

Teleportation

Ausgewählte Probleme der Quantentheorie

Ing. Gerd Ch. Krizek

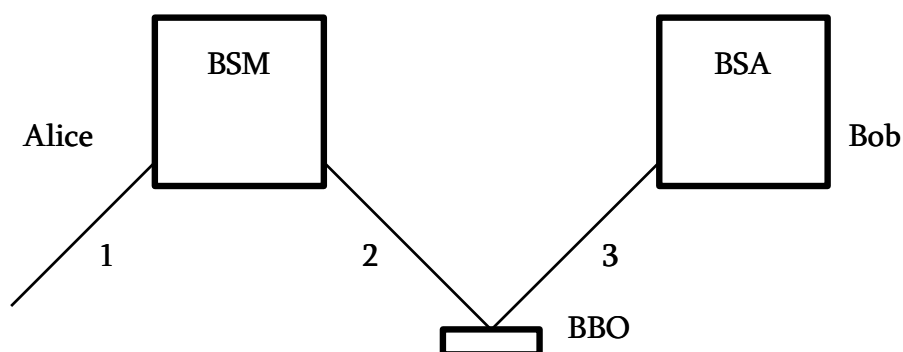
26. April 2004

Abstract:

Die Teleportation ist das Vorzeige-Experiment der Quantenoptik. In dieser Arbeit soll die theoretische Beschreibung betrachtet werden und das Experiment nachgerechnet werden. Dabei sieht man, dass eigentlich nur die Zustände von Photonen teleportiert werden. Überdies muß man von den zu teleportierenden Teilchen nichts wissen um ihren Zustand zu teleportieren. Es wird weiters gezeigt, dass die Teleportation nicht in Konflikt mit der Einsteinschen Lokalität steht und auch nicht dem No-cloning theorem widerspricht.

I. Theorie

Wir wollen einen Zustand von Alice zu Bob übertragen, indem wir die Verschränkung von zwei Teilchen ausnutzen. Wie sich zeigt, muß man nicht einmal etwas über den Zustand wissen, den man überträgt.



Der Zustand $\psi_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ist vollkommen unbestimmt. Der Zustand der Teilchen 2 und 3 ist ein EPR-Zustand.

Die Teilchen 2 und 3 sind verschränkt und haben daher einen gemeinsamen Zustand:

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3)$$

Die Indizierung bei den Zuständen ordnet die Zustände dem jeweiligen Teilchen zu. Wie wir wissen ist es eine fundamentale Eigenschaft der Verschränkung, dass die Messresultate an den zwei Teilchen zueinander EPR-korreliert sind, und es absolut zufällig ist welcher Einzelmesswert gemessen wird.

Das sieht man, da für die Wahrscheinlichkeit σ_z zu messen gilt:

$$w_1 = |\langle 0|_2|\psi_{23}\rangle|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|_2|0\rangle_3 - \langle 0|_2|1\rangle_3) \right\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_3 \right\|^2 = \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle_3 = \frac{1}{2}$$

$$w_{-1} = |\langle 1|_2|\psi_{23}\rangle|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|_2|0\rangle_3 - \langle 1|_2|1\rangle_3) \right\|^2 = \left\| \frac{-1}{\sqrt{2}}|0\rangle_3 \right\|^2 = \frac{1}{2}\langle 0|0\rangle_3 = \frac{1}{2}$$

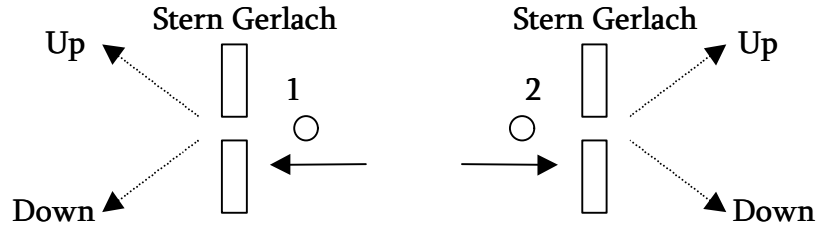
wobei ja für die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_z gilt:

Eigenvektor	Eigenwert
$ 0\rangle$	1
$ 1\rangle$	-1

Es ist somit gleich wahrscheinlich für das Teilchen 2 Spin oben oder Spin unten zu messen, und wie man sieht ist Teilchen 3 immer in einem zu Teilchen 2 EPR-korrelierten Zustand.

Teilchen 1 und 2 werden nun zu einer Bell State Messung herangezogen. Teilchen 2 ist aber immer noch in dem verschränkten Zustand mit Teilchen 3. Die Bell State Messung ist von entscheidender Bedeutung für die Teleportation.

Die Bell State Messung soll die Teilchen 1 und 2 auf einen von vier möglichen maximal verschränkten Zuständen projizieren. Diesen Prozess kann man mit der Messung von einem Zweiteilchensystem mit zwei Stern-Gerlach Magneten vergleichen.



Die Teilchen 1 und 2 sind hier nicht verschränkt, und für jedes Teilchen ist die Messung von Spin-up oder down möglich. Daher sind die vier möglichen Zustände des Zweiteilchensystems nach der Messung:

$$|0\rangle_1|0\rangle_2 \quad |0\rangle_1|1\rangle_2 \quad |1\rangle_1|0\rangle_2 \quad |1\rangle_1|1\rangle_2$$

Für die Bell State Messung ist es ähnlich, nur wollen wir als vier mögliche Zustände des Systems vier maximal verschränkte Zustände zwischen den Teilchen 1 und 2, die sogenannte Bell-Basis:

$$\begin{aligned} |e^{(0)}\rangle_{12} &= |\psi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2) \quad \lambda = 0 \\ |e^{(1)}\rangle_{12} &= |\psi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2) \quad \lambda = 1 \\ |e^{(2)}\rangle_{12} &= |\phi^-\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2) \quad \lambda = 2 \\ |e^{(3)}\rangle_{12} &= |\phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \quad \lambda = 3 \end{aligned}$$

Wir ordnen der Bell Basis eine Observable zu, die zwischen den vier Möglichkeiten unterscheidet. Weiters ordnen wir je eine unitäre Transformation zu.

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= -|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\ U^{(1)} &= -|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\ U^{(2)} &= |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \\ U^{(3)} &= |1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

Die Bell State Messung ist eine Messung der Observablen

$$S_{12} = \sum_{\lambda=0}^3 \lambda |e^{(\lambda)}\rangle_{1212} \langle e^{(\lambda)}|$$

Der Zustand in dem sich das System vor der Messung befindet ist:

$$|\psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1 |\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^3 |e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_3$$

Dies sieht man nicht auf den ersten Blick. Der einfachste Weg dies zu zeigen ist der verkehrte Beweis:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^3 |e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_3 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |\psi^-\rangle_{12} (-|0\rangle_3 \langle 0|_3 - |1\rangle_3 \langle 1|_3) + \\ |\psi^+\rangle_{12} (-|0\rangle_3 \langle 0|_3 + |1\rangle_3 \langle 1|_3) + \\ |\phi^-\rangle_{12} (|1\rangle_3 \langle 0|_3 + |0\rangle_3 \langle 1|_3) + \\ |\phi^+\rangle_{12} (|1\rangle_3 \langle 0|_3 - |0\rangle_3 \langle 1|_3) \end{bmatrix} (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\alpha|\psi^-\rangle_{12}|0\rangle_3 - \beta|\psi^-\rangle_{12}|1\rangle_3 + \\ -\alpha|\psi^+\rangle_{12}|0\rangle_3 + \beta|\psi^+\rangle_{12}|1\rangle_3 + \\ \alpha|\phi^-\rangle_{12}|1\rangle_3 + \beta|\phi^-\rangle_{12}|0\rangle_3 + \\ \alpha|\phi^+\rangle_{12}|1\rangle_3 - \beta|\phi^+\rangle_{12}|0\rangle_3 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Daraus heben wir die Bellbasis heraus und schreiben:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} |\psi^-\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + \\ |\psi^+\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + \\ |\phi^-\rangle_{12} (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + \\ |\phi^+\rangle_{12} (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \end{bmatrix} =$$

Nun multipliziert man diese Ausdrücke aus und erhält:

$$\frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 \\ & + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 \\ & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 \\ & + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 \\ & + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ & - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \\ & + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ & - \frac{\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \end{aligned} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & -\frac{2\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + \frac{2\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 \\ & + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 - \frac{2\beta}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 \end{aligned} \right) =$$

Nun hebt man den Zustand $\psi_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ heraus und erhält:

$$(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1)(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) =$$

$$|\psi\rangle_1 |\psi^-\rangle_{23}$$

Wir haben jetzt also gezeigt, dass sich der Zustand des Systems tatsächlich so ausdrücken lässt.

$$|\psi\rangle_{123} = |\psi\rangle_1 |\psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^3 |e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_3$$

Wenn die Bell State Messung durchgeführt wird befindet sich das System in einem der Eigenzustände $|e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_3$.

Welche Zustände haben Alice und Bob zur Verfügung?

Der Gesamtzustand des Systems beträgt:

$$|e^{(\lambda)}\rangle_{12} U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_3$$

Alice hat nur den maximal verschränkten Zustand der Bellbasis und damit keine Information mehr über den ursprünglichen Zustand ψ_1 . Bob verfügt über den Zustand $U_3^{(\lambda)+}|\psi\rangle_3$ und muß nun die unitäre Transformation $U_3^{(\lambda)}$ ausführen und erhält damit den Zustand:

$$|\psi\rangle_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$$

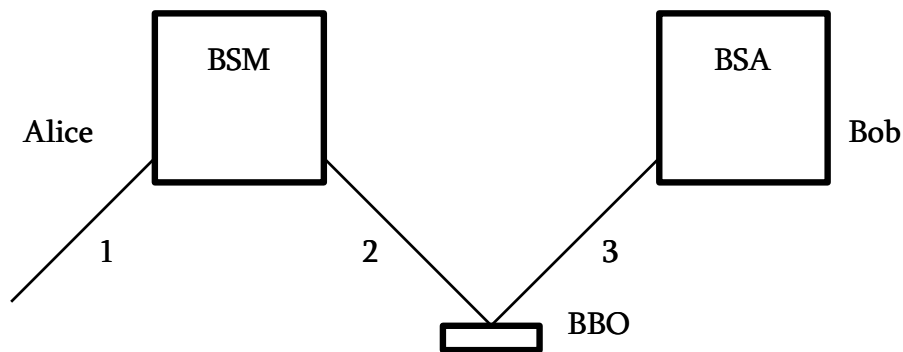
Damit wurde der Zustand von Alice zu Bob „teleportiert“. Von Bedeutung ist das kein Teilchen teleportiert wurde sondern nur ein Zustand übertragen wurde.

Da der telepotierte Zustand bei Alice nicht mehr vorhanden ist, ist diese Zustandsteleportation kein Widerspruch zum No-Cloning theorem.

Es besteht auch kein Widerspruch zur Einsteinschen Lokalität, da erst durch Übertragung des Ergebnisses der Bell State Messung Bob die richtige unitäre Transformation auswählen kann, um den Zustand richtig wiederherzustellen.

II. Informationsgehalt der Teleportation

Von großer Bedeutung für die Teleportation ist die Frage nach der übertragenen Information.



Teleportiert man den Zustand $\psi_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ von Alice zu Bob so könnte man argumentieren, dass eine sehr große Menge an Information übertragen wurde, da ja die Koeffizienten in Bits ausgedrückt beliebig lang sein können.

Bsp.: Wäre der Koeffizient α die Zahl 0,362511, so ist eine bestimmte Menge an Bits notwendig um die Zahl darzustellen.

Man könnte nun argumentieren, dass diese Menge an Information von Alice zu Bob übertragen wurde. Man könnte noch weiter gehen und sagen, daß die Menge an Information die mit α übertragen wurde, ohne Grenze ist, da ja unabhängig wieviele Bits zur Kodierung benötigt werden, α bei Bob vollständig ankommt.

Diese Überlegung vermittelt allerdings ein falsches Bild. Während der Teleportation wird nämlich gar keine Information übertragen. Dies sieht man wenn man nicht nach Koeffizienten in Zuständen an einem oder an einem anderen Ort fragt, sondern nach den Meßgrößen.

Überträgt man den Zustand $\psi_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$ und führt Bob die richtige unitäre Transformation durch, so muß Bob eine Messung an dem Zustand $\psi_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$ durchführen.

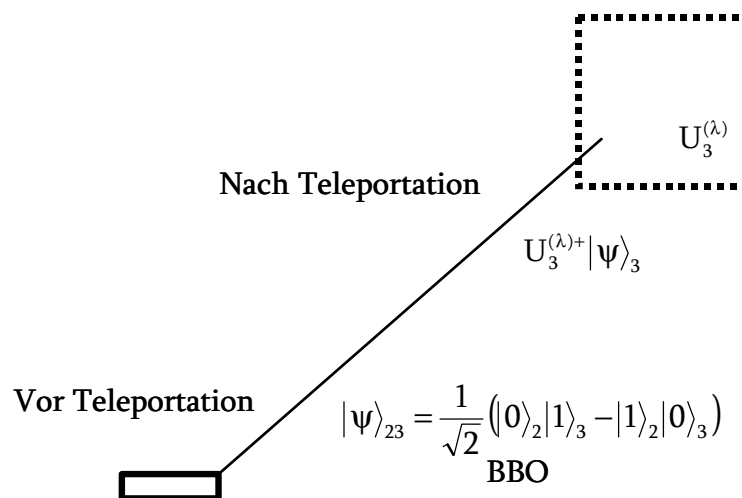
Bei dieser Messung kann Bob entweder den Zustand $|0\rangle_3$ oder $|1\rangle_3$ messen. Den einzigen Schluß den dies erlaubt ist, dass der gemessene Zustand häufiger vorkommen könnte, als der nicht gemessene und daher der zu dem gemessenen Zustand gehörige Koeffizient größer als der andere sein könnte.

Mit steigender Zahl der Messungen lassen sich natürlich immer mehr Aussagen über die Koeffizienten treffen, man kann also die Informationsübertragung folgendermaßen darstellen:

Zahl der Messungen	Schluß	Übertragene Information
1	$\alpha > \beta$ oder $\alpha < \beta$	2 bit $\triangleq \lambda$
...	...	...
N	Wahrscheinlichkeits Aussage über α u. β	2N bit

Hiermit können wir verstehen, dass zwar der Zustand $\psi_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$ perfekt zu Bob übertragen wurde, aber die Messung von quantenmechanischen Größen verhindert, dass wir Information daraus gewinnen können.

Man kann mit Hilfe des Dichtematrixformalismus zeigen, dass sich durch die Teleportation im Prinzip noch nichts am Zustand ändert.



Man kann nun die Dichtematrix für den Zustand vor und nach Teleportation bilden und erhält:

$$\rho_{\text{effvor}} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=0}^3 U_3^{(\lambda)+} |\psi\rangle_{33} \langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\text{effnach}} = \text{Tr}(|\psi^-\rangle_{23} \langle\psi^-|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Dichtematrix vor und nach der Teleportation ist also identisch, daher hat sich an dem Zustand auch nichts geändert.

Erst die unitäre Transformation ändert den Zustand und bewirkt eine Informationszunahme.

Zusammenfassung:

- Durch den Teleportationsvorgang, also die EPR Korrelation wird keine Information übertragen.
- Die quantenmechanische Messung bewahrt die Einsteinsche Lokalität, indem die zugängliche Information auf klassisch übertragene Information reduziert wird.

III. Anschauliche Darstellung

Uns allen bekannte Physiker stellen die Teleportation anschaulich dar.



Alice und Bob wollen einen unbekannten Zustand (Katharina Durstberger) von Alice zu Bob schicken. Dazu benötigen Sie ein EPR Paar, also ein verschränktes Teilchenpaar (Markus und Harald, oder Harald und Markus, wer weiß das schon genau).



Nun wird der Zustand mit dem einen Teil des EPR Paares verknüpft, und eine Bell State Messung durchgeführt. Dadurch wird aber auch der andere Teil des EPR Paares verändert und Bob benötigt den Messwert den Alice während der Bell State Messung erhalten hat.



Mit diesem Messwert kann Bob nun eine Transformation durchführen, die den Zustand des EPR Paares in den richtigen unbekannten Zustand überführt.





Nun hat Bob den Zustand richtig wiederhergestellt. Von Bedeutung ist aber, dass Bob den Zustand nicht kennt, da nie der Zustand gemessen wurde.

III. Literatur:

- [1] „Experimental Quantum Teleportation“
D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger
in Nature Vol.390 pages 575-579 ; 11. Dezember 1997
- [2] „Mathematische Grundlagen der Quantentheorie“
Franz Embacher
- [3] „Quantum Teleportation Protocol“
D. Bouwmeester, H. Weinfurter, A. Zeilinger
In „The physics of quantum information“, Springer 2000