Universität Wien
Dietrich Burde

Algebra 2
— Aufgaben —

Aufgaben SS 2024

Aufgabe 1. Man zeige, dass es keinen Körper $\mathbb{F}$ mit 12 Elementen geben kann.

Aufgabe 2. Seien m und n teilerfremde positive ganze Zahlen und ζ_m, ζ_n eine primitive m-te beziehungsweise n-te Einheitswurzel. Man zeige, dass

$$\mathbb{Q}(\zeta_{mn}) = \mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n)$$

gilt.

Aufgabe 3. Sei $[m, n]$ das kleinste gemeisame Vielfache von $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass das Körperkompositum von $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ und $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ durch

$$\mathbb{Q}(\zeta_m)\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{[m,n]})$$

gegeben ist.

Aufgabe 4. Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 ist.

Aufgabe 5. Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\zeta_5+\zeta_5^{-1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gilt, und somit $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ein echter Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_5) \mid \mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 6. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die gilt

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n).$$

Aufgabe 7. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $z \in \mathbb{F}$ ein beliebiges Element. Man zeige, dass es $x, y \in \mathbb{F}$ gibt mit $z = x^2 + y^2$.

Aufgabe 8. Man find alle Elemente $a \in \mathbb{F}_7$, so dass der Quotientenring $\mathbb{F}_7[X]/(X^3 + aX^2 + 1)$ ein Körper ist.

Aufgabe 9. Sei K ein Körper mit zyklischer Einheitengruppe $K^\times$. Man zeige, dass $K^\times$ und K endlich sind.

Aufgabe 10. Es sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in L[X]$ ein Polynom, deren Koeffizienten algebraisch über K sind. Man zeige, dass die Nullstellen von f in L ebenfalls algebraisch über K sind.

Aufgabe 11. Man zeige, dass mindestens eine der Zahlen $e+\pi$, $e\pi$ transzendent ist. Es darf verwendet werden, dass e und π transzendent sind.

Aufgabe 12. Man zeige, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{R} \mid \mathbb{Q}) = 1$ gilt.

Aufgabe 13. Sei $L \mid K$ eine algebraische Körpererweiterung und $f \in$ End(L | K) ein K-Endomorphismus. Man zeige, dass f injektiv und surjektiv ist.

Aufgabe 14. Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Man zeige, dass es eine Körpererweiterung $L \mid K$ gibt mit $[L : K] \leq n!$, so dass f über L in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 15. Man bestimme einen Zerfällungskörper L des Polynoms $X^6 - 8$ über $\mathbb{Q}$ und berechne den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 16. Man bestimme einen Zerfällungskörper L des Polynoms $X^4 + X^2 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und berechne den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 17. Man bestimme einen Zerfällungskörper L des Polynoms $X^3 - 5$ über $\mathbb{Q}$ und berechne den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$. Weiterhin bestimme man $\mathrm{Aut}(L \mid \mathbb{Q})$.

Aufgabe 18. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: für jedes $n \geq 1$ gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad n, mit einen Zerfällungskörper L von f, so dass

$$[L : \mathbb{Q}] = n\varphi(n).$$

gilt.

Aufgabe 19. Sei K ein endlicher Körper. Man zeige, dass sein algebraischer Abschluss abzählbar unendliche Kardinalität hat.

Aufgabe 20. Sei K ein unendlicher Körper. Man zeige, dass sein algebraischer Abschluss die gleiche Kardinalität wie K hat. Insbesondere ist $\overline{\mathbb{Q}}$ abzählbar.

Aufgabe 21. Seien d_1, d_2 zwei ganze Zahlen. Man zeige, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ isomorphe algebraische Abschlüsse haben.

Aufgabe 22. Sei $f \in \mathbb{F}_2[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 5. Man zeige, dass f keine mehrfache Nullstelle besitzt in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 23. Man zeige, dass $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ ein Körper mit 4 Elementen ist und gebe explizite Tabellen für die Addition und Multiplikation an.

Aufgabe 24. Sei $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$ ein endlicher Körper und m ein Teiler von n. Wie viele Unterkörper von $\mathbb{F}_q$ gibt es, die isomorph zu $\mathbb{F}_{p^m}$ sind? Man begründe die Antwort.

Aufgabe 25. Man beweise oder widerlege folgende Aussage: sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz und α eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X + 1$ in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_q$. Dann gilt $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_p(\alpha)$.

Aufgabe 26. Man bestimme einen Zerfällungskörper L des Polynoms $X^3 + X + 1$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ und berechne den Körpergrad $[L : \mathbb{F}_2]$.

Aufgabe 27. Es seien K und L Unterkörper von $\mathbb{F}_{p^n}$ mit $|K| = p^a$ und $|L| = p^b$. Man bestimme $|K \cap L|$ für den Unterkörper $K \cap L$ in $\mathbb{F}_{p^n}$.

Aufgabe 28. Man bestimme alle Unterkörper des Körpers $\mathbb{F}_{5^{30}}$ und zeiche ihr Unterkörper-Diagramm. Inklusionen werden durch gerade Linien dargestellt.

Aufgabe 29. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad m. Dann gilt

$$f \mid X^{q^n} - X \Longleftrightarrow m \mid n.$$

Aufgabe 30. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass das Produkt aller normierten irreduziblen Polynome über $\mathbb{F}_q$, deren Grad n teilt, gleich $X^{q^n} - X$ ist.

Aufgabe 31. Sei $N_q(d)$ die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_q[X]$ vom Grad $d \geq 1$. Man zeige, dass

$$q^n = \sum_{d \mid n} d \cdot N_q(d)$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Mit der Möbiusschen Umkehrformel zeige man, dass

$$N_q(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 32. Man entscheide, ob die Erweiterung $\mathbb{Q}\left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right) \mid \mathbb{Q}$ normal ist oder nicht und begründe dies.

Aufgabe 33. Welche der drei folgenden Körpererweiterungen sind normal?

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right) \mid \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \mid \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) \mid \mathbb{Q}$$

Man gebe eine Begründung.

Aufgabe 34. Man entscheide, ob die Gleichheit

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-1}, \sqrt{2}\right)$$

gilt und begründe dies.

Aufgabe 35. Man zeige, dass die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p}, \dots) \mid \mathbb{Q},$$

wobei die Wurzeln aller Primzahlen p adjungiert werden, algebraisch ist. Ist sie auch normal?

Aufgabe 36. Sei $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ und ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel. Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{a})$. Man zeige, dass die Körpererweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ normal ist. Für $n = 6$ und $a = 2$ berechne man den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 37 - extra. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{2})$. Man zeige, dass die Körpererweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ normal ist, und dass gilt

$$[L : \mathbb{Q}] = \begin{cases} n\varphi(n) & \text{falls } 8 \nmid n, \\ \frac{n\varphi(n)}{2} & \text{falls } 8 \mid n \end{cases}$$

Aufgabe 38. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $a \in K$ und α eine Nullstelle des Polynoms $X^p - a \in K[X]$. Man bestimme die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(K(\alpha) \mid K)$.

Aufgabe 39. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Man zeige, dass das Polynom $X^5 - X^2 + 1$ separabel ist für $p = 5$, aber inseparabel für $p = 7$.

Aufgabe 40. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2 und $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Man zeige, dass es ein $\alpha \in L \setminus K$ gibt mit $\alpha^2 \in K$ und $L = K(\alpha)$. Man gebe ein Gegenbeispiel für diese Aussage mit $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 41. Es seien $K = \mathbb{Q}$ und
$$L = K\left(\sqrt{2}, e^{\frac{2\pi i}{2019}}, \sqrt{3 + \sqrt[4]{12}}\right).$$
Man zeige, dass es ein primitives Element $\alpha \in L$ gibt mit $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 42. Man bestimme ein primitives Element für die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \mid \mathbb{Q}$, d.h., ein $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe 43. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Man bestimme die Galoisgrupe der Erweiterung $L \mid \mathbb{Q}$.

Aufgabe 44 - extra. Man zeige ohne Galoistheorie, dass folgende Gleichheit gilt,
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

Aufgabe 45. Man bestimme die Galoisgruppe des Polynoms $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 46. Man zeige, dass $\sqrt[4]{2}$ in keiner Galoiserweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ enthalten sein kann, für die $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q}) \cong S_n$ gilt.

Aufgabe 47. Man zeige mit Galoistheorie, dass es keine primitive n-te Einheitswurzel ζ_n in $\mathbb{C}$ gibt mit $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Aufgabe 48. Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 3$ und ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Man zeige, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_p) \mid \mathbb{Q}$ einen eindeutigen Zwischenkörper L enthält mit $[L : \mathbb{Q}] = 3$.

Aufgabe 49. Es sei ζ_8 eine primitive 8-te Einheitswurzel und $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$. Man bestimme die Galoisgruppe der Erweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ und alle ihre Untergruppen, sowie die zugehörigen Fixkörper.

Aufgabe 50. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel und ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n)$ und

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n), \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m), \mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{Q})$$

gilt.

Aufgabe 51. Man bestimme die Galoisgruppe des Polynoms $X^6 + X^4 + X^2 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 52. Man finde eine Galoiserweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ vom Grad 8 mit $\mathrm{Gal}(L, \mathbb{Q}) \cong Q_8$, der Quaternionengruppe.

Aufgabe 53. Man zeige, dass die Galoisgruppe des Polynoms $X^5 - 3$ auflösbar ist.

Aufgabe 54. Man zeige, dass die Gleichung

$$X^5 - 5X^4 + 10X^3 + 50X^2 - 5 = 0$$

über $\mathbb{Q}$ nicht durch Radikale auflösbar ist.

Aufgabe 55. Sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Man zeige, dass es eine ganze Zahl $m \geq 1$ gibt, so dass die Galoisgruppe von

$$X^p + mp^2(X-1)(X-2)\cdots(X-p+2) - p$$

über $\mathbb{Q}$ isomorph zu S_p ist.

Aufgabe 56. Sei $L \mid K$ eine Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L, K)$. Für $\alpha \in L$ definieren man die *Norm* von α durch

$$N(\alpha) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha).$$

Man zeige, dass $N(\alpha) \in K$ gilt und $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in L$.

Aufgabe 57. Sei $L \mid K$ eine quadratische Körpererweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L,K) = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ und $\alpha \in L$. Man zeige, dass $N(\alpha) = 1$ genau dann gilt, wenn es ein $\beta \in L$ gibt mit $\alpha = \frac{\beta}{\sigma(\beta)}$.

Aufgabe 58 - extra. Sei $p > 2$ ein Primzahl und

$$f = X^p + pX^{p-1} + p.$$

Man zeige, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und genau eine reelle Nullstelle hat. Man bestimme die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 59. Das reguläre n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz ist. Man zeige, dass dies genau dann der Fall ist, wenn n ein Produkt einer Zweierpotenz und von verschiedenen Fermat Primzahlen (also von der Form $2^{2^m} + 1$) ist.

Aufgabe 60. Seien $f = X^4 - X - 1$ und $g = X^4 + X^2 + 1$ Polynome über $\mathbb{Q}$. Entscheide jeweils für f und g, ob die Nullstellen kontruierbare Zahlen sind.

Aufgabe 61. Sei K ein Körper mit der Eigenschaft, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ von Primzahlgrad eine Nullstelle in K hat. Angenommen, K ist nicht algebraisch abgeschlossen. Man zeige, dass es dann eine Primzahl p gibt, die den Grad jedes nicht-linearen, irreduziblen Polynoms $g \in K[X]$ teilt.

Aufgabe 62. Sei K ein Körper mit der Eigenschaft, dass jedes Polynom $f \in K[X]$ von Primzahlgrad eine Nullstelle in K hat. Man zeige, dass K algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 63. Sei G eine topologische Gruppe. Man zeige, dass jede offene Untergruppe von G auch abgeschlossen ist, und jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index auch offen ist. Ist G kompakt, dann hat jede offene Untergruppe endlichen Index.

Aufgabe 64. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \ldots)$ die maximale Quadratwurzelerweiterung von $\mathbb{Q}$. Man zeige, dass $L \mid \mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimme die Galoisgruppe.

Aufgabe 65. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{\mathbb{Q}})$. Man zeige, dass $\mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{Q})$ überabzählbar viele Untergruppen von Index 2 hat, aber $L \mid \mathbb{Q}$ nur abzählbar viele Zwischenköper vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$ hat.

Aufgabe 66. Man zeige, dass die Galoisgruppe einer Galoiserweiterung von unendlichem Grad überabzählbar ist.

Aufgabe 67. Welche der Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, oder $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ können als Galoiserweiterung von unendlichem Grad auftreten?

Aufgabe 68. Man zeige, dass die pro-endliche Vervollständigung der Gruppe $\mathbb{S}^1$ trivial ist.

Aufgabe 69. Man finde ein Beispiel eines kommutativen Ringes R, der isomorph zu $R \times R$ ist.

Aufgabe 70. Sei $\mathbb{Z}/n$ der $\mathbb{Z}$-Modul der ganzen Zahlen modulo n. Für zwei ganze Zahlen m und n sei $d = \gcd(m, n)$ der größte gemeinsame Teiler von m und n. Man zeige, dass

$$\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/d$$

gilt.

Aufgabe 71. Man entscheide, ob für R-Moduln $M_i, i \in I$ und N immer

$$\mathrm{Hom_R}\left(\prod_{\mathrm{i \in I}} \mathrm{M_i}, \mathrm{N}\right) \cong \prod_{\mathrm{i \in I}} \mathrm{Hom_R}(\mathrm{M_i}, \mathrm{N})$$

gilt.

Aufgabe 72. Sei $M = \prod_{i \geq 0} \mathbb{Z}$ der $\mathbb{Z}$-Modul der ganzzahligen Folgen, und $e^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ die Folge, deren Einträge Null sind, bis auf den n-ten Eintrag, der 1 ist. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$. Man zeige, dass $f(e^n) = 0$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $f(e^n) = 0$ für alle $n \geq 0$ gilt, zeige man, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 73. Man betrachte $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ und zeige, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ frei ist, und isomorph zu $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 74. Man benutze die vorherige Aufgabe, um zu zeigen, dass der $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

nicht frei ist, und deshalb das unendliche Produkt freier Moduln nicht frei sein muss.

Aufgabe 75. Man zeige, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ flach ist.

Aufgabe 76. Man verwende die Definition eines projektiven Moduls aus der Vorlesung (mit dem Diagramm), um zu zeigen, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht projektiv ist.

Aufgabe 77. Man zeige, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2$ beide nicht flach sind.

Aufgabe 78. Sei R ein Hauptidealring und M ein R-Modul. Man zeige, dass M injektiv ist genau dann, wenn M teilbar ist. Man folgere, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv sind.

Abgabe: 30.06.2024