Grenzzustandes zu finden. Umso größer war das Erstaunen, als es Abraham Robinson gelang, derartige Überlegungen exakt zu machen. Er fand ein sogenanntes Nonstandardmodell $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen, d.h. einen nicht archimedisch angeordneten Körper, der die reellen Zahlen umfasst, und zeigte, wie man darin Analysis so ähnlich betreiben kann, wie es sich die Pioniere der Differential- und Integralrechnung vorgestellt hatten.

In seinem Buch „ Nonstandard Analysis“ (Amsterdam 1966), zeigte Robinson, wie man die obigen heuristischen Überlegungen in $\mathbb{R}^*$ präzisieren kann. So existiert etwa die Ableitung einer Funktion $f(x)$, wenn für alle unendlich kleinen Elemente $dx \in \mathbb{R}^*$ die Differenz $dy = f(x+dx) - f(x)$ ebenfalls unendlich klein ist und sich der Quotient $\frac{dy}{dx}$ von der reellen Zahl $f'(x)$ nur um eine unendlich kleine Größe unterscheidet. Zur Zeit von Newton, Leibniz oder Euler hatte man leider noch nicht die nötigen Hilfsmittel zur Verfügung, um so ein Nichtstandardmodell zu definieren. Man braucht nämlich das Zorn’sche Lemma oder genau so starke Methoden der Logik, um die Existenz eines Nichtstandardmodells zu beweisen.
Am einfachsten geht man folgendermaßen vor: Man ordnet mit Hilfe des Zorn’schen Lemmas jeder Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Zahl $\mu(A) \in \{0,1\}$ so zu, dass gilt:

1)Für jede endliche Menge A ist $\mu(A) = 0,$
2) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$ falls $A \cap B = \varnothing$, und
3) $\mu(\mathbb{N}) = 0.$

Man nennt dann μ ein endlich-additives Maß auf den natürlichen Zahlen und die Familie U aller Mengen mit $\mu(A) = 1$ einen freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.
Allerdings scheint es unmöglich zu sein, so ein Maß μ explizit anzugeben. Man kann lediglich seine „Existenz“ beweisen. Aber das genügt für die folgenden Überlegungen.

Für jedes derartige endlich-additive Maß kann man ein Nichtstandardmodell als die Menge aller (Äquivalenzklassen von) Folgen $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ von reellen Zahlen definieren, wo zwei Folgen als gleich angesehen werden, wenn die Menge A der Indizes, wo sie sich voneinander unterscheiden eine Nullmenge ist, d.h. $\mu(A) = 0$ erfüllt. Addition, Multiplikation und die Ordnungsrelation $<$ werden koordinatenweise definiert. $\mathbb{R}^*$ ist ein echter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, weil man die Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit den konstanten Folgen $(x, x, x, \cdots)$ identifizieren kann. Diese Elemente nennt man Standardzahlen. In $\mathbb{R}^*$ sind beispielsweise die Elemente, welche einer Nullfolge $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ von positiven reellen Zahlen entsprechen, unendlich klein. Denn für jedes reelle $\varepsilon > 0$ gilt $0 < (a_1, a_2, a_3, \cdots) < \varepsilon,$ weil die Menge $\mu(\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq \varepsilon\}) = 0$ ist. Dieses Modell der Zahlengeraden ist also sozusagen ein „dynamisches“ Modell im Unterschied zum „statischen“ der reellen Zahlen.
Statt einer Folge einen reellen Grenzwert zuzuordnen, betrachtet man die Folgen selbst oder genauer geeignete Äquivalenzklassen davon. $\mathbb{R}^*$ ist ein angeordneter Körper, der weder archimedisch angeordnet ist noch das Prinzip der Intervallschachtelung erfüllt. Das kann alles sehr einfach bewiesen werden. Z.B. ergibt sich die Tatsache, dass je zwei Elemente x, y vergleichbar sind, aus der Tatsache, dass die Mengen
$A_< = \{n \in \mathbb{N} : x_n < y_n\}$, $A_= = \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ und $A_> = \{n \in \mathbb{N} : x_n > y_n\}$ paarweise disjunkt sind und $A_< \cup A_= \cup A_> = \mathbb{N}$ erfüllen. Daher muss $\mu(A_<) + \mu(A_=) + \mu(A_>) = 1$ sein. Das ist nur möglich, wenn genau eine dieser Mengen das Maß 1 und die anderen das Maß 0 haben. Es muss demnach genau eine der drei Möglichkeiten $x < y, x = y, x > y$ erfüllt sein.
Die Rolle der Teilmengen von $\mathbb{R}$ spielen in $\mathbb{R}^*$ die so genannten *-Mengen. Das sind die Mengen aller Elemente $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ für die es eine Folge von Teilmengen $M_n \subseteq \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_n \in M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sind alle $M_n = M$, so bezeichnet man die entsprechende *-Menge M^* als Standardmenge. Sie enthält speziell alle Standardzahlen $s \in M$.
Es gilt genau dann $M^* = M$, wenn M endlich ist.

Die Standardmenge $\mathbb{N}^*$ enthält daher Nichtstandardzahlen und jede dieser Nichtstandardzahlen x ist unendlich groß, d.h. erfüllt $x > n$ für alle Standardzahlen $n \in \mathbb{N}$. Ein konkretes Beispiel ist $x = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Speziell ist also $\mathbb{N}^* \supset \mathbb{N}$ eine echte Obermenge von $\mathbb{N}$.
Das Prinzip der vollständigen Induktion gilt mit gewissen Modifikationen auch in $\mathbb{N}^*$. Die entscheidende Bedingung muss jedoch folgendermaßen abgeändert werden: Wenn eine *-Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^*$ die Null enthält und durch die *-Abbildung S in sich abgebildet wird, dann ist $M = \mathbb{N}^*$.
Es stellt sich allgemeiner heraus, dass die *-Mengen ganz analoge formale Eigenschaften wie die üblichen Mengen haben, d.h. die Axiome von ZFC erfüllen.

Es gibt derzeit im wesentlichen zwei Arten der Nichtstandardanalysis: die Robinson'sche, die Erweiterungen $\mathbb{R}^*$ betrachtet, die nichtarchimedisch angeordnet sind, und die Nelson'sche, die auf der Tatsache aufbaut, dass die *-Mengen alle Axiome der Mengenlehre erfüllen.

Edward Nelson (Internal Set Theory, a new approach to NSA, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 1165-1198) hat seine Version der Nonstandardanalysis axiomatisch eingeführt. Er geht von der axiomatischen Mengenlehre ZFC aus, führt einen neuen undefinierten Begriff „standard“ ein und fügt neue Axiome hinzu, die die Verwendung dieses Begriffes „standard“ regeln sollen. Eine Formel heiße „intern“, wenn sie eine Formel der klassischen Mathematik ist, d.h. den Begriff „standard“ nicht enthält, ansonsten „extern“. Das einfachste Beispiel einer externen Formel ist „n ist standard“, denn die Aussage „n ist standard“ hat in der klassischen Mathematik keinen Sinn. Ein anderes Beispiel ist „x ist infinitesimal“. Das soll bedeuten, dass eine Nichtstandardzahl $\nu \in \mathbb{N}$ existiert mit $|x| \le \frac{1}{\nu}$. Nur interne Formeln dürfen dazu verwendet werden, Teilmengen zu bilden. Es hat daher keinen Sinn, von der Menge aller Standardzahlen in $\mathbb{N}$ zu sprechen. Die Standardzahlen in $\mathbb{N}$ erfüllen: 0 ist standard; wenn $n \in \mathbb{N}$ standard ist, dann auch $n+1$. Es kann jedoch nicht bewiesen werden, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ standard ist.
Von einem „Metastandpunkt“ aus hat er dazu die Robinson'sche Theorie so adaptiert, dass die Tatsache, dass die *-Mengen alle Axiome der Mengenlehre erfüllen, besonders deutlich zum Ausdruck kommt. Er nennt die *-Mengen einfach Mengen (da er andere Mengen gar nicht betrachten will, kann das zu keinen Missverständnissen führen), schreibt statt $\mathbb{N}^*$ wieder $\mathbb{N}$, statt $\mathbb{Z}^*$ wieder $\mathbb{Z}$, statt $\mathbb{R}^*$ wieder $\mathbb{R}$, etc. Die Peano-Axiome oder die formale Charakterisierung der reellen Zahlen schauen dann genauso aus wie in der klassischen Mathematik. Der einzige Unterschied besteht in der inhaltlichen Interpretation der erzielten Resultate. Die Standardelemente einer Menge M entsprechen dabei den Elementen der Menge $M \subseteq M^*$ in der Robinson'schen Theorie. Die Tatsache, dass in der Robinson'schen Theorie die Menge $\mathbb{N}$ keine *-Teilmenge von $\mathbb{N}^*$ ist, bedeutet in der Nelson'schen Theorie, dass die Standardzahlen keine Menge bilden. Die Nichtstandardzahlen von $\mathbb{N}$ entsprechen den unendlich großen Elementen von $\mathbb{N}^*$. Da $\mathbb{R}$ in dieser Theorie alle Eigenschaften der klassischen reellen Zahlen hat, ist $\mathbb{R}$ insbesondere ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper. Es gibt daher keine unendlich großen Elemente x, also solche, die $x > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, wohl aber Elemente x mit $x > n$ für alle natürlichen Standardzahlen $n \in \mathbb{N}$.
Es ist hier nicht der Platz, um näher auf diese Theorie einzugehen. Man findet sie in der Arbeit von Nelson oder in didaktisch aufbereiteter Form im Buch „Nonstandard Analysis“ von Alain Robert.

Das Überraschende ist die Tatsache, dass durch die Hinzunahme des Begriffes „standard“ und der damit verbundenen Rechenregeln eine Theorie entsteht, in der alle klassischen Sätze der Analysis richtig bleiben, es darüber hinaus aber möglich wird, die heuristischen Überlegungen des 17. und 18. Jahrhunderts exakt zu machen. Die obige „Metaüberlegung“ zeigt, dass die vertrauten Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \cdots$ in dieser axiomatischen Theorie nicht mit den entsprechenden Mengen in der naiven Mengenlehre identifiziert werden dürfen.

Der Übergang von der Robinson’schen Theorie zur Nelson’schen Version ist also wieder ein Beispiel eines gewaltigen Sprungs. Wenn man diesen ignoriert und, um mit Wittgenstein zu sprechen, die Leiter wegwirft, nachdem man hinaufgestiegen ist, schaut diese Theorie wie eine Art Zaubertrick aus. Man hat das Gefühl, getäuscht zu werden. Meiner Meinung nach braucht man Überlegungen der Art, wie ich sie oben angestellt habe, um die Nelson’sche Theorie zu motivieren. (Ohne die Robinson’sche Theorie wäre die Nelson’sche Theorie wahrscheinlich nie gefunden worden). Ob das durch eine exakte Ableitung oder wie oben durch eine heuristische Beschreibung geschieht, tut wenig zur Sache.
Wenn man das nicht tut, braucht es viel Überredungskunst, um sie verständlich zu machen. So schreibt Nelson im ersten Kapitel eines noch unvollendeten Buches über die Nonstandardanalysis: “The reason for not defining “standard” is that it plays a syntactical, rather than a semantic, role in the theory. It is similar to the use of “fixed” in informal mathematical discourse. One does not define this notion, nor consider the set of all fixed natural numbers. The statement “there is a natural number bigger than any fixed natural number” does not appear paradoxical. The predicate “standard” will be used in much the same way, so that we shall assert “there is a natural number bigger than any standard natural number.” But the predicate “standard”—unlike “fixed”—will be part of the formal language of our theory, and this will allow us to take the further step of saying, “call such a natural number, one that is bigger than any standard natural number, unlimited.”
We shall introduce axioms for handling this new predicate “standard” in a consistent way. In doing so, we do not enlarge the world of mathematical objects in any way, we merely construct a richer language to discuss the same objects as before. In this way we construct a theory extending ordinary mathematics, called Internal Set Theory that axiomatizes a portion of Abraham Robinson’s nonstandard analysis. In this construction, nothing in ordinary mathematics is changed.“
Da diese axiomatische Theorie eine Erweiterung von ZFC ist, sind also die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ dieselben wie in der klassischen Mathematik, wenn man dort ebenfalls von der axiomatischen Mengenlehre ZFC ausgeht. (Würde man stattdessen den naiven Mengenbegriff zugrunde legen, könnte es nicht funktionieren, weil es in diesem keine Nichtstandardelemente gibt. Man braucht also gerade die Tatsache, dass der axiomatische Mengenbegriff inhaltlich nicht festlegbar ist). Nelson vergleicht das an anderer Stelle mit einem Farbfilm, den man bisher auf einem Schwarz-Weiß-Fernsehgerät betrachtet hatte. Schaut man diesen mit einem Farbfernsehgerät an, so sind die Bilder dieselben, aber man sieht nun Unterschiede, die man vorher nicht bemerkte.

Abschließend möchte ich auch noch das Zorn’sche Lemma erwähnen, das ebenfalls einen gewaltigen Sprung verdeckt. Man denke nur an die Diskussionen um den Zermelo’schen Beweis des Wohlordnungssatzes zu Beginn des 20. Jahrhunderts. In manchen einführenden Lehrbüchern wird diese Problematik vollständig verdrängt und dieses Lemma ohne nähere Erklärung verwendet, als ob es selbstverständlich wäre, oder es findet sich nur der Hinweis, dass es mit dem Auswahlaxiom äquivalent sei und daher selbst als Axiom angesehen werden könne, ohne dass dort auf diese Äquivalenz näher eingegangen wird. Das widerspricht meiner Meinung nach einem Grundprinzip der Mathematik, dass alle Resultate vollständig und überzeugend dargelegt werden sollen, und hat mich während meiner Studienzeit, als ich noch nicht die relevanten Hintergründe kannte, genau so gestört und irritiert wie Vorlesungen über abstrakte Theorien ohne Erwähnung typischer Beispiele.