Der Krümmungstensor und Riemannsche Normalkoordinaten

Franz Embacher

Der Krümmungsbegriff ist – wenn er exakt gefasst wird – ein schwieriger, und bereits die Definition des Krümmungstensors erfordert einigen formalen Aufwand. Für manche Zwecke (insbesondere, wenn Abweichungen von der flachen Geometrie in niedrigster Ordnung interessieren) lässt sich dieser Aufwand durch die Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems minimieren.

Folgender Sachverhalt kann bei konkreten Berechnungen hilfreich ausgenützt und sogar zur strengen Definition der Krümmung verwendet werden:

Sei P ein Punkt in einem Riemannschen oder Pseudo-Riemannschen Raum. Dann gibt es in einer Umgebung von P ein Koordinatensystem (x^μ), in dem P die Koordinatenwerte $x^\mu = 0$ hat, und in dem die Metrik die Form

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\rho\nu\sigma} x^\rho x^\sigma + O(x^3)$$

annimmt, wobei die Konstanten $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ die Komponenten $R_{\mu\rho\nu\sigma}(0)$ des **Riemannschen Krümmungstensors** im Punkt P darstellen. Sie erfüllen die Symmetrierelationen

$$\begin{aligned}
R_{\mu\rho\nu\sigma} &= -R_{\rho\mu\nu\sigma} \\
R_{\mu\rho\nu\sigma} &= -R_{\mu\rho\sigma\nu} \\
R_{\mu\rho\nu\sigma} &= R_{\nu\sigma\mu\rho} \\
R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\sigma\rho\nu} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Matrix $\eta_{\mu\nu}$ ist die Normalform der Metrik, die die Information über die Signatur enthält. Im Riemannschen Fall ist $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, für die Pseudo-Riemannsche Metrik der Raumzeit existieren zwei Konventionen: $\eta_{\mu\nu} = diag\,(1,-1,-1,-1)$ oder $\eta_{\mu\nu} = diag\,(-1,1,1,1)$. Ein Koordinatensystem mit diesen Eigenschaften heißt **Riemannsches Normalkoordinatensystem** (um den Punkt P).

Das Theorem lässt sich umkehren: Falls ein Koordinatensystem gefunden ist, in dem die Metrik die obige Form hat – insbesondere enthält sie keine Terme, die linear in den Koordinaten x^μ sind, d.h. die partiellen Abeitungen $\partial_\rho g_{\mu\nu}(0)$ verschwinden –, und falls die Koeffizienten $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ die obigen Symmetrierelationen erfüllen, dann stellen sie die Komponenten des Krümmungstensors im Punkt P dar. Dieser Sachverhalt kann durchaus als **Definition des Krümmungstensors** dienen.

Durch die Symmetrien des Krümmungstensors reduziert sich die Zahl seiner unabhängigen Komponenten in n Dimensionen auf $n^2(n^2-1)/12$. In zwei Dimensionen gibt es daher nur eine unabhängige Komponente, in drei Dimensionen gibt es 6 und in vier Dimensionen 20.

Für den durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius a definierten zweidimensionalen Riemannschen Raum ($\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ und $\mu = 1,2$) gilt $R_{1212} = a^{-2}$, was die gesamte Information über den Krümmungstensor beinhaltet.

Statt $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ werden oft die Komponenten $R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma} = \eta^{\mu\lambda} R_{\lambda\rho\nu\sigma}$ verwendet. (Sie sind von der verwendeten Konvention unabhängig, da sie unter der Umkehrung der Metrik-Signatur $\eta_{\mu\nu} \to -\eta_{\mu\nu}$ invariant bleiben, während die $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ ihr Vorzeichen ändern).

Die **Gleichung** für eine **Geodäte** $x^{\mu}(s)$ nahe P nimmt in Riemannschen Normalkoordinaten die Form

$$\ddot{x}^{\mu} - \frac{2}{3} R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\nu} x^{\sigma} + O(x^2) = 0$$

an. Als Folge ist

$$\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\rho\nu\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} + O(x^3) \right) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$$

konstant (üblicherweise 1 für Geodäten in einem Riemannschen Raum, ± 1 für zeit- und raumartige Geodäten in einem Pseudo-Riemannschen Raum und 0 für lichtartige Geodäten). Für nicht-lichtartige Geodäten und Normierung auf ± 1 hat der Parameter s die Bedeutung der Bogenlänge bzw. der Eigenzeit (Eigenlänge).

Die Lösung der Geodätengleichung mit $x^{\mu}(0) = q^{\mu}$ und $\dot{x}^{\mu}(0) = u^{\mu}$ ist, für kleine q und s, durch

$$x^{\mu}(s) = q^{\mu} + s u^{\mu} + \frac{1}{3} s^2 R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma} u^{\rho} u^{\nu} q^{\sigma} + O(s^2 q^2) + O(s^3 q) + O(s^4)$$

gegeben, woraus

$$\dot{x}^{\mu}(s) = u^{\mu} + \frac{2}{3} s R^{\mu}{}_{\rho\nu\sigma} u^{\rho} u^{\nu} q^{\sigma} + O(s q^2) + O(s^2 q) + O(s^3)$$

folgt. Die radialen (durch den Punkt P gehenden) Geodäten werden also durch

$$x^{\mu}(s) = s u^{\mu} + O(s^4)$$

dargestellt und sehen – vom Riemannschen Normalkoordinatensystem aus betrachtet – bis zur dritten Ordnung wie Geraden aus.
.

Weitere Informationen zur Krümmung:
http://www.mathematik.uni-ulm.de/phbf/phag/tensoren/tensoren.pdf

Aus dem Krümmungstensor abgeleitete Größen, wie sie in der Allgemeinen Relativitätstheorie verwendet werden:

Ricci-Tensor:

$$R_{\rho\sigma} = R^{\mu}{}_{\rho\mu\sigma}$$

Ricci-Skalar:

$$R = R^{\rho}{}_{\rho}$$

Einstein-Tensor:

$$G_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R$$

Die **Einsteinschen Feldgleichungen** der Allgemeinen Relativitätstheorie lauten (mit $G = c = 1$)

$$G_{\rho\sigma} = 8\pi\, T_{\rho\sigma},$$

wobei $T_{\rho\sigma}$ der Energie-Impuls-Tensor der Materie ist. Mit den hier verwendeten Konventionen lautet die Energiebedingung (unabhängig von der Signatur der Metrik)

$$\rho_{Materie} \equiv T_{00} \geq 0.$$