1 Schema der Quantenteleportation - Formulierung durch Zustandsvektoren

Das 3-Channel-Setting der Quantenteleportation besteht zunächst aus zwei Teilsystemen: dem zu teleportierenden Zustand

$$|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 \tag{1.1}$$

(mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$), über den Alice verfügt, und einem maximal verschränkten (EPR)-Zustand, dessen Teilchen zwischen Alice und Bob aufgeteilt werden, und der als

$$|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) \tag{1.2}$$

angenommen wird. Alice führt in den Channels 1 und 2 eine Bell-State-Messung (BSM) durch. Den Vektoren der Bell-State-Basis können entsprechend der möglichen Ausgänge der Messung folgende unitäre Transformationen zugeordnet werden (λ nummeriert die Basisvektoren und damit die möglichen Messwerte durch):

Basisvektor	λ	unitäre Transformation
$\lvert e^{(0)}\rangle_{12} = \lvert\psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle_1\lvert 1\rangle_2 - \lvert 1\rangle_1\lvert 0\rangle_2)$	0	$U^{(0)} = -\lvert 0\rangle\langle 0\rvert - \lvert 1\rangle\langle 1\rvert$
$\lvert e^{(1)}\rangle_{12} = \lvert\psi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle_1\lvert 1\rangle_2 + \lvert 1\rangle_1\lvert 0\rangle_2)$	1	$U^{(1)} = -\lvert 0\rangle\langle 0\rvert + \lvert 1\rangle\langle 1\rvert$
$\lvert e^{(2)}\rangle_{12} = \lvert\phi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle_1\lvert 0\rangle_2 - \lvert 1\rangle_1\lvert 1\rangle_2)$	2	$U^{(2)} = \lvert 1\rangle\langle 0\rvert + \lvert 0\rangle\langle 1\rvert$
$\lvert e^{(3)}\rangle_{12} = \lvert\phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle_1\lvert 0\rangle_2 + \lvert 1\rangle_1\lvert 1\rangle_2)$	3	$U^{(3)} = \lvert 1\rangle\langle 0\rvert - \lvert 0\rangle\langle 1\rvert$

Damit ist der gemeinsame Zustand (1.2) gerade durch $|e^{(0)}\rangle_{23}$ gegeben, und die Bell-State-Messung entspricht der Messung der Observablen

$$S_{12} = \sum_{\lambda=0}^{3} \lambda |e^{(\lambda)}\rangle_{12}\ {}_{12}\langle e^{(\lambda)}|. \tag{1.3}$$

Die zugeordneten unitären Transformation erfüllen $U^{(0)\dagger} = U^{(0)} = -\mathrm{id}$, $U^{(1)\dagger} = U^{(1)}$, $U^{(2)\dagger} = U^{(2)}$ und $U^{(3)\dagger} = -U^{(3)}$. Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich der Gesamtzustand des 3-Channel-Systems als

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1|\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{2} \Big(& \ |\psi^-\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \\ + & \ |\psi^+\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \\ + & \ |\phi^-\rangle_{12}(\ \ \alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \\ + & \ |\phi^+\rangle_{12}(\ \ \alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) \ \Big), \end{aligned} \tag{1.4}$$

welches mit

$$|\psi\rangle_{123} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{3} |e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3 \tag{1.5}$$

identisch ist. Falls Alice nun den Eigenwert λ misst, wird der Zustand des Gesamtsystems (gemäß dem "Projektionspostulat" der Quantentheorie) zu

$$|e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)\dagger} |\psi\rangle_3. \tag{1.6}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür ist, mit $P_{12}^{(\lambda)} = |e^{(\lambda)}\rangle_{12\ 12}\langle e^{(\lambda)}|$, durch

$$w^{(\lambda)} = {}_{123}\langle\psi|P_{12}^{(\lambda)}|\psi\rangle_{123} = \frac{1}{4} \tag{1.7}$$

gegeben, ist also für alle λ gleich. Nachdem Bob mittels klassischer Kommunikation den Wert von λ erfahren und die unitäre Transformation $U^{(\lambda)}$ angewendet hat, ist der Zustand (beachte $U_3^{(\lambda)} U_3^{(\lambda)\dagger} = \mathrm{id}_3$)

$$|e^{(\lambda)}\rangle_{12} |\psi\rangle_3, \tag{1.8}$$

also ein Produkt "gemessenes Basiselement $\otimes$ teleportierter Zustand", wobei letzterer ursprünglich im ersten Channel als $|\psi\rangle_1$ lebte, nun aber in Bobs Hilbertraum als $|\psi\rangle_3$ auftritt. Alice hat den (von ihr durch Messung bestimmten) Zustand $|e^{(\lambda)}\rangle_{12}$ in Händen, kann aus ihm aber keine Information über den teleportierten Zustand (d.h. über die Werte von α und β) extrahieren, während Bob ein System im gewünschten Zustand besitzt (ohne weitere Messung aber auch nichts über diesen weiss).

2 Prinzipielles zum Dichtematrixformalismus

In den meisten Darstellungen der Quantentheorie werden zunächst nur reine Zustände, d.h. Zustände, die durch Wellenfunktionen dargestellt werden, betrachtet. Von diesem Standpunkt aus können Dichtematrizen in verschiedenen Zusammenhängen auftreten.

Reiner Zustand: Die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch einen (normierten) Zustandsvektor $|\psi\rangle$ (Wellenfunktion) ist äquivalent zu einer Beschreibung durch die Dichtematrix $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Gemischter Zustand als Folge von Unkenntnis: Ist von einem Zustand bekannt, dass er als reiner Zustand präpariert wurde, nicht aber, in welchem, und ist nur bekannt, dass nur gewisse Zustandsvektoren $|\psi_j\rangle$ (jeweils mit Wahrscheinlichkeit p_j, wobei $\sum_j p_j = 1$) in Frage kommen, so muss das System als statistisches Ensemble mit Dichtematrix

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \tag{2.1}$$

beschrieben werden. Die Zustandsvektoren $|\psi_j\rangle$ müssen normiert sein, dürfen aber ansonsten beliebig sein. Insbesondere müssen sie nicht zueinander orthogonal sein.

Gemischter Zustand als Folge der Beschränkung auf ein Teilsystem: Ein System bestehe aus zwei Teilsystem (der entsprechende Hilbertraum ist dann $\mathcal{H} =$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$) und befinde sich in dem durch $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ beschriebenen Zustand. Falls nur Observable der Form $A = A_1 \otimes \mathrm{id}_2$ gemessen werden können (z.B. weil die durch $\mathcal{H}_2$ beschriebenen Freiheitsgrade in entfernten Raumgebieten angesiedelt sind), so wird das so reduzierte *effektive* System durch die Dichtematrix

$$\rho_{\mathrm{red}} = \mathrm{Tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|) \tag{2.2}$$

beschrieben, wobei Tr_2 die Spur über $\mathcal{H}_2$ bedeutet. Es existieren dann zahlreiche Darstellungen der Form (2.1).

Dichtematrizen spielen unter anderem überall dort eine Rolle, wo die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems zu groß ist, um in der Praxis gemessen werden zu können, z.B. in der Quantenstatistik (hier treten thermische Dichtematrizen der Form $\rho_T = Z^{-1}\mathrm{e}^{-H/T}$ auf, $H =$ Hamiltonoperator, $Z = \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-H/T}) =$ mikrokanonische Zustandssumme) und in den Bemühungen, die Erscheinungsformen der klassischen Welt mittels "Dekohärenz" (Messungen eines Systems durch seine Umgebung) zu begründen. Ein besonders schönes Beispiel für einen gemischen Zustand stellt der thermische Charakter der Hawkingstrahlung dar, bei der ein Teil der Freiheitsgrade "hinter dem Horizont" liegt und damit vom Standpunkt eines Beobachters im Aussenraum prinzipiell unzugänglich ist.

In manchen Zugängen – insbesondere in den eher axiomatisch orientierten (siehe z.B. Thirring-Lehrbuch) – wird der Zustandsbegriff von vornherein mit dem der Dichtematrix verknüpft. So kann ein *Zustand* ganz generell *als positives lineares Funktional* auf der Observablenalgebra $\mathcal{A}$ (mit der zusätzlichen Normierungsbedingung, dass $1 \in \mathcal{A}$ auf 1 abgebildet wird) definiert werden. $\mathcal{A}$ ist eine C*-Algebra, die als Menge der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ dargestellt werden kann, und in dieser Darstellung ist ein Zustand durch eine Abbildung $A \to \mathrm{Tr}(\rho A)$ gegeben, wobei ρ eine Dichtematrix ist.

Messung: Ein System sei durch die Dichtematrix ρ beschrieben. Sei A eine Observable und $P^{(\lambda)}$ der (orthogonale) Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert λ. *Nach* einer Messung von A, die das Ergebnis λ ergab, wird das System durch die Dichtematrix $cP^{(\lambda)}\rho P^{(\lambda)}$ beschrieben ("Projektionspostulat"), wobei c ein (positiver) Normierungsfaktor ist, der Spur 1 sicherstellt. (Ein reiner Zustand wäre nach einem solchen Messausgang durch $c'P^{(\lambda)}|\psi\rangle$ gegeben, wobei der Faktor c' die korrekte Normierung sicherstellt). Der Erwartungswert von A – wie er *vor* der Messung vorausgesagt wird, oder wie er nach einer grossen Zahl von Messungen an identischen Kopien des Systems als Mittelwert auftritt – ist $\mathrm{Tr}(\rho A)$ (als Verallgemeinerung des bekannten $\langle\psi|A|\psi\rangle$). Die Wahrscheinlichkeit, den zu $P^{(\lambda)}$ gehörenden Eigenwert λ zu messen, ist $\mathrm{Tr}(\rho P^{(\lambda)})$ (als Verallgemeinerung von $\langle\psi|P^{(\lambda)}|\psi\rangle$ für einen reinen Zustand).

Im Dichtematrixformalismus kann auch eine andere Situation beschrieben werden: Die Observable A sei gemessen worden, aber niemand hat das Resultat abgelesen! *Nach* der Messung kann das System – mangels des Wissens, *welches* λ nun gemessen wurde – durch die Dichtematrix $\sum_\lambda P^{(\lambda)}\rho P^{(\lambda)}$ beschrieben werden. In den "consistent histories"-Zugängen und in der Viele-Welten-Interpretation spielt diese Version des "Projektionspostulats" eine wichtige Rolle.

Unitäre Transformation: Eine unitäre Transformation U, die Zustandsvektoren gemäß $\psi \to U\psi$ verändert (also z.B. die Zeitentwicklung – $U = \mathrm{e}^{-itH}$, falls der Hamiltonoperator H zeitunabhängig ist – oder eine Manipulation am System ohne Messung – wie jene Bobs während der Quantenteleportation) wirkt auf Dichtematrizen gemäß $\rho \to U\rho U^\dagger$.

3 Quantenteleportation im Dichtematrixformalismus

Berechnung partieller Spuren

Der totale Hilbertraum im Setting für Quantenteleportation ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. Die Spur über $\mathcal{H}_1$ wird mittels

$$\mathrm{Tr}_1(\ldots) = {}_1\langle 0|\ldots|0\rangle_1 + {}_1\langle 1|\ldots|1\rangle_1 \equiv \sum_{j=0}^{1} {}_1\langle j|\ldots|j\rangle_1 \tag{3.1}$$

berechnet, und analoge Formeln gelten für Tr_2 und Tr_3. Die Spur über $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ kann entweder in der Standardbasis $\{|j\rangle_1|k\rangle_2 : j,k = 0,1\}$ oder in der Bell-State-Basis $\{|e^{(\lambda)}\rangle_{12} : \lambda = 0,\ldots 3\}$, die ja auch eine ON-Basis ist, berechnet werden:

$$\mathrm{Tr}_{12}(\ldots) = \sum_{j,k=0}^{1} {}_1\langle j|_2\langle k|\ldots|j\rangle_1|k\rangle_2 = \sum_{\lambda=0}^{3} {}_{12}\langle e^{(\lambda)}|\ldots|e^{(\lambda)}\rangle_{12}. \tag{3.2}$$

Der Anfangszustand

Für den gemeinsamen Zustand (1.2) drücken die (äquivalenten) Beziehungen

$$\mathrm{Tr}_3(|\psi^-\rangle_{23}\,{}_{23}\langle\psi^-|) = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_2, \qquad \mathrm{Tr}_2(|\psi^-\rangle_{23}\,{}_{23}\langle\psi^-|) = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_3 \tag{3.3}$$

die *maximale Verschränkung* aus. (Identische Relationen gelten auch für die anderen Bell-State-Basiselemente). Mit $|\psi\rangle_{123}$ von (1.4) und

$$\rho = |\psi\rangle_{123}\,{}_{123}\langle\psi| \tag{3.4}$$

ist (vor Alices Messung)

$$\rho_{\mathrm{Alice}} \equiv \mathrm{Tr}_3(\rho) = \frac{1}{2}\,|\psi\rangle_1\,{}_1\langle\psi|\ \ \mathrm{id}_2 \tag{3.5}$$

bzw. unter Verwendung der Form (1.5)

$$\rho_{\text{Alice}} = \sum_{\lambda,\lambda'=0}^{3} |e^{(\lambda)}\rangle_{12}\, \rho^{(\lambda,\lambda')}\, {}_{12}\langle e^{(\lambda')}| \tag{3.6}$$

mit

$$\rho^{(\lambda,\lambda')} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}_3(U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3\, {}_3\langle\psi|U_3^{(\lambda')}) = \frac{1}{4}\, {}_3\langle\psi|U_3^{(\lambda')}U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3. \tag{3.7}$$

Die Wahrscheinlichkeit für Alice, bei der Messung der Observablen (1.3) den Eigenwert λ zu erhalten, ist durch $\mathrm{Tr}(\rho P_{12}^{(\lambda)})$ gegeben, was sich auf das Diagonalelement $\rho^{(\lambda,\lambda)} = \frac{1}{4}$ reduziert. Bobs Zustand (ebenfalls vor Alices Messung) ist, mit (1.4) und (3.3),

$$\rho_{\text{Bob}} \equiv \mathrm{Tr}_{12}(\rho) = \frac{1}{2}\ \mathrm{id}_3. \tag{3.8}$$

Unter Verwendung der Form (1.5) ergibt sich, dass dies mit

$$\rho_{\text{Bob}} = \frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{3} U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3\, {}_3\langle\psi|U_3^{(\lambda)} \tag{3.9}$$

identisch ist. Damit ist gezeigt, dass

$$\sum_{\lambda=0}^{3} U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3\, {}_3\langle\psi|U_3^{(\lambda)} = 2\ \mathrm{id}_3 \tag{3.10}$$

für *alle* normierten $|\psi\rangle$. Obwohl es so aussieht, als enthielte (3.9) Information über $|\psi\rangle_3$, ist das nicht der Fall! Das bedeutet, dass Bob – bereits *bevor* Alice ihre Messung durchgeführt hat – spekulieren könnte: "Ich besitze *einen* der vier (reinen) Zustände $U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3$". Diese Aussage wäre im Sinne der Gleichheit von (3.8) und (3.9) "richtig", führt also – beim gegebenen Wissensstand — für alle erdenklichen Messungen zu denselben Voraussagen wie der Standpunkt "Ich weiss gar nichts, denn meine Dichtematrix ist $\frac{1}{2}$ mal dem Einheitsoperator".

Weitere Fragen...

Interessant wäre nun die Diskussion verschiedener Fragen und Szenaren im Dichtematrixformalismus. Insbesondere könnte berechnet bzw. geklärt werden:

Zustand des Gesamtsystems nach Alices Messung

Zustand des Gesamtsystems nach Alices Messung, wenn der Wert des Messergebnisses λ geheimgehalten wird (oder vergessen wurde)

Zustand von Alices Teilsystem nach ihrer Messung, wenn sie λ vergessen hat

Zustand von Alices Teilsystem nach ihrer Messung, wenn sie den Wert von λ weiss

Zustand von Bobs Teilsystem nach der Messung, wenn ihm λ nicht verraten wurde – dieser wurde de facto bereits oben berechnet und ist durch (3.9) und daher durch (3.8) gegeben

Zustand von Bobs Teilsystem nach Mitteilung von λ *vor* Anwendung von $U^{(\lambda)}$

Zustand von Bobs Teilsystem nach Mitteilung von λ *nach* Anwendung von $U^{(\lambda)}$

Ändert sich Bobs Zustand zum Zeitpunkt von Alices Messung?

Wie ist es möglich, dass die kontinuierliche "Information" über α und β lediglich durch klassische Übermittlung der in λ steckenden diskreten Information (0, 1, 2 oder 3) "übertragen" wird? Wieviel an "Information" wird eigentlich wirklich übertragen? Was bedeutet "Information" in diesem Zusammenhang überhaupt?

Wenn Bob den Wert von λ nicht erfährt – was nützt ihm seine Spekulation "Ich besitze *einen* der vier (reinen) Zustände $U_3^{(\lambda)\dagger}|\psi\rangle_3$"? Was nützt sie ihm, wenn sich alle Beteiligten vorher einen Zustand $|\psi\rangle$ (zum Beispiel $|0\rangle$) ausgemacht haben? Wenn er jedesmal stur $U^{(0)}$ anwendet, besitzt er in einem Viertel aller Fälle den richtig teleportierten Zustand. Welche Zustände besitzt er in den anderen drei Vierteln aller Fälle?

Kann man – bei präpariertem, d.h. von vornherein bekanntem $|\psi\rangle$ – im Anschluss an die Teleportation Korrelationsexperimente durchführen, um die erfolgreiche Übertragung zu demonstrieren, und was besagen solche Experimente über das Ausmaß an übertragener Information?

Vielleicht kann man die klassische EPR-Situation ebenfalls in diesem Formalismus diskutieren.

Welche Paradoxien bleiben im Dichtematrixformalismus nach wie vor erhalten, welche lösen sich in Luft auf?

Philosophische Frage: Vor Alices Messung ist Bobs Zustand ein genuin *gemischter*. Niemand kann Spezifischeres voraussagen als durch (3.8) gegeben. Sobald Alice ihre Messung durchgeführt hat, ist sein Zustand "in Wirklichkeit" **rein** (obwohl er – solange er λ nicht erfährt – nicht weiss, um *welchen* reinen Zustand es sich handelt. Er kann es auch nicht herausfinden, außer durch Kenntnisnahme von λ. Seine Beschränkung auf eine Beschreibung durch eine Dichtematrix entsteht also bloß aus Unkenntnis – die, bevor ihn ein Lichtsignal von Alice erreichen kann, allerdings erzwungen ist). Das bedeutet: Auch wenn wir sagen, dass der Bobs Zustand zuerst "in Wirklichkeit gemischt" und dann "in Wirklichkeit rein" ist, passiert durch diesen "Übergang" nichts für Bob physikalisch Messbares! Es kann z.B. nicht unterscheiden, ob Alice verschlafen und die Messung gar nicht durchgeführt hat! Welchen philosophischen Status haben dann aber Dichtematrizen als "Zustände"? Wieweit kann man die zwei Positionen "ein Zustand ist etwas Objektives" und "ein Zustand drückt meine Kenntnis aus" voneinander unterscheiden? Ist es die Beschränkung auf Teilsysteme, die diese philosophisch unbefriedigenden Dinge verursacht? (Meine Meinung: es ist die Trenung von System und Beobachter, d.h. das Projektionspostulat).

Spätestens wenn Bob ein Lichtsignal von Alice empfangen kann, wäre es keine Kausalitätsverletzung mehr, wenn es einen *physikalischen Prozess* "gemischter Zustand $\rightarrow$ reiner Zustand" gäbe. Das ist offensichtlich (in der üblichen nichtrelativistischen Quantenmechanik) aber nicht der Fall. Ändert sich die Sache in der Quantenfeldtheorie? Gibt es eine relativistische Formulierung des "Projektionspostulats"?

Hilft die Viele-Welten-Interpretation?

Noch besser: Inwieweit kann das Projektionspostulat *hergeleitet* werden, ist also ein Spezialfall der unitären Zeitentwicklung, obwohl's von Teilsystemen aus nicht so aussieht? (Das wäre der Standpunkt der Dekohärenzler).