1 Vorbemerkungen

Das einfachste quantenmechanische Modell, das "Qubit", ist durch einen zweidimensionalen Hilbertraum ($\cong \mathbf{C}^2$) charakterisiert (sieht man vom trivialen eindimensionalen Fall ab). Interessanterweise können zwei physikalisch sehr verschiedene Systeme durch ein solches Modell beschrieben werden:

- der Spinfreiheitsgrad des (nichtrelativistisch behandelten) Elektrons (bzw. jedes massiven Spin-1/2-Teilchens) und
- der Polarisationsfreiheitsgrad des Photons (bzw. jedes masselosen Spin-1-Teilchens).

In beiden Modellen wird von der Ortsabhängigkeit der Zustandsvektoren abgesehen. In quantenmechanischen Systemen dieses Typs wird der Raum der Zustandsvektoren durch zwei Elemente, die abstrakt als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bezeichnet werden können, aufgespannt. Viele elementare Eigenschaften der Quantentheorie und Themen der Quantenoptik lassen sich anhand dieses Settings bequem diskutieren, vom Begriff der Verschränkung und dem EPR-Paradoxon über die Quantenteleportation bis zum Quantencomputer. Was aber *bedeuten* $|0\rangle$ und $|1\rangle$ physikalisch, welche Observablen (Messgrößen) stehen zur Verfügung, und welchen Größen entsprechen die in zweidimensionalen Modellen immer auftretenden Pauli-Matrizen? Die Antworten auf diese Fragen hängen davon ab, welche der beiden Interpretationen (kurz: Elektron oder Photon) zu Grunde gelegt wird. Im Folgenden werden die physikalischen Unterschiede dieser beiden Modelle skizziert.

Verdeutlichen wir uns, dass eine konkrete Quantentheorie mehr ist als ihre mathematische Struktur: Um ein konsistentes quantentheoretisches Modell zu definieren, muss

1. der Raum aller Zustandsvektoren (Hilbertraum) festgelegt werden,
2. von einer ausreichenden Zahl von Operatoren gesagt werden, welche Observablen sie darstellen, d.h. wie sie *gemessen* werden können (dazu gehört die Angabe des Hamiltonoperators, der die zeitliche Dynamik des Systems erzeugt), und
3. überprüft werden, ob sich das so formulierte System unter dem Wechsel des (räumlichen oder raumzeitlichen) Bezugssystems in einer den Invarianzforderungen der modernen Physik entsprechenden Weise verhält. (Meistens genügt es dabei, sich auf infinitesimale Transformationen zu beschränken).

Der erste Punkt ist bei den hier betrachteten Modellen bereits als erledigt zu betrachten, da jeder zweidimensionale Hilbertraum zu $\mathbf{C}^2$ isomorph ist. Der zweite Punkt definiert den eigentlichen Unterschied zwischen dem Elektron- und dem Photonsystem (wobei wir die Dynamik, also den Hamiltonoperator, hier außer Acht lassen wollen). Um den letzten Punkt – der mit dem Spin zusammenhängt – anhand der beiden Modelle diskutieren zu können, sind ein paar mathematische Voraussetzungen nötig.

Räumliche Drehungen

Eine räumliche Drehung

$$\vec{x}' = R\vec{x} \tag{1.1}$$

wird durch eine orthogonale 3×3-Matrix ($R^T R = \mathbf{1}$) beschrieben[1]. Eine infinitesimale Drehung ist durch $R = \mathbf{1} + \epsilon$ gegeben, wobei ϵ eine "infinitesimal kleine" antisymmetrische Matrix ist: $\epsilon^T = -\epsilon$ (in Komponenten: $\epsilon_{jk} = -\epsilon_{kj}$). ϵ kann durch einen Vektor $\vec{\chi}$ beschrieben werden, dessen Richtung die Drehachse und dessen Betrag den Drehwinkel angibt:

$$\epsilon_{jk} = -\varepsilon_{jkl}\,\chi_l, \qquad \text{wobei} \quad \chi_j = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{jkl}\,\epsilon_{kl}. \tag{1.2}$$

Die infinitesimale Drehung (Variation) eines Vektors wird dann entweder in der Form (1.1) mit

$$R_{jk} = \delta_{jk} - \varepsilon_{jkl}\,\chi_l \tag{1.3}$$

oder in der Form

$$\delta\vec{x} = \vec{\chi} \wedge \vec{x} \tag{1.4}$$

angeschrieben. Ganz allgemein sagt man von einer Größe $\vec{v}$, die sich unter der infinitesimalen Drehung (1.3) gemäß $\delta\vec{v} = \vec{\chi} \wedge \vec{v}$ ändert, dass sie "wie ein Vektor transformiert". Die durch ein endliches $\vec{\kappa}$ definierte Drehung ist

$$R = e^{T(\vec{\chi})}, \tag{1.5}$$

[1] Eine reine Drehung – d.h. ohne Spiegelungsanteil – erfüllt zusätzlich $\det R = 1$.

wobei $T(\vec{\chi})$ der durch $T(\vec{\chi})\,\vec{x} = \vec{\chi}\wedge\vec{x}$ definierte lineare Operator ist. Mit $T(\vec{\chi}) = \vec{\chi}\vec{T}$ ist daher $R = \exp(\vec{\chi}\vec{T})$, wobei die Operatoren $\vec{T}$ die Drehungen um die Koordinatenachsen erzeugen[2].

Unitäre Transformationen

Zwei quantentheoretische Modelle am selben Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind äquivalent, wenn sie durch eine unitäre Transformation

$$|\psi'\rangle \;=\; U|\psi\rangle \tag{1.6}$$

auseinander hervorgehen. Eine infinitesimale unitäre Transformation ist durch $U = \mathbf{1} + iG$ gegeben, wobei G ein "infinitesimal kleiner" hermitischer Operator ist: $G^\dagger = G$. Im Fall $\mathcal{H} \;=\; \mathbf{C}^2$ werden die linearen Operatoren durch 2×2-Matrizen dargestellt. Jede hermitische 2×2-Matrix ist von der Form $G = k\,\mathbf{1} + \vec{\kappa}\vec{\sigma}$ mit reellem k und $\vec{\kappa}$, wobei $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ für die Pauli-Matrizen[3] steht. Für letztere gilt

$$\begin{aligned}
{\sigma_j}^\dagger &= \sigma_j && (1.7)\\
\sigma_j\sigma_k &= \delta_{jk}\,\mathbf{1} + i\,\varepsilon_{jkl}\sigma_l && (1.8)\\
[\sigma_j, \sigma_k] &= 2\,i\,\varepsilon_{jkl}\sigma_l && (1.9)\\
\mathrm{Tr}(\sigma_j) &= 0. && (1.10)
\end{aligned}$$

In Rechnungen ist es oft nützlich, die Identität

$$U^\dagger\sigma_j U - \sigma_j \;=\; -i[G, \sigma_j] \;=\; -2\,\varepsilon_{jkl}\kappa_k\sigma_l \tag{1.11}$$

zu kennen. Da der k-Anteil von G hier nicht aufscheint, ist er meistens irrelevant, und es wird $k = 0$ gesetzt. Damit wird die infinitesimale Version von (1.6) zu

$$\delta|\psi\rangle \;=\; i\,\vec{\kappa}\vec{\sigma}|\psi\rangle, \tag{1.12}$$

---

[2]Die Erzeugende der Drehung im quantentheoretischen Sinn ist durch $\tau(\chi) = i\hbar T(\vec{\chi})$ definiert, womit sich $R = \exp(-i\tau(\vec{\chi})/\hbar)$ ergibt. Weiters ist $[\tau(\vec{\chi}), \tau(\vec{\xi})] = i\hbar\,\tau(\vec{\chi}\wedge\vec{\xi})$. Mit $\tau(\vec{\chi}) = \vec{\chi}\vec{\tau}$ folgt $[\tau_j, \tau_k] = i\hbar\,\varepsilon_{jkl}\tau_l$, was genau die Vertauschungsrelationen für einen Drehimpuls sind.

[3]Die Operatoren σ_j müssen (1.7) und (1.8) erfüllen. Daraus ergeben sich (1.9) und (1.10) sowie die Tatsache, dass ihre Eigenwerte ± 1 sind. Die übliche Darstellung

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist nur *eine* mögliche Realisierung. Eine andere Realisierung kann etwa durch zyklische Permutation gewonnen werden.

während die allgemeine endliche unitäre Transformation (bis auf einen Phasenfaktor, der meist irrelevant ist und weggelassen wird) durch

$$U = e^{i\vec{\kappa}\vec{\sigma}} \tag{1.13}$$

gegeben ist.

2 Elektron

Hilbertraum, Operatoren, Observable

Das Elektron-Positron-System wird in der relativistischen Quantenmechanik durch eine vierkomponentige Wellenfunktion beschrieben. In der nichtrelativistischen Näherung entkoppeln diese vier Freiheitsgrade in zwei, die das Elektron und zwei, die das Positron beschreiben. Wird für das erstere die $\vec{x}$-Abhängigkeit ignoriert, so ensteht eine zweidimensionale Quantentheorie, die den "Spinfreiheitsgrad" des Elektrons beschreibt. Die Elemente von $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$ (Zustandsvektoren) werden als

$$|\psi\rangle \equiv \psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

geschrieben und gemäß

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv \psi^\dagger\psi \equiv a^*a + b^*b = 1 \tag{2.2}$$

normiert. Die physikalische Bedeutung der beiden Komponenten wird vermittelt durch den Vektor-Operator

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}. \tag{2.3}$$

Wir werden später sehen, dass er mit dem Spin übereinstimmt. Seine Projektion in eine beliebige Richtung $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$, $|\vec{u}| = 1$, ist definiert als

$$\mathcal{S}(\vec{u}) = \vec{u}\,\vec{\mathcal{S}} \equiv \frac{\hbar}{2}\,\vec{u}\,\vec{\sigma}. \tag{2.4}$$

Diese drei Operatoren werden nun als Observable gedeutet: Sie beschreiben die im Stern-Gerlach-Experiment auftretende Wechselwirkung mit einem äußeren – zu $\vec{u}$

parallelen – Magnetfeld (d.h. sie können durch einen solchen Versuchsaufbau gemessen werden kann).

Umgekehrt definiert jedes normierte $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ via

$$\vec{u} = \langle\psi|\,\vec{\sigma}\,|\psi\rangle \tag{2.5}$$

einen (reellen: $\vec{u}^* = \vec{u}$) Vektor $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$, für den, wie leicht nachgerechnet werden kann,

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= 1 && (2.6)\\ \vec{u}\vec{\sigma}\,|\psi\rangle &= |\psi\rangle && (2.7) \end{aligned}$$

gilt[4]. Die letzte Gleichung impliziert, dass ψ Eigenzustand (zum Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$) der Projektion von $\vec{\mathcal{S}}$ in die Richtung $\vec{u}$ ist. Daher ist mit jedem Zustandsvektor eine eindeutig bestimmte Richtung verbunden, in der ein Stern-Gerlach-Versuch mit Sicherheit den Messwert 1 ergibt.

Als Basis von $\mathcal{H}$ werden oft die Eigenzustände des Operators σ_3 verwendet:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \tag{2.8}$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle, \tag{2.9}$$

womit sich jeder Zustandsvektor in $\mathcal{H}$ als

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \tag{2.10}$$

[4]Diesem Resultat liegt die Identität

$$(\psi^\dagger\vec{\sigma}\psi)\vec{\sigma}\psi = (\psi^\dagger\psi)\psi$$

zu Grunde, die für alle $\psi \in \mathbf{C}^2$ gilt. Multiplikation von links mit $\psi^\dagger$ ergibt

$$(\psi^\dagger\vec{\sigma}\psi)^2 = (\psi^\dagger\psi)^2.$$

schreiben lässt. Die Eigenzustände des Operators σ_1 ergeben sich daraus zu

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right), \qquad \sigma_1|\rightarrow\rangle = |\rightarrow\rangle \tag{2.11}$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right), \qquad \sigma_1|\leftarrow\rangle = -|\leftarrow\rangle, \tag{2.12}$$

jene des Operators σ_2 zu

$$|\oplus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right), \qquad \sigma_2|\oplus\rangle = |\oplus\rangle \tag{2.13}$$

$$|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle\right), \qquad \sigma_2|\odot\rangle = -|\odot\rangle, \tag{2.14}$$

wobei das Symbol $\oplus$ die Richtung entlang der positiven y-Achse ("weg vom Beobachter") und $\odot$ die Richtung entlang der negativen y-Achse ("hin zum Beobachter") anzeigt.

Verhalten unter Drehungen, Spin

Nachdem die Zuordnung zwischen Operatoren und Observablen definiert worden ist, stellt sich die Frage nach ihrer Konsistenz unter einem Wechsel des Bezugssystems. Da die Zustandsvektoren von der Ortskoordinate (d.h. von der Bewegung des Elektrons) nicht abhängen, ist das Modell per Definition invariant unter (hinreichend kleinen) Geschwindigkeitstransformationen. Was hingegen eigens überprüft werden muss, ist sein Verhalten unter räumlichen Drehungen.

Wir unterwerfen also das System einer infinitesimalen Drehung (bzw. betrachten es von einem infinitesimal gedrehten Koordinatensystem aus). Die Drehung wird für Vektoren – insbesondere die durch (2.5) definierten – wie in (1.1) durch eine orthogonale Matrix R beschrieben: $\vec{u}' = R\,\vec{u}$. Da das gedrehte Modell zum alten äquivalent sein soll, muss derÜbergang für Zustandvektoren durch eine unitäre Transformation wie in (1.6) beschrieben werden können. Daraus ergibt sich

$$\vec{u}' \equiv \langle\psi'|\,\vec{\sigma}\,|\psi'\rangle \equiv \langle\psi|\,U^\dagger\vec{\sigma}U\,|\psi\rangle = R\,\vec{u} \equiv R\,\langle\psi|\,\vec{\sigma}\,|\psi\rangle \qquad \forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \tag{2.15}$$

d.h. in Komponenten

$$\langle\psi|\,U^\dagger\sigma_j U\,|\psi\rangle = R_{jk}\langle\psi|\,\sigma_k\,|\psi\rangle \qquad \forall\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{2.16}$$

Die gesuchte Konsistenzbedingung lautet daher[5]

$$U^\dagger \sigma_j U \;=\; R_{jk}\sigma_k. \tag{2.17}$$

Sie kann so ausgedrückt werden: "$\vec{\mathcal{S}}$ transformiert wie ein Vektor". Tatsächlich stellt sie die Rechtfertigung dafür dar, jeden der drei Operatoren σ_j mit einer räumlichen Richtung zu assoziieren (also etwa σ_3 mit der positiven z-Richtung).

Um zu überprüfen, ob (2.17) erfüllt werden kann, gehen wir zu infinitesimalen Drehungen über. Unter Verwendung von (1.3) und (1.11) ergibt sich, dass (2.17) erfüllt ist, wenn $\kappa_j = -\frac{1}{2}\chi_j$ gewählt wird. Damit ist die Invarianz (besser: Kovarianz) der Theorie unter Drehungen gezeigt.

Das Verhalten der Zustandsvektoren unter infinitesimalen Drehungen liefert uns unmittelbar den Spinoperator des Elektrons. Der Spin kann – ein bisschen salopp – als "Gesamtdrehimpuls im Ruhsystem" definiert werden. Um das Auffinden des Ruhsystems brauchen wir uns keine Sorgen machen, da das Modell die Bewegung des Elektrons ausklammert. (Vom Standpunkt der Relativitätstheorie befinden wir uns allein durch die Verwendung der nichtrelativistischen Näherung nahe am Ruhsystem. In diesem Zusammenhang ist wichtig, dass es für das Elektron als *massives* Teilchen ein Ruhsystem gibt). Wie aber wird der Drehimpuls berechnet? Bereits in der klassischen Mechanik ist der Drehimpuls die "Erzeugende räumlicher Drehungen". Diese Charakterisierung wird in der Quantentheorie übernommen. Es lässt sich allgemein zeigen, dass die Zustandsvektoren eines zweidimensionalen quantenmechanischen Systems, dessen Kovarianz unter Drehungen erwiesen ist, gemäß

$$\delta|\psi\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\,\vec{\chi}\vec{S}\,|\psi\rangle \tag{2.18}$$

transformieren, wobei $\vec{S}$ der (nichtrelativistische) Spin ist. Da die Transformation der Zustandsvektoren andererseits durch (1.12) mit $\kappa_j = -\frac{1}{2}\chi_j$ gegeben ist, kann der Spin unmittelbar als

$$\vec{S} \;=\; \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma} \tag{2.19}$$

abgelesen werden. Er ist mit der in (2.3) definierten Größe identisch:

$$\vec{S} \;=\; \vec{\mathcal{S}}. \tag{2.20}$$

[5]Es wird verwendet: Aus $\langle\psi|A|\psi\rangle = 0 \;\; \forall\,|\psi\rangle$ und $A^\dagger = A$ folgt $A = 0$.

Sein Quadrat erfüllt

$$\vec{S}^{\,2} \;\equiv\; \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) \;=\; \frac{3\hbar^2}{4}\,\mathbf{1} \;=\; \hbar^2 s(s+1)\,\mathbf{1} \tag{2.21}$$

mit Spinquantenzahl $s=\frac{1}{2}$, woraus folgt, dass es sich beim Elektron um ein Spin-1/2-Teilchen handelt. Der auf diese Weise erhaltene Vektor-Operator stellt eine gute Näherung des vollen relativistischen Spins dar.

3 Photon

Hilbertraum, Operatoren, Observable

Der "Polarisationsfreiheitsgrad" des Photons wird ähnlich wie das nichtrelativistische Elektron beschrieben, allerdings mit einer wichtigen Änderung: Im Gegensatz zum Elektron ist die Bedeutung der Komponenten an die $\vec{x}$-Abhängigkeit der Wellenfunktion gekoppelt. Wir nehmen an, dass diese einem scharfen Wert des Impulses entspricht (d.h. sie ist $\sim \exp(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x})$), wodurch eine eindeutige Bewegungsrichtung

$$\vec{n} \;=\; \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{3.1}$$

definiert ist. (Da Photonen immer einen von Null verschiedenen Impuls haben, ist $\vec{n}$ *immer* wohldefiniert). Abgesehen davon benötigen wir keine weitere Information über die $\vec{x}$-Abhängigkeit der Zustandsvektoren. Die quantenmechanische Beschreibung des Photons hat daher die folgende Struktur:

Die Zustandvektoren bilden einen zweidimensionalen komplexen Hilbertraum, dessen Elemente als

$$|\psi\rangle \;\equiv\; \psi \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

geschrieben werden und gemäß

$$\langle\psi|\psi\rangle \;\equiv\; \psi^\dagger\psi \;\equiv\; a^*a+b^*b \;=\; 1 \tag{3.3}$$

normiert sind. Die Deutung der hermitischen Operatoren als physikalische Observable hängt von der Bewegungsrichtung $\vec{n}$, ab, die als externer Parameter vorgegeben sein muss. In diesem Sinn kann der Hilbertraum als $\mathcal{H}_{\vec{n}} \cong \mathbf{C}^2$ bezeichnet werden.

Auch in diesem Modell treten die Pauli-Matrizen auf, haben aber nun eine andere physikalische Bedeutung. Der Operator

$$\Lambda = \hbar\, \vec{n}\vec{\sigma} \tag{3.4}$$

besitzt die Eigenwerte $\hbar$ und $-\hbar$, und seine Eigenzustände beschreiben Photonen, die rechts- bzw. links-zirkular polarisiert sind:

$$\begin{aligned} \vec{n}\vec{\sigma}|R\rangle &= |R\rangle && (3.5)\\ \vec{n}\vec{\sigma}|L\rangle &= -|L\rangle. && (3.6) \end{aligned}$$

Wird $\vec{n}$ durch $-\vec{n}$ ersetzt (d.h. die Bewegungsrichtung umgedreht), so geht Λ in $-\Lambda$ über, wodurch Links- und Rechtshändigkeit ihre Rollen vertauschen. Auf die Rolle von Λ als Helizitätsoperator werden wir später eingehen.

Linear polarisierte Photonen hingegen sind mit Richtungen orthogonal zu $\vec{n}$, entlang derer Polarisatoren ausgerichtet werden, assoziiert. (Ein Zustand ist linear polarisiert, wenn es eine zu $\vec{n}$ orthogonale Richtung $\vec{u}$ gibt, so dass das Photon einen entlang $\vec{u}$ orientierten Polarisator mit Sicherheit passieren wird). Um eine Referenzbasis in der Ebene orthogonal zu $\vec{n}$ zur Verfügung zu haben, müssen zwei Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ (mit $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ und $\vec{e}_1\vec{n} = \vec{e}_2\vec{n} = \vec{e}_1\vec{e}_2 = 0$) gewählt werden. Wir verwenden die Konvention, dass das System $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n})$ rechtshändig, d.h. dass $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{n}$ (und daher $\vec{n} \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ und $\vec{n} \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$) ist. Die Zuordnung von Polarisatorstellungen zu Operatoren geschieht nun folgendermaßen:

Ist der Polarisator entlang $\vec{e}_1$ orientiert, so beschreibt der Eigenzustand von $\vec{e}_1\vec{\sigma}$ zum Eigenwert 1 ein Photon, das mit Sicherheit passieren wird, also in die Richtung $\vec{e}_1$ polarisiert ist. Daher beschreibt der Eigenzustand zum Eigenwert -1 ein Photon, das mit Sicherheit absorbiert wird, also orthogonal dazu (in Richtung $\vec{e}_2$) polarisiert ist. Diese Zustände können "horizontal" und "vertikal" polarisiert genannt werden:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1\vec{\sigma}|\leftrightarrow\rangle &= |\leftrightarrow\rangle && (3.7)\\ \vec{e}_1\vec{\sigma}|\updownarrow\rangle &= -|\updownarrow\rangle. && (3.8) \end{aligned}$$

Für diese beiden Zustände werden auch die Symbole $|H\rangle$ und $|V\rangle$ oder $|\mathrm{hor}\rangle$ und $|\mathrm{ver}\rangle$ verwendet. Man beachte, dass der Operator $-\vec{e}_1\vec{\sigma}$ dieselben Eigenzustände (in vertauschter Rolle) besitzt und daher einen entlang $\vec{e}_2$ (*nicht* $\vec{e}_1$) orientierten Polarisator bschreibt! Die Operatoren $\vec{e}_2\vec{\sigma}$ und $-\vec{e}_2\vec{\sigma}$ sind in analoger Weise für um

45° gedrehte (also *nicht* in Richtung $\vec{e}_2$ orientierte) Polarisatorstellungen zuständig. Wir können sie so bezeichnen:

$$\vec{e}_2\vec{\sigma}|\nearrow\!\!\!\swarrow\rangle = |\nearrow\!\!\!\swarrow\rangle \tag{3.9}$$
$$\vec{e}_2\vec{\sigma}|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle = -|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle. \tag{3.10}$$

Nun betrachten wir einen entlang einer beliebigen Richtung $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ ($|\vec{u}| = 1$, $\vec{n}\vec{u} = 0$) orientierten Polarisator. Mit $\vec{e_1}\vec{u} = \cos\theta$, $\vec{e_2}\vec{u} = \sin\theta$ ergibt sich der Winkel θ, um den er gegenüber $\vec{e}_1$ gedreht ist. Ihm wird der Operator

$$P(\vec{u}) = (\cos(2\theta)\,\vec{e}_1 + \sin(2\theta)\,\vec{e}_2)\,\vec{\sigma} \tag{3.11}$$

zugeordnet. Unter $\theta \to \theta + 90°$ ändert dieser sein Vorzeichen, während er unter $\theta \to \theta + 180°$ in sich selbst übergeht. Für $\theta = 0°$ und $\theta = 45°$ ergeben sich $\vec{e}_1\vec{\sigma}$ und $\vec{e}_2\vec{\sigma}$. Unter Verwendung der Identitäten $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ kann (3.11) durch $\vec{u}$ ausgedrückt werden:

$$P(\vec{u}) = \vec{q}(\vec{u})\vec{\sigma} \tag{3.12}$$

mit

$$\vec{q}(\vec{u}) = \left((\vec{e}_1\vec{u})^2 - (\vec{e}_2\vec{u})^2\right)\vec{e}_1 + 2(\vec{e}_1\vec{u})(\vec{e}_2\vec{u})\,\vec{e}_2 \tag{3.13}$$
$$\equiv \mathrm{Re}\left(((\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)\vec{u})^2\,(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)\right). \tag{3.14}$$

Dieser Operator ist unter $\vec{u} \to -\vec{u}$ invariant ($\vec{u}$ und $-\vec{u}$ beschreiben dieselbe Polarisatorstellung) und ändert unter $\vec{u} \to -\vec{n} \wedge \vec{u}$ sein Vorzeichen. Da – wie aus (3.11) folgt – $|\vec{q}(\vec{u})| = 1$ ist, sind seine Eigenwerte 1 und -1, und die zugehörigen Eigenzustände beschreiben entsprechend polarisierte Photonen.

Mit dieser Festlegung der Bedeutung der Operatoren Λ und $P(\vec{u})$ ist das System physikalisch wohldefiniert: Zirkular polarisierte Photonen werden durch Eigenzustände von Λ, linear polarisierte Photonen werden als Eigenzustände der Operatoren $P(\vec{u})$ beschrieben.

Die linear polarisierten Zustände können auch anders charakterisiert werden: Ein Zustandsvektor $|\psi\rangle$ ist Eigenzustand eines der Operatoren $P(\vec{u})$ genau dann, wenn $\langle\psi|\,\Lambda\,|\psi\rangle = 0$ ist. Haben wir einen solchen (normierten) Zustand gegeben, so kann ihm via

$$((\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)\vec{u})^2 = (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)\langle\psi|\,\vec{\sigma}\,|\psi\rangle \tag{3.15}$$

bzw. nach $\vec{u}$ aufgelöst

$$\vec{u} = \mathrm{Re}\left(\sqrt{(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)\langle\psi|\,\vec{\sigma}\,|\psi\rangle}\;(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)\right) \tag{3.16}$$

ein Paar reeller entgegengesetzter Richtungen $\{\vec{u}, -\vec{u}\}$ zugeordnet werden, für die, wie leicht nachgerechnet werden kann, gilt:

$$|\vec{u}| = 1 \tag{3.17}$$

$$P(\vec{u})|\psi\rangle = |\psi\rangle. \tag{3.18}$$

Ein Photon im Zustand $|\psi\rangle$ wird einen entlang $\vec{u}$ orientierten Polarisator mit Sicherheit passieren. (Man erinnere sich: $P(-\vec{u}) = P(\vec{u})$). Das stellt in gewisser Weise das Analogon zu (2.7) dar.

Eine interessante Frage ist, ob sich in diesem Modell noch Spuren des elektromagnetischen Feldes, dessen Quantisierung ja zum Begriff des Photons führt, finden lassen. (Wäre noch zu klären...).

Eine bequeme Wahl der beteiligten Vektoren ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Damit wird

$$\vec{n}\vec{\sigma} = \sigma_2, \qquad \vec{e}_1\vec{\sigma} = \sigma_3, \qquad \vec{e}_2\vec{\sigma} = \sigma_1. \tag{3.20}$$

Gemäß (3.5)–(3.8) werden die horizontal und vertikal polarisierten Zustände als

$$|\leftrightarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3|\leftrightarrow\rangle = |\leftrightarrow\rangle \tag{3.21}$$

$$|\updownarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3|\updownarrow\rangle = -|\updownarrow\rangle \tag{3.22}$$

und die zirkular polarisierten Zustände als

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2|R\rangle = |R\rangle \tag{3.23}$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2|L\rangle = -|L\rangle \tag{3.24}$$

definiert, wobei die Phasen so gewählt wurden, dass sich die schönen Beziehungen

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle + i|\updownarrow\rangle\right) \tag{3.25}$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle - i|\updownarrow\rangle\right) \tag{3.26}$$

und

$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle + |L\rangle\right) \tag{3.27}$$

$$|\updownarrow\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle - |L\rangle\right) \tag{3.28}$$

ergeben. Die Zustände (3.9)–(3.10) können als

$$|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle\right) \tag{3.29}$$

$$|\nwarrow\!\!\!\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle - |\updownarrow\rangle\right) \tag{3.30}$$

gewählt werden.

Linearkombinationen der linear polarisierten mit den Helezitätszuständen (d.h. allgemeine – reine – Zustände des Systems) entsprechen übrigens *elliptischer Polarisation.*

Verhalten unter Drehungen

Wir überprüfen nun wieder die Kovanianz des Systems unter Drehungen, was sich etwas komplizierter als im Fall des Elektrons gestaltet: Erstens hängt die betrachtete Theorie von einem externen Parameter $\vec{n}$ ab, der unter räumlichen Drehungen nichttrivial transformiert, und zweitens ist für den Formalismus die Wahl zweier auf $\vec{n}$ und aufeinander normal stehender Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ nötig. Wir führen die nötigen (etwas länglichen) Rechnungen nicht aus, sondern stellen lediglich fest, dass die Konsistenz gegeben ist. Sowohl

1. die Wahl anderer Referenzvektoren $\vec{e}_1'$ und $\vec{e}_2'$ (d.h. die Drehung des Koordinatensystems in der Ebene, in der Polarisatoren ausgerichtet werden) als auch

2. die Drehung des gesamten Systems (einschließlich $\vec{n}$)

werden durch unitäre Transformationen der Zustandsvektoren kompensiert. Im ersten Fall transformieren die Zustandsvektoren anders als im Fall des Elektronsystems: $\delta\vec{e}_1 = \chi\,\vec{n}\wedge\vec{e}_1$ und $\delta\vec{e}_2 = \chi\,\vec{n}\wedge\vec{e}_2$ (was $\vec{\chi} = \chi\vec{n}$, d.h. einer Drehung um den infinitesimalen Winkel χ entspricht) führt auf $\delta\vec{q}(\vec{u}) = -2\chi\,\vec{n}\wedge\vec{q}(\vec{u})$ und $\delta|\psi\rangle = i\chi\vec{n}\vec{\sigma}|\psi\rangle$, was sich um den Faktor -2 vom typischen Verhalten eines Spin-1/2-Systems unterscheidet. Im zweiten Fall, sofern *alle* Vektoren, also auch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, derselben Drehung unterworfen werden, ergibt sich das selbe Verhalten der Zustandsvektoren wie im Fall des Elektrons ($\delta\vec{x} = \vec{\chi}\wedge\vec{x}$ für alle Vektoren und $\delta|\psi\rangle = -\frac{i}{2}\vec{\chi}\vec{\sigma}|\psi\rangle$ für die Zustandsvektoren). Durch die Kombination beider Fälle ergibt sich also ein vom Spin-1/2-System verschiedenes Verhalten unter Drehungen.

Wo ist der Spin?

Man könnte nun versucht sein, das gesamte System (einschließlich $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$) einer Drehung unterwerfen, naiv die Formel (2.18) zu verwenden und zu schließen, dass der Spin wie beim Elektron durch $\vec{S} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$ gegeben, das Photon also ein Spin-1/2-Teilchen wäre! Abgesehen davon, dass diese Argumentation das Verhalten unter einer Änderung der Wahl von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ (die ja auch einer Drehung entspricht) ignoriert, ist sie aus einem anderen, physikalisch einsichtigeren Grund nicht zulässig: Der Spin als "Gesamtdrehimpuls im Ruhsystem" existiert für ein *masseloses* Teilchen wie das Photon nicht, da es kein Ruhsystem gibt. Man könnte als Alternative vorschlagen, auf den Zusatz "im Ruhsystem" zu verzichten und den Gesamtdrehimpuls betrachten. Das führt einerseits zu einem zusätzlichen Anteil $(\hbar/2)\vec{\sigma}$, andererseits zu einem Anteil, der von Ort und Impuls des Photons abhängt. Formal können wir den (nichtrelativistischen) Gesamtdrehimpuls als

$$\vec{J} = \vec{x}\wedge\vec{p} + \hbar\vec{\sigma} \tag{3.31}$$

schreiben. Dieser Ausdruck hat aber den Nachteil, dass er die $\vec{x}$-Abhängigkeit der Zustandsvektoren benötigt und im Rahmen unseres Formalismus nicht als linearer Operator dargestellt werden kann. (Auch wenn die $\vec{x}$-Abhängigkeit berücksichtigt wird, besteht der Nachteil, dass diese Observable von der Wahl des Koordinatenursprungs und ganz allgemein vom verwendeten Inertialsystem abhängt). Wir erkennen aber dennoch, dass der für Spin-1/2-Teilchen typische Faktor $\frac{1}{2}$ beim zweiten Anteil fehlt – das deutet darauf hin, dass das Photon in Wahrheit ein Spin-1-Teilchen ist. (Diese Bezeichnung ist gruppentheoretischer Natur – sie soll nicht darüber hinwegtäuschen, dass das Photon keinen Spin – im Sinne eines Vektor-Operators $\vec{S}$ – besitzt). Als Ersatz für den Spin wird der Gesamtdrehimpuls in die Bewegungsrichtung projiziert, also $\vec{J}\vec{p}/|\vec{p}|$ gebildet. Da (formal) $(\vec{x} \wedge \vec{p})\,\vec{p} = 0$ ist, erhalten wir mit (3.1) genau den Operator (3.4),

$$\Lambda = \hbar\,\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \equiv \hbar\,\vec{n}\vec{\sigma}, \tag{3.32}$$

der im Rahmen unseres Modells existiert und eine physikalische Bedeutung hat. Obwohl also dem Gesamtdrehimpuls kein Operator des zweidimensionalen Modells entspricht, übernimmt dessen Projektion auf die Bewegungsrichtung (die Helizität) in gewisser Hinsicht die Rolle des Spins: Er besitzt nur zwei mögliche Messwerte $\pm\hbar$ (die mit rechts- und links-zirkular polarisierte Photonen identifiziert werden) und ist unabhängig vom verwendeten Inertialsystem. Letzteres bedeutet, dass die Eigenschaft eines Zustandvektors, links- oder rechtshändig (d.h. Eigenzustand der Helizität zum Eigenwert $\hbar$ oder $-\hbar$) zu sein, unter Drehungen und Geschwindigkeitstransformationen invariant ist.

Es zeigt sich also, dass die beiden verlockenden Vorstellungen "der Spin des Photons ist parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung" und "der Spin des Photons ist mit der Polarisation zu identifizieren" falsch sind.

4 Übersetzungstabelle für Pauli-Matrizen

Die unterschiedlichen Rollen, die die Pauli-Matrizen für das Elektron und das Photon spielen, sind in der nachfolgenden Tabelle gegenübergestellt. Dabei werden die Identifizierungen (2.8)–(2.14) und (3.19)–(3.30) zu Grunde gelegt, d.h. der Impuls des Photons weist in die (positive) y-Richtung, und Polarisatoren für Photonen sind in der xz-Ebene ausgerichtet. Um die größtmögliche Entsprechung der beiden Systeme unter Verwendung der üblichen Konventionen zu erreichen, wird im Fall des Photons die z-Achse als "horizontal" angesehen.

Zu jedem Operator sind die Eigenzustände zu den Eigenwerten 1 und -1 angegeben. (Im Fall von Doppelvorzeichen ist das obere dem Eigenwert 1 zugeordnet). Die in der rechten Spalte angegebenen Zuordnungen zwischen Polarisationsrichtungen und Operatoren gehorchen dem Schema: Ein durch einen Eigenzustand des betreffenden Operators zum Eigenwert 1 beschriebenes Photon passiert mit Sicherheit den in der angegebenen Richtung orientierten Polarisator.

Die in der linken Spalte angegebenen Größen entsprechen dem allgemeinen ("abstrakten") zweidimensionalen Modell ("Qubit"), das nach Belieben als Elektron- bzw. Photonsystem gedeutet werden kann. In ihm werden die Eigenzustände von σ_3 als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bezeichnet und dienen als Basis (*computational basis*) für den Raum der Zustandsvektoren. Viele Anwendungen der Quantenoptik kommen mit der Verwendung der Operatoren σ_3 und σ_1 und ihrer Eigenzustände aus.

Abstraktes Modell	**Elektron**	**Photon**
σ_3 $\|0\rangle,\ \|1\rangle$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in positive z-Richtung $\|\uparrow\rangle,\ \|\downarrow\rangle$	Polarisator parallel zur z-Achse $\|\leftrightarrow\rangle,\ \|\updownarrow\rangle$
$-\sigma_3$ $\|1\rangle,\ \|0\rangle$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in negative z-Richtung $\|\downarrow\rangle,\ \|\uparrow\rangle$	Polarisator parallel zur x-Achse $\|\updownarrow\rangle,\ \|\leftrightarrow\rangle$
σ_1 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle \pm \|1\rangle)$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in positive x-Richtung $\|\rightarrow\rangle,\ \|\leftarrow\rangle$	Polarisator parallel zur Geraden $z = x$ $\|\swarrow\!\!\nearrow\rangle,\ \|\nwarrow\!\!\searrow\rangle$
$-\sigma_1$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle \mp \|1\rangle)$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in negative x-Richtung $\|\leftarrow\rangle,\ \|\rightarrow\rangle$	Polarisator parallel zur Geraden $z = -x$ $\|\nwarrow\!\!\searrow\rangle,\ \|\swarrow\!\!\nearrow\rangle$
σ_2 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle \pm i\|1\rangle)$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in positive y-Richtung $\|\oplus\rangle,\ \|\odot\rangle$	$(1/\hbar)\times$ Helizitätsoperator $\|R\rangle,\ \|L\rangle$
$-\sigma_2$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle \mp i\|1\rangle)$	$(2/\hbar)\times$Spinkomponente in negative y-Richtung $\|\odot\rangle,\ \|\oplus\rangle$	$(-1/\hbar)\times$ Helizitätsoperator $\|L\rangle,\ \|R\rangle$