Skriptum zur Vorlesung

Reaktions-Diffusionsgleichungen

Christian Schmeiser[1]

Contents

[1]Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Austria.

1 Einleitung

Wir beschäftigen uns mit Systemen von Reaktions-Diffusionsgleichungen der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x, u, \nabla u)\,, \tag{1.1}$$

wobei $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$ und $D = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_m)$ mit $D_j \geq 0$ gilt. (1.1) ist ein System von parabolischen Gleichungen für die Komponenten von u. Man beachte, daß in den Kopplungstermen (gegeben durch f) Ortsableitungen maximal erster Ordnung auftreten. Diese Tatsache ist für die Analyse von (1.1) von großer Bedeutung.

Die Gleichungen seien definiert für $t > 0$ und $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei entweder Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist oder $\Omega = \mathbb{R}^n$. Im ersten Fall benötigen wir Randbedingungen für alle Komponenten u_j von u, für die $D_j > 0$ gilt. Wir werden uns dabei auf homogene Dirichlet- oder Neumann-Bedingungen beschränken.

Eine Lösung von (1.1) kann durch Angabe von Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$ eindeutig festgelegt werden. Genauer betrachtet ist diese Aussage allerdings ein noch zu beweisendes Resultat. Es führt unmittelbar auf die Frage nach einem geeigneten Lösungsbegriff, der es gestattet, Resultate über die *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen zu beweisen.

Diesen Schritt wollen wir allerdings nur als Vorbereitung betrachten und uns auf Fragestellungen konzentrieren, die sich aus einer Interpretation von (1.1) (zusammen mit Randbedingungen) als *dynamisches System* ergeben. Das bedeutet, daß wir die Frage nach dem Langzeitverhalten von Lösungen stellen und zwar nicht nur für einzelne Anfangsbedingungen, sondern für Anfangsbedingungen aus möglichst großen Teilmengen des *Phasenraumes*. Der Phasenraum wird im weiteren ein Raum von auf Ω definierten Funktionen sein. Die Lösung eines speziellen Anfangswertproblems wird dann als Abbildung $t \mapsto u(t)$ mit Werten im Phasenraum bzw. auch als Kurve im Phasenraum interpretiert und als *Trajektorie* bezeichnet. Zum Unterschied von dynamischen Systemen, die durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmt werden, ist der Phasenraum hier unendlichdimensional. Um die Abhängigkeit von den Anfangsdaten hervorzuheben, wird auch die Schreibweise $u(t) = U_t(u_0)$ verwendet. Daraus ergibt sich auch eine Definition des Begriffes dynamisches System. Ein Familie von Operatoren $\{U_t,\ t \geq 0\}$, die einen Banachraum $\mathcal{B}$ in sich selbst abbilden, heißt dynamisches System, wenn

1. für jedes $t \geq 0$ die Abbildung $U_t:\ \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ stetig ist,
2. für festes $u \in \mathcal{B}$ die Abbildung $t \mapsto U_t(u)$ stetig ist,
3. U_0 die Identität auf $\mathcal{B}$ ist und
4. die Halbgruppeneigenschaft $U_t(U_s(u)) = U_{t+s}(u)$ erfüllt ist.

Von besonderer Bedeutung für das Langzeitverhalten sind *invariante Mengen*, das sind Teilmengen A des Phasenraumes mit der Eigenschaft $U_t(A) = A\ \forall t \geq 0$. Beispiele für beschränkte invariante Mengen sind stationäre Punkte, periodische Lösungen, heterokline und homokline Orbits sowie wandernde Wellen. Diese Begriffe werden später erklärt. Eine invariante Menge

A wird als stabil bezeichnet, wenn alle Trajektorien, die genügend nahe bei A beginnen, für alle Zeiten nahe bei A bleiben. Stabilität einer invarianten Menge ist ein Beispiel für eine Situation, in der das Langzeitverhalten von Lösungen in einer offenen Teilmenge des Phasenraumes beschrieben werden kann.

In manchen Fällen kann allerdings nicht nur lokale, sondern auch globale Information über das Lösungsverhalten ermittelt werden. Im günstigsten Fall ist es möglich, das Lösungsverhalten für (fast) alle Anfangsdaten zu beschreiben. "Fast alle" bedeutet hier eine offene, dichte Teilmenge des Phasenraumes.

Ein in vielen Anwendungen wichtiges Werkzeug sind die Methoden der *Verzweigungstheorie*. Dabei geht es darum, qualitative Änderungen im Langzeitverhalten von Lösungen in Abhängigkeit von im System vorhandenen Parametern zu studieren.

Für alle, die sich schon mit endlichdimensionalen dynamischen Systemen beschäftigt haben, sollte dieser Text die Botschaft vermitteln, daß sich viele der dort verwendeten Konzepte auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern lassen.

Wir werden Resultate aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benötigen. Mit der Referenz [PDG] wird das *Skriptum zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen", gehalten von Christian Schmeiser*, bezeichnet.

2 Beispiele für Anwendungen

2.1 Dynamik chemischer Reaktoren

Wir betrachten einen Behälter (repräsentiert durch das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$), in dem sich eine Trägersubstanz mit Geschwindigkeit $u(x,t)$ ($x \in \Omega$, $t \geq 0$) und konstanter Dichte befindet. In der Trägersubstanz seien N chemisch reagierende Substanzen mit den Konzentrationen $Y_i(x,t)$, $i = 1, \ldots, N$, gelöst. Es finden R chemische Reaktionen mit den Raten $f_j(Y_1, \ldots, Y_N, T)$, $j = 1, \ldots, R$, statt, wobei wir mit $T(x,t)$ die Temperatur bezeichnen.

Wir nehmen die Geschwindigkeit u der Trägersubstanz als gegeben an (z.B. durch Lösen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ermittelt) und suchen Gleichungen für die zeitliche Veränderung der Temperatur und der Konzentrationen $Y_1, \ldots, Y_N$. Für die Veränderung der Temperatur berücksichtigen wir Wärmeleitung, Transport von Wärmeenergie durch die Trägersubstanz sowie Erzeugung bzw. Konsumierung von Wärmeenergie durch die chemischen Reaktionen. Analog ändern sich die Konzentrationen durch

1. chemische Reaktionen,
2. Diffusion in der Trägersubstanz und
3. Transport durch die Bewegung der Trägersubstanz.

Diese Annahmen führen auf die Gleichungen

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = \nabla \cdot (D_i \nabla Y_i - Y_i u) + \sum_{j=1}^{R} \nu_{ij} f_j\,, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T - CTu) + \sum_{j=1}^{R} q_j f_j \,, \tag{2.1}$$

wobei D_i der Diffusionskoeffizient der i-ten Substanz, k die Wärmeleitfähigkeit und C die spezifische Wärme ist. Die $\nu_{ij} \in \mathbb{Z}$ heißen *stöchiometrische Koeffizienten*. Sie geben an, wie viele Moleküle der i-ten Substanz durch die j-te Reaktion produziert ($\nu_{ij} > 0$) bzw. verbraucht ($\nu_{ij} < 0$) werden. Schließlich ist $q_j \in \mathbb{R}$ die durch ein Auftreten der j-ten Reaktion erzeugte ($q_j > 0$) bzw. konsumierte ($q_j < 0$) Wärmeenergie.

Für konstante Diffusionskoeffizienten und Wärmeleitfähigkeit hat das System (2.1) offensichtlich die Form (1.1).

2.2 Populationsdynamik

Wir betrachten zwei verschiedene Spezies von Lebewesen, die einen Lebensraum $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ teilen. Die Veränderung der Dichten $u(x,t)$ und $v(x,t)$ der beiden Spezies beschreiben wir durch das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \Delta u + uM(u,v)\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \Delta v + uN(u,v)\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei D_u und D_v Diffusionskoeffizienten sind und die Terme uM und vN die Geburts- und Sterberaten beinhalten. Drei typische Fälle sind von besonderem Interesse:

1. *Räuber-Beute-Modelle* sind durch die zusätzlichen Annahmen
$$\frac{\partial M}{\partial v} < 0\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} > 0$$
spezifiziert, wobei u die Dichte der Beute und v die Dichte der Räuber ist.

2. *Konkurrenz* wird durch die Annahmen
$$\frac{\partial M}{\partial v} < 0\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} < 0$$
modelliert.

3. *Symbiose* der beiden Spezies wird durch
$$\frac{\partial M}{\partial v} > 0\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} > 0$$
beschrieben.

2.3 Nervenzellen

Ein Modell für die Ausbreitung von Signalen in Nervenzellen ist gegeben durch die *Hodgkin–Huxley–Gleichungen*

$$\begin{aligned} c\frac{\partial u}{\partial t} &= R^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u,v,w,z)\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1(u)(h_1(u)-v)\,, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \varepsilon_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g_2(u)(h_2(u)-w)\,, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \varepsilon_3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + g_3(u)(h_3(u)-z)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Hier bezeichnet u das elektrische Potential, und v, w und z sind Konzentrationen von chemischen Substanzen. Die Konstanten c und R sind positiv und die ε_i nichtnegativ. Weiters gilt

$$\begin{aligned} g(u,v,w,z) &= k_1 v^3 w(c_1-u) + k_2 z^4(c_2-u) + k_3(c_3-u)\,, \\ & \qquad c_1 > c_3 > 0 > c_2\,, \end{aligned}$$

und $g_i > 0$, $1 > h_i > 0$, $i = 1,2,3$.

Ein einfacheres Modell, von dem man annimmt, daß es gewisse Eigenschaften der Hodkin–Huxley–Gleichungen reproduzieren kann, sind die *Fitz-Hugh–Nagumo-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) - u\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma v - \gamma u\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit $\sigma, \gamma > 0$, $\varepsilon \geq 0$ und der Funktion $f(v) = -v(v-\beta)(v-1)$, $0 < \beta < 1/2$.

2.4 Das Chaffee-Infante-Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + \lambda u - u^3\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \\ u &= 0\,, \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei λ ein reeller Parameter ist. Eine eindimensionale Version ($\Omega = (0,\pi)$) wurde von Chaffee und Infante[2] behandelt. Das Problem (2.5) wird im Folgenden immer wieder als Anwendungsbeispiel dienen. Das wird zumindest für den eindimensionalen Fall zu einer vollständigen Analyse des Langzeitverhaltens von Lösungen führen.

[2] N. Chaffee und E. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear parabolic equation, *J. Applicable Anal.* **4** (1974), pp. 17–37.

3 Vergleichsprinzipien

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Problemen der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,t,u) \qquad \text{in } G_T = \Omega \times (0,T)\,,$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \qquad u(.,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega\,, \tag{3.1}$$

d.h. Anfangs-Randwertproblemen für skalare Reaktions-Diffusions-Gleichungen. Man beachte, daß wir uns hier auf Nichtlinearitäten beschränken, die unabhängig von ∇u sind. Weiters nehmen wir an, daß $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist.

Die Resultate dieses Abschnitts sind Anwendungen des starken Maximumprinzips für parabolische Differentialoperatoren (Beweis siehe [PDG]):

Satz 3.1: *Sei $u \in C^2(G_T)$, $c(x,t) \geq 0$ und $D\Delta u - cu - u_t \geq 0$ in G_T. Weiters gelte $u \leq M$ in G_T mit $M \geq 0$ sowie $u(x_0,t_0) = M$ für ein $(x_0,t_0) \in G_T$. Dann gilt*

$$u(x,t) = M \qquad \forall\ (x,t) \in G_{t_0}\,.$$

Wir werden ein schwaches Maximumprinzip für parabolische Operatoren benötigen, das ohne die Bedingung $c \geq 0$ auskommt.

Satz 3.2: *Sei $u \in C^2(G_T) \cap C(\overline{G_T})$, $c(x,t) \geq \underline{c}$ und $D\Delta u - cu - u_t \geq 0$ in G_T. Weiters sei $u \leq 0$ auf $\Omega \times \{0\}$ und auf $\partial\Omega \times (0,T)$. Dann gilt $u \leq 0$ in G_T.*

Beweis: Die Funktion

$$v(x,t) = e^{\underline{c}t} u(x,t)\,.$$

erfüllt die Differentialungleichung

$$D\Delta v - (c - \underline{c})v - v_t \geq 0$$

mit dem nichtnegativen Koeffizienten $c - \underline{c}$. Der vorhergehende Satz impliziert daher, daß v nur dann ein positives Maximum in G_T annehmen könnte, wenn dieses auch für $t = 0$ oder für $x \in \partial\Omega$ angenommen würde. Da aber $v \leq 0$ auf $\Omega \times \{0\}$ und auf $\partial\Omega \times (0,T)$ gilt, folgt $v \leq 0$ in G_T und damit die Behauptung des Satzes. □

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 3.3: *Seien $u, v \in C^2(G_T) \cap C(\overline{G_T})$. Weiters gelte*

$$D\Delta u + f(x,t,u) - u_t \leq D\Delta v + f(x,t,v) - v_t \qquad \text{in } G_T$$

und $u \geq v$ auf $\Omega \times \{0\}$ und auf $\partial\Omega \times (0,T)$. Dann gilt $u \geq v$ in G_T.

Beweis: Für $w = v - u$ gilt

$$D\Delta w + c(x,t)w - w_t \geq 0 \qquad \text{in } G_T\,,$$

wobei $c(x,t) = \partial f/\partial u(x,t,\vartheta u + (1-\vartheta)v)$ für ein geeignet gewähltes $\vartheta(x,t)$ mit $0 < \vartheta < 1$ (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Das zu beweisende Resultat ist nun eine direkte Anwendung des vorhergehenden Satzes auf die Funktion w. □

Eine Konsequenz dieses Satzes ist ein Eindeutigkeitsresultat für Anfangs-Randwertprobleme.

Figure 3.1: Phasenportrait für $\lambda \leq 0$.

Figure 3.2: Phasenportrait für $\lambda > 0$.

Korollar 3.1: *Seien $u_1, u_2 \in C^2(G_T) \cap C(\overline{G_T})$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$u_t = D\Delta u + f(x,t,u)\,,$$

und es gelte $u_1 = u_2$ auf $\Omega \times \{0\}$ und auf $\partial\Omega \times (0,T)$. Dann gilt $u_1 = u_2$ in G_T.

Als Anwendung des Satzes betrachten wir das Chaffee-Infante-Problem (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + \lambda u - u^3\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \\ u &= 0\,, \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit beschränkten Anfangsdaten

$$m \leq u(x,0) \leq M\,, \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{3.3}$$

Wir definieren die Funktionen $\underline{u}(t)$ und $\overline{u}(t)$ als Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= \lambda\underline{u} - \underline{u}^3\,, \qquad \underline{u}(0) = \min\{0, m\}\,, \\ \overline{u}' &= \lambda\overline{u} - \overline{u}^3\,, \qquad \overline{u}(0) = \max\{0, M\}\,. \end{aligned}$$

Abhängig vom Vorzeichen von λ zeigt die gewöhnliche Differentialgleichung $v' = \lambda v - v^3$ unterschiedliches qualitatives Verhalten. Für $\lambda \leq 0$ konvergieren alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen den einzigen stationären Punkt $v = 0$ (siehe Fig. 3.1). Für $\lambda > 0$ gibt es drei stationäre Punkte $v = 0$ und $v = \pm\sqrt{\lambda}$. Man sieht leicht, daß alle Lösungen mit positivem (negativem) Anfangswert gegen $\sqrt{\lambda}$ $(-\sqrt{\lambda})$ konvergieren (siehe Fig. 3.2).

Insbesondere können Lösungen der Differentialgleichung nicht das Vorzeichen wechseln, woraus $\underline{u}(t) \leq 0$ und $\overline{u}(t) \geq 0$ folgt. Weiters sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung gleichzeitig (als Funktionen von x und t betrachtet) Lösungen der partiellen Differentialgleichung in (3.2).

Nehmen wir nun an, das Problem (3.2) hätte eine glatte Lösung $u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, die (3.3) erfüllt (Das haben wir noch nicht bewiesen!), dann liefert eine Anwendung von Satz 3.4 die Ungleichungen

$$\underline{u}(t) \leq u(x,t) \leq \overline{u}(t) \qquad \text{für } (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty)\,. \tag{3.4}$$

Die wichtigste Konsequenz daraus ist, daß jede Lösung gleichmäßig in der Zeit beschränkt ist, weil $\underline{u}$ und $\overline{u}$ diese Eigenschaft haben. Weiters ist mit (3.4) die Frage nach dem Langzeitverhalten der Lösung für den Fall $\lambda \leq 0$ vollständig beantwortet, da in diesem Fall

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \underline{u}(t) = \lim_{t\to\infty} \overline{u}(t) = 0$$

gilt. Für $\lambda > 0$ folgen nur die Aussagen

$$\limsup_{t\to\infty} u(x,t) \leq \sqrt{\lambda}\,, \qquad \liminf_{t\to\infty} u(x,t) \geq -\sqrt{\lambda}\,.$$

4 Existenz und Eindeutigkeit

4.1 Motivation

Betrachten wir das Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f(u,t) \qquad \text{in } \Omega \times (0,\infty)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \qquad \text{für } x \in \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dann ist offensichtlich, daß jede Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $v' = f(v,t)$ eine Lösung von (4.1) ist. Berücksichtigt man Resultate für gewöhnliche Differentialgleichungen, dann ist zu erwarten, daß auch für Reaktions-Diffusionprobleme gewisse Annahmen an f notwendig sein werden, um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen zeigen zu können. Für lokale Resultate (d.h. für kleine Zeitintervalle) werden das Glattheitsannahmen sein. Globale Existenzresultate (d.h. für alle Zeiten) erfordern Bedingungen an das Wachstum von f als Funktion von u.

Als zusätzliche Motivation sei ein weniger triviales Beispiel präsentiert. Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3\,, \qquad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0\,, \qquad t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad 0 < x < \pi\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Man beachte, daß das stationäre Problem die triviale Lösung $u = 0$ besitzt. Die Resultate in Abschnitt 6 werden zeigen, daß diese Lösung stabil ist in dem Sinn, daß für $\|u_0\|_{H^1(0,\pi)}$ klein genug (4.2) eine eindeutige globale Lösung besitzt, die für $t \to \infty$ gegen die Nullösung konvergiert.

Hier wollen wir Anfangsbedingungen betrachten, die nicht klein sind. Insbesondere nehmen wir an, daß $u_0 \geq 0$ in $(0,\pi)$ und

$$\int_0^\pi u_0(x) \sin x \, dx > 2$$

gelten und daß eine glatte Lösung $u(x,t)$ von (4.2) existiert. Satz 3.3 impliziert dann $u \geq 0$. Definieren wir nun

$$s(t) = \int_0^\pi u(x,t) \sin x \, dx \,,$$

dann gilt

$$s' = -s + \int_0^\pi u^3(x,t) \sin x \, dx \,.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung zeigt man

$$s \leq 2^{2/3} \left(\int_0^\pi u^3 \sin x \, dx \right)^{1/3} \,,$$

woraus $s' \geq -s+s^3/4 = (s+2)(s-2)s/4$, $s(0) > 2$ folgt. Ein Vergleichsprinzip für gewöhnliche Differentialgleichungen impliziert, daß $\lim_{t\to t_0} s(t) = \infty$ für ein $t_0 \leq \ln(s(0)/\sqrt{s(0)^2-4})$. Die Lösung von (4.2) existiert also nur für endliche Zeit.

4.2 Problemstellung

Wir betrachten Anfangs-Randwertprobleme für Systeme von Reaktions-Diffusionsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u + f(t,x,u,\nabla u)\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,t) &= 0\,, \qquad x \in \partial\Omega\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \qquad x \in \Omega\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist. Es gelte $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$, und die Diffusionskoeffizienten seien alle positiv: $D = \mathrm{diag}(D_1,\ldots,D_m)$, $D_i > 0$, $i = 1,\ldots,m$. Annahmen für die Nichtlinearität f und die Anfangsdaten u_0 werden später formuliert.

Betrachten wir zunächst das lineare, entkoppelte Problem mit $f = 0$. Resultate für lineare parabolische Gleichungen [PDG] zeigen, daß dieses Problem für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung besitzt[3], die formal in der Form $u(t) = e^{Lt}u_0$ geschrieben werden kann, wobei der Operator L durch

$$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\,, \qquad Lu := D\Delta u$$

gegeben ist. Der Operator L hat eine kompakte, symmetrische Inverse, woraus man schließen kann, daß es ein (in $L^2(\Omega)$) vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_k,\ k = 1,2,\ldots\}$ von Eigenfunktionen gibt. Es gilt weiters

$$Lu = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k\,, \qquad u \in D(L)\,, \tag{4.4}$$

[3] Wir müßten eigentlich $L^2(\Omega)^m$ schreiben, werden aber im Folgenden bei allen auftretenden Funktionenräumen den Exponenten m vernachlässigen.

wobei die $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ die Eigenwerte von L sind ($\lim_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty$) und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt in $L^2(\Omega)$ bezeichnet wird.

Für reelle Funktionen g, deren Definitionsbereich das Spektrum von L umfaßt, definieren wir den Operator $g(L)$ durch

$$g(L)u = \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k) \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \,, \qquad u \in D(g(L))\,.$$

Der Definitionsbereich von $g(L)$ kann mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung angegeben werden:

$$D(g(L)) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k)^2 \langle u, \varphi_k \rangle^2 < \infty \right\}$$

Insbesondere gilt $D(g(L)) = L^2(\Omega)$ für beschränkte Funktionen g. Die Lösung des linearen, homogenen Anfangswertproblemes ist nun

$$u(t) = e^{Lt} u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \,, \qquad t \geq 0\,.$$

Es gilt $u \in C([0,\infty),\ L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty),\ L^2(\Omega))$, $u(t) \in D(L)$ für $t > 0$ und $du/dt(t) = Lu(t)$ für $t > 0$. Die Familie $\{e^{Lt},\ t \geq 0\}$ von beschränkten, linearen Operatoren kann auch als *stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger* L aufgefaßt werden. Es gelten nämlich die Halbgruppeneigenschaften

$$e^{L(t+s)} = e^{Lt} e^{Ls} \,, \qquad e^{L0} = I\,,$$

die Stetigkeit

$$\lim_{t\to 0} e^{Lt} u = u$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{Lh} - I}{h} u = Lu \,, \qquad u \in D(L)\,.$$

4.3 Abstrakte lineare Probleme

In diesem Abschnitt betrachten wir Anfangswertprobleme für abstrakte gewöhnliche Differentialgleichungen in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Form

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Lu(t) + f(t)\,, \qquad t \in (0,T]\,, \\ u(0) &= u_0\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir nehmen an, der lineare Operator $L :\ D(L) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sei durch (4.4) definiert, wobei $\{\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ ist und

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty$$

gilt. Aus diesen Annahmen ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

Lemma 4.1: *Der Definitionsbereich $D(L)$ ist dicht in $\mathcal{H}$, und L ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis: Für $u \in \mathcal{H}$ sind die Partialsummen der Fourierreihe

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

in $D(L)$, da dies für die φ_k gilt, und u wird durch diese Partialsummen beliebig gut approximiert. Daraus folgt $\overline{D(L)} = \mathcal{H}$.

Sei nun $u_n \to u$ and $Lu_n \to v$. Aus der Konvergenz in $\mathcal{H}$ folgt die Konvergenz der Fourierkoeffizienten. Es gilt also

$$\lambda_k \langle u_n, \varphi_k \rangle \to \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle = \langle v, \varphi_k \rangle \,,$$

woraus $u \in D(L)$ und $Lu = v$ folgt. □

Für die Inhomogenität gelte $f \in C([0,T],\ \mathcal{H})$.

Definition 4.1: *Eine klassische Lösung von (4.5) ist ein $u \in C([0,T],\ \mathcal{H}) \cap C^1((0,T],\ \mathcal{H})$ mit $u(t) \in D(L)$ für $t \in (0,T]$, das (4.5) erfüllt.*

Ein natürlicher Kandidat für die Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel gegeben:

$$u(t) = e^{Lt} u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\, ds \tag{4.6}$$

Diese Funktion wird als *milde Lösung* bezeichnet. Das ist eine Verallgemeinerung des Lösungsbegriffes:

Satz 4.1: *Es gibt höchstens eine klassische Lösung von (4.5). Wenn sie existiert, ist sie gleich der milden Lösung (4.6).*

Beweis: Angenommen, eine klassische Lösung u existiert. Sei $g(s) = e^{L(t-s)} u(s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -Le^{L(t-s)} u(s) + e^{L(t-s)} (Lu(s) + f(s)) \\ &= e^{L(t-s)} f(s)\,. \end{aligned}$$

Integration dieser Gleichung für s von 0 bis t liefert (4.6). □

Im Folgenden geben wir eine hinreichende Bedingung für die Existenz der klassischen Lösung an. Für den Beweis des entsprechenden Satzes benötigen wir ein Hilfsresultat.

Lemma 4.2: *(Beweis siehe [PDG]) Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $c > 0$ mit*

$$\|Le^{Lt}\| \le ct^{-1} e^{(\lambda_1 + \delta)t}\,, \qquad t > 0\,.$$

Die Funktion f heißt *lokal Hölderstetig* in $(0,T]$, wenn jedes $t \in (0,T]$ eine Umgebung besitzt, in der f Hölderstetig ist, d.h. für alle $t \in (0,T]$ existieren $\delta, c, \alpha > 0$ mit

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \le c|t_1 - t_2|^\alpha\,, \qquad t_1,\ t_2 \in (t-\delta, t+\delta)\,,$$

wobei $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm in $\mathcal{H}$ ist.

Satz 4.2: *Sei f lokal Hölderstetig in $(0,T]$. Dann besitzt (4.5) eine klassische Lösung.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t e^{L(t-s)} f(s)\,ds = v_1(t) + v_2(t) \\ &= \int_0^t e^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds + \int_0^t e^{L(t-s)} f(t)\,ds \end{aligned}$$

eine klassische Lösung des Problems mit homogener Anfangsbedingung ist. Dazu zeigen wir zunächst $v(t) \in D(L)$ für $t > 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} Lv_2(t) &= \int_0^t Le^{L(t-s)} f(t)\,ds = -\int_0^t \frac{d}{ds}\left[e^{L(t-s)} f(t)\right] ds \\ &= \left(e^{Lt} - I\right) f(t)\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist also $v_2(t) \in D(L)$ für $t \in [0,T]$ und Lv_2 stetig in t.

Für festes $t > 0$ und $0 < \varepsilon < t$ definieren wir nun

$$v_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} e^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds\,.$$

Offensichtlich gilt $\lim_{\varepsilon \to 0} v_{1,\varepsilon}(t) = v_1(t)$ und $v_{1,\varepsilon}(t) \in D(L)$ mit

$$Lv_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} Le^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds\,.$$

In der folgenden Abschätzung verwenden wir Lemma 4.1 und die lokale Hölderstetigkeit von f:

$$\left\| \int_{t-\varepsilon}^t Le^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds \right\| \le c \int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{c}{\alpha} \varepsilon^\alpha$$

Es folgt die Konvergenz von $Lv_{1,\varepsilon}(t)$ für $\varepsilon \to 0$. Da L abgeschlossen ist, folgt $v_1(t) \in D(L)$ und

$$Lv_1(t) = \int_0^t Le^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds\,,$$

wobei das Integral als uneigentliches Riemann-Integral interpretiert werden kann.

Nun wollen wir noch zeigen, daß die Abbildung $t \mapsto Lv_1(t)$ stetig ist für $t > 0$. Seien $t > 0$ und $h > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Lv_1(t+h) - Lv_1(t) &= \int_t^{t+h} Le^{L(t+h-s)}[f(s) - f(t+h)]ds \\ &\quad + \int_0^t (e^{Lh} - I)Le^{L(t-s)}[f(s) - f(t)]ds \\ &\quad + \int_0^t Le^{L(t+h-s)}[f(t) - f(t+h)]ds = I_1 + I_2 + I_3 \, . \end{aligned}$$

Wir schätzen nun die drei Integrale einzeln ab, indem wir wieder Lemma 4.1 und die lokale Hölderstetigkeit von f verwenden:

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq c\int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1}ds = \frac{c}{\alpha}h^\alpha \, , \\ I_2 &= (e^{Lh} - I)Lv_1(t) \, , \\ \|I_3\| &\leq ch^\alpha \int_0^t (t+h-s)^{-1}ds = ch^\alpha \ln\frac{t+h}{h} \, . \end{aligned}$$

Offensichtlich folgt die Stetigkeit von Lv_1 für $t > 0$. In Summe haben wir bisher gezeigt, daß $v(t) \in D(L)$ und $Lv(t)$ stetig für $t > 0$ gelten.

Aus der Definition von v folgt die Gleichung

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{e^{Lh} - I}{h}v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{L(t+h-s)}f(s)\,ds \, .$$

Unsere bisherigen Resultate implizieren, daß für $t > 0$ der Grenzwert für $h \to 0$ der rechten Seite existiert, gleich $Lv(t) + f(t)$ und damit stetig ist. Daraus folgt die stetige Differenzierbarkeit von v für $t > 0$ und die Differentialgleichung $dv/dt = Lv + f$, womit der Beweis abgeschlossen ist. □

4.4 Abstrakte semilineare Probleme

In diesem Abschnitt werden Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für nichtlineare Probleme der Form

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Lu(t) + f(t, u(t)) \, , \qquad t > 0 \, , \\ u(0) &= u_0 \, , \end{aligned} \tag{4.7}$$

hergeleitet. Für den Operator L machen wir dieselben Annahmen wie im vorigen Abschnitt. Von besonderer Bedeutung werden Potenzen $(-L)^\alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ sein. Wir führen die Bezeichnungen $\mathcal{H}_\alpha := D((-L)^\alpha)$ und $\|u\|_\alpha := \|(-L)^\alpha u\|$ ein. Da $(-L)^\alpha$ wie L ein abgeschlossener Operator ist, ist $\mathcal{H}_\alpha$ bezüglich der Graphnorm $\|u\| + \|u\|_\alpha$ ein Banachraum. Wegen

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \sum_{k=1}^\infty \langle u, \varphi_k\rangle^2 \leq (-\lambda_1)^{-2\alpha}\sum_{k=1}^\infty (-\lambda_k)^{2\alpha}\langle u, \varphi_k\rangle^2 \\ &= (-\lambda_1)^{-2\alpha}\|u\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

ist die Graphnorm äquivalent zur Norm $\|u\|_\alpha$, und wir werden diese als Norm auf $\mathcal{H}_\alpha$ verwenden.

Wir werden die folgenden Hilfsresultate benötigen:

Lemma 4.3: *Sei* $0 \le \alpha \le 1$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|(-L)^\alpha e^{Lt}\| &\le c_\alpha t^{-\alpha}, \qquad t > 0, &(4.8)\\ \|e^{Lt}u - u\| &\le t^\alpha \|(-L)^\alpha u\|, \qquad t \ge 0, \quad u \in \mathcal{H}_\alpha. &(4.9)\end{aligned}$$

Beweis: Es gilt $ex \le e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = -\lambda_k t/\alpha$, so folgt

$$(-\lambda_k)^\alpha e^{\lambda_k t} \le \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha t^{-\alpha},$$

und daraus mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung (4.8).

Weiters gilt $1 - e^{-x} \le x \le x^\alpha$ für $x, \alpha \in [0,1]$ und damit offensichtlich $1 - e^{-x} \le x^\alpha$ für $x \ge 0$, $0 \le \alpha \le 1$. Setzen wir $x = -\lambda_k t$, so folgt

$$1 - e^{\lambda_k t} \le t^\alpha (-\lambda_k)^\alpha,$$

und damit (4.9) wieder mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung. □

Wir werden nun eine Annahme an die Nichtlinearität f in (4.7) formulieren, die hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit ist. Sei dazu $0 \le \alpha < 1$ und U eine offene Teilmenge von $\mathcal{H}_\alpha$.
Annahme (F): Für $f:\ [0,T) \times U \to \mathcal{H}$ gelte, daß für jedes $u_0 \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von u_0 existiert, sowie $\bar t \le T$, $L \ge 0$ und $0 < \vartheta \le 1$, sodaß

$$\|f(t_1,u_1) - f(t_2,u_2)\| \le L\left(|t_1 - t_2|^\vartheta + \|u_1 - u_2\|_\alpha\right), \qquad t_1, t_2 < \bar t, \quad u_1, u_2 \in V.$$

Satz 4.3: *Es gelte die Annahme (F). Dann gibt es für jedes* $u_0 \in U$ *ein* $t_0 > 0$, *sodaß (4.7) eine eindeutige klassische Lösung* $u \in C([0,t_0),\mathcal{H}) \cap C^1((0,t_0),\mathcal{H})$ *hat.*

Beweis: Die Umgebung V in der Annahme (F) schreiben wir als $V = \{u \in \mathcal{H}_\alpha :\ \|u - u_0\|_\alpha \le \delta\}$. Weiters sei

$$B = \max_{0 \le t \le \bar t} \|f(t,u_0)\|.$$

Das Maximum existiert wegen der Stetigkeit von f in $[0,\bar t]$. Nun wählen wir $t_0 > 0$ so, daß

$$\|e^{Lt}(-L)^\alpha u_0 - (-L)^\alpha u_0\| < \frac{\delta}{2}, \qquad 0 \le t < t_0,$$

und

$$t_0 < \min\left\{\bar t,\ \left(\frac{\delta(1-\alpha)}{2c_\alpha(B + \delta L)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}$$

gelten. Dabei ist c_α die Konstante in (4.8). Sei nun

$$\mathcal{X} = C([0,t_0],\mathcal{H})\,, \qquad \|x\|_{\mathcal{X}} = \max_{0\le t\le t_0} \|x(t)\|\,, \quad x\in\mathcal{X}\,,$$

Der nichtlineare Operator $F:\ \mathcal{X}\to\mathcal{X}$ ist definiert durch

$$F(x)(t) = e^{Lt}(-L)^\alpha u_0 + \int_0^t (-L)^\alpha e^{L(t-s)} f(s,(-L)^{-\alpha}x(s))ds\,.$$

Offensichtlich gilt $F(x)(0) = (-L)^\alpha u_0$ für alle $x\in\mathcal{X}$. Wir definieren die Menge

$$S = \{x\in\mathcal{X}:\ x(0) = (-L)^\alpha u_0,\ \|x-(-L)^\alpha u_0\|_{\mathcal{X}} \le \delta\}\,.$$

Man beachte, daß für $x\in S$ und für $t\in[0,t_0]$ $(-L)^{-\alpha}x(t)\in V$ gilt. Sei nun $x\in S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|F(x)(t) &- (-L)^\alpha u_0\| \le \|e^{Lt}(-L)^\alpha u_0 - (-L)^\alpha u_0\|\\
&+ \left\|\int_0^t (-L)^\alpha e^{L(t-s)}\left[f(s,(-L)^{-\alpha}x(s)) - f(s,u_0)\right]ds\right\|\\
&+ \left\|\int_0^t (-L)^\alpha e^{L(t-s)} f(s,u_0)\,ds\right\|\\
&\le \frac{\delta}{2} + \int_0^t c_\alpha (t-s)^{-\alpha} L\delta\,ds + \int_0^t c_\alpha (t-s)^{-\alpha} B\,ds\\
&= \frac{\delta}{2} + c_\alpha(L\delta + B)\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le \delta\,,
\end{aligned}$$

woraus folgt, daß F die Menge S in sich selbst abbildet. Für $x_1,x_2\in S$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|F(x_1)(t) - F(x_2)(t)\|\\
&\le \int_0^t \left\|(-L)^\alpha e^{L(t-s)}\left[f(s,(-L)^{-\alpha}x_1(s)) - f(s,(-L)^{-\alpha}x_2(s))\right]\right\| ds\\
&\le \int_0^t c_\alpha (t-s)^{-\alpha} L\|x_1(s) - x_2(s)\|ds \le c_\alpha L\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}}\\
&\le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}}\,.
\end{aligned}$$

Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes impliziert die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $x\in S$ von F.

Offensichtlich ist $(-L)^{-\alpha}x$ eine milde Lösung von (4.7). Nun ist noch zu zeigen, daß es sich um eine klassische Lösung handelt. Da $x\in\mathcal{X}$ gilt, ist die Abbildung $t\mapsto f(t,(-L)^{-\alpha}x(t))$ stetig in $[0,t_0]$. Wir versuchen nun zu zeigen, daß diese Abbildung auch lokal Hölderstetig in $(0,t_0]$ ist. Sei

$$N = \|f(\cdot,(-L)^{-\alpha}x(\cdot))\|_{\mathcal{X}}\,.$$

Anwendung von Lemma 4.3 liefert für $0<\beta<1-\alpha$ und $0<h<1$

$$\|(e^{Lh} - I)(-L)^\alpha e^{Lt}\| \le h^\beta \|(-L)^{\alpha+\beta} e^{Lt}\| \le c_{\alpha+\beta} h^\beta t^{-(\alpha+\beta)}\,. \tag{4.10}$$

Für $0 < t < t+h \le t_0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\|x(t+h)-x(t)\| &\le \|(e^{Lh}-I)(-L)^\alpha e^{Lt}u_0\| \\
&\quad + \int_0^t \left\|(e^{Lh}-I)(-L)^\alpha e^{L(t-s)} f(s,(-L)^{-\alpha}x(s))\right\| ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} \left\|(-L)^\alpha e^{L(t+h-s)} f(s,(-L)^{-\alpha}x(s))\right\| ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3 \,.
\end{aligned}
$$

Wir schätzen die drei Terme mit Hilfe von (4.10) einzeln ab:

$$
\begin{aligned}
I_1 &\le c_{\alpha+\beta} h^\beta t^{-(\alpha+\beta)} \|u_0\| \le c_1(t) h^\beta \,, \\
I_2 &\le c_{\alpha+\beta} h^\beta N \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+\beta)} ds \le c_2 h^\beta \,, \\
I_3 &\le c_\alpha N \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-\alpha} ds = c_\alpha N \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} < c_3 h^\beta \,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, daß die Abbildung $t \mapsto x(t)$ lokal Hölderstetig ist in $(0,t_0]$. Nun gilt aber

$$
\begin{aligned}
\left\|f(s,(-L)^{-\alpha}x(s)) - f(t,(-L)^{-\alpha}x(t))\right\| &\le L(|s-t|^\vartheta + \|x(s)-x(t)\|) \\
&\le L(|s-t|^\vartheta + c|s-t|^\beta) \,,
\end{aligned}
$$

und daher ist auch die Abbildung $t \mapsto f(t,(-L)^{-\alpha}x(t))$ lokal Hölderstetig in $(0,t_0]$.

Eine Anwendung von Satz 4.2 zeigt, daß das lineare Problem

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) &= Lu(t) + f(t,(-L)^{-\alpha}x(t)) \,, \qquad t > 0 \,, \\
u(0) &= u_0 \,,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

eine eindeutige klassische Lösung u hat, die gegeben ist durch

$$
u(t) = e^{Lt}u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s,(-L)^{-\alpha}x(s)) ds \,.
$$

Anwendung von $(-L)^\alpha$ auf diese Gleichung zeigt, daß $u(t) = (-L)^{-\alpha}x(t)$ gilt, und damit, daß u eine klassische Lösung von (4.7) ist. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von x und aus der Eindeutigkeit der Lösung von (4.11). □

4.5 Existenz und Eindeutigkeit für Reaktions-Diffusionsprobleme

In diesem Abschnitt wird ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für (4.3) bewiesen. Als Hilfsresultat benötigen wir die *Gagliardo-Nirenberg-Ungleichungen*, die eine Erweiterung des Sobolevschen Einbettungssatzes sind. Im Folgenden wird für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $W^{k,p}(\Omega)$, $k \ge 0$, $1 \le p \le \infty$, der Sobolevraum der Funktionen bezeichnet, die zusammen mit ihren distributionellen Ableitungen bis zur Ordnung k in $L^p(\Omega)$ sind. Die Norm in $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{k,p}$.

Lemma 4.4: [4] *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.*
a) Sei $p \geq q > 1$, $p \geq r > 1$, $0 \leq \vartheta \leq 1$ und

$$k - \frac{n}{p} \leq \vartheta \left(j - \frac{n}{q} \right) - (1 - \vartheta) \frac{n}{r} \,.$$

Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|u\|_{k,p} \leq c \|u\|_{j,q}^{\vartheta} \|u\|_{0,r}^{1-\vartheta} \,, \qquad u \in W^{j,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega) \,.$$

b) Sei $q > 1$, $r > 1$, $0 \leq \vartheta \leq 1$ und

$$0 \leq \nu < \vartheta \left(j - \frac{n}{q} \right) - (1 - \vartheta) \frac{n}{r} \,.$$

Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|u\|_{C^\nu(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{j,q}^{\vartheta} \|u\|_{0,r}^{1-\vartheta} \,, \qquad u \in W^{j,q}(\Omega) \cap L^r(\Omega) \,.$$

Weiters brauchen wir ein Regularitätsresultat für Lösungen von elliptischen Randwertproblemen. Für den in Abschnitt 4.2 betrachteten elliptischen Operator L gilt (siehe [PDG]):

Satz 4.4: *Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\|u\|_{2,2} \leq c \|Lu\|_{0,2} \,.$$

Mit $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ erfüllt der Operator L die Bedingungen von Abschnitt 4.3. Insbesondere können wir wie in Abschnitt 4.4 die Potenzen $(-L)^\alpha$ und die Räume $\mathcal{H}_\alpha$ definieren. Im Folgenden zeigen wir ein Einbettungsresultat für diese Räume.

Satz 4.5: *Sei $0 < \alpha \leq 1$.*
a) Sei $k - n/p < 2\alpha - n/2$ und $p \geq 2$. Dann gilt $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$.
b) Sei $0 \leq \nu < 2\alpha - n/2$. Dann gilt $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega})$.

Beweis: a) Eine einfache Rechnung zeigt die Identität

$$(-L)^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{Lt} u \, dt \,.$$

Nun wählen wir ein $\vartheta < \alpha$ mit $k - n/p \leq 2\vartheta - n/2$. Man beachte, daß damit die Bedingungen der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung a) mit $j = q = r = 2$ erfüllt sind. Wir schätzen daher ab:

$$\begin{aligned}
&\|(-L)^{-\alpha} u\|_{k,p} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|e^{Lt} u\|_{k,p} dt \\
&\leq c \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|e^{Lt} u\|_{2,2}^{\vartheta} \|e^{Lt} u\|_{0,2}^{1-\vartheta} dt \leq c \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|L e^{Lt} u\|_{0,2}^{\vartheta} \|e^{Lt} u\|_{0,2}^{1-\vartheta} dt \\
&\leq c \int_0^\infty t^{\alpha-1} t^{-\vartheta} e^{(\lambda_1+\delta)\vartheta t} e^{\lambda_1(1-\vartheta)t} dt \; \|u\|_{0,2} \leq c \|u\|_{0,2} \,.
\end{aligned}$$

[4] Einen Beweis findet man z.B. in: A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Reinhart, and Winston, New York, 1969.

Dabei haben wir für die Abschätzung von Le^{Lt} Lemma 4.2 verwendet. Es folgt, daß jedes $v = (-L)^{-\alpha}u \in \mathcal{H}_\alpha$ auch in $W^{k,p}(\Omega)$ ist, und es gilt

$$\|v\|_{k,p} \le c\|v\|_\alpha .$$

Die Aussage b) beweist man analog. □

Nun beweisen wir ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für den Fall $n \le 3$.

Satz 4.6: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \le 3$, ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Für die Funktion $f:\ [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{3m} \to \mathbb{R}^m$ existiere eine stetige Funktion $\varrho:\ [0,T]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$, monoton wachsend im zweiten Argument, eine Konstante $1 \le \gamma < 3$ und ein $\vartheta \in (0,1]$, sodaß*

$$|f(t,x,u,p)| \le \varrho(t,|u|)(1+|p|^\gamma)\,, \tag{4.12}$$
$$|f(s,x,u,p)-f(t,x,u,p)| \le \varrho(0,|u|)(1+|p|^\gamma)|s-t|^\vartheta\,, \tag{4.13}$$
$$|f(t,x,u,p)-f(t,x,u,q)| \le \varrho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma-1}+|q|^{\gamma-1})|p-q|\,, \tag{4.14}$$
$$|f(t,x,u,p)-f(t,x,v,p)| \le \varrho(t,|u|+|v|)(1+|p|^\gamma)|u-v|\,. \tag{4.15}$$

Weiters sei die Abbildung $x \mapsto f(t,x,u,p)$ meßbar.

Dann gibt es für jedes $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ ein $t_0 > 0$, sodaß (4.3) in $[0,t_0)$ eine eindeutige klassische Lösung besitzt.

Beweis: Satz 4.5 impliziert, daß für $\alpha > 3/4$ $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ gilt und für $1/p > (5-4\alpha)/6$ $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ gilt. Wir wählen α, sodaß

$$\max\left\{\frac{3}{4},\ \frac{5\gamma-3}{4\gamma}\right\} < \alpha < 1\,,$$

woraus

$$\mathcal{H}_\alpha \subset W^{1,2\gamma}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \tag{4.16}$$

folgt.

Um Satz 4.3 anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß die Abbildung F, definiert durch $F(t,u)(x) = f(t,x,u(x),\nabla u(x))$, die Annahme (F) erfüllt. Mit Hilfe von (4.12) und (4.16) folgt für jedes $u \in \mathcal{H}_\alpha$

$$\|F(t,u)\|_{0,2} \le \sqrt{2}\varrho(t,\|u\|_{0,\infty})(\sqrt{\mu(\Omega)}+\|u\|_{1,2\gamma}^\gamma)\,.$$

Das zeigt, daß $F:\ [0,T]\times\mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H} = L^2(\Omega)$ wohldefiniert ist. Analog zeigen wir die Hölderstetigkeit von F als Funktion von t mit Hilfe von (4.13). Es gilt

$$\begin{aligned}\|F(s,u)-F(t,u)\|_{0,2} &\le \sqrt{2}\varrho(0,\|u\|_{0,\infty})(\sqrt{\mu(\Omega)}+\|u\|_{1,2\gamma}^\gamma)|s-t|^\vartheta \\ &\le M(\|u\|_\alpha)|s-t|^\vartheta\,.\end{aligned}$$

Nun ist noch die Lipschitzstetigkeit von F als Funktion von u zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\|F(t,u)-F(t,v)\|_{0,2}^2 &\leq 2\int_\Omega |f(t,x,u,\nabla u)-f(t,x,u,\nabla v)|^2\,dx \\ &\quad +2\int_\Omega |f(t,x,u,\nabla v)-f(t,x,v,\nabla v)|^2\,dx\,.\end{aligned}$$

Wir schätzen die beiden Terme auf der rechten Seite einzeln ab. Aus (4.14) und (4.16) folgt

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega \; & |f(t,x,u,\nabla u)-f(t,x,u,\nabla v)|^2\,dx \\ & \leq c\,\varrho(t,\|u\|_{0,\infty})^2\int_\Omega \left(1+|\nabla u|^{2\gamma-2}+|\nabla v|^{2\gamma-2}\right)|\nabla(u-v)|^2\,dx \\ & \leq c\,\varrho(t,\|u\|_{0,\infty})^2\left(M_1+\|\nabla u\|_{0,2\gamma}^{2\gamma-2}+\|\nabla v\|_{0,2\gamma}^{2\gamma-2}\right)\|\nabla(u-v)\|_{0,2\gamma}^2 \\ & \leq M(\|u\|_\alpha,\|v\|_\alpha)\|u-v\|_{1,2\gamma}^2 \leq M(\|u\|_\alpha,\|v\|_\alpha)\|u-v\|_\alpha^2\,.\end{aligned}$$

Hier wurde für die zweite Ungleichung die Höldersche Ungleichung verwendet. Für die Abschätzung des zweiten Termes verwenden wir (4.15) und (4.16):

$$\begin{aligned}\textstyle\int_\Omega \; & |f(t,x,u,\nabla v)-f(t,x,v,\nabla v)|^2\,dx \\ & \leq c\,\varrho(t,\|u\|_{0,\infty}+\|v\|_{0,\infty})^2\int_\Omega \left(1+|\nabla v|^{2\gamma}\right)|u-v|^2\,dx \\ & \leq c\,\varrho(t,\|u\|_{0,\infty}+\|v\|_{0,\infty})^2\left(1+\|v\|_{1,2\gamma}^{2\gamma}\right)\|u-v\|_{0,\infty}^2 \\ & \leq M(\|u\|_\alpha,\|v\|_\alpha)\|u-v\|_\alpha^2\,.\end{aligned}$$

Damit ist die lokale Lipschitzstetigkeit von F gezeigt, und die Aussage des Satzes ist eine direkte Konsequenz von Satz 4.3. □

Satz 4.6 kann für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ verbessert werden. Insbesondere genügt es in diesen Fällen, wenn die Bedingungen an die Nichtlinearität für ein beliebiges $\gamma \geq 1$ erfüllt sind.

4.6 Glattheit

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß unter milden zusätzlichen Annahmen die Lösung des Reaktions-Diffusionsproblemes (4.3) eine klassische Lösung der partiellen Differentialgleichung ist.

Das erste Resultat bezieht sich auf das abstrakte Problem (4.7). Es liefert Regularität der Ableitung der Lösung nach der Zeit. Dazu benötigen wir als Hilfsresultat eine Verallgemeinerung des Gronwallschen Lemmas.

Lemma 4.5: *Seien $a, b \geq 0$, $0 \leq \alpha, \beta < 1$ und $0 < T < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $M = M(b,\alpha,\beta,T)$, sodaß für jede integrierbare Funktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}$, die*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta}u(s)\,ds$$

für $0 \leq t \leq T$ erfüllt,

$$u(t) \leq aMt^{-\alpha}$$

für $0 \leq t \leq T$ gilt.

Satz 4.7: *Es gelte die Annahme (F) mit $\vartheta = 1$ und $0 \leq \delta < 1$. Dann gilt für die Lösung u von (4.7)*

$$\frac{du}{dt} \in C((0, t_0], \mathcal{H}_\delta)\,.$$

Beweis: Wir verwenden die Notation des Beweises von Satz 4.3 und $g(t) := f(t, u(t))$. Zunächst zeigen wir, daß g für $t > 0$ lokal Lipschitzstetig ist. Sei $0 < \tau \leq t < t + h \leq t_0$. Aus

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (e^{Lh} - I)e^{L(t-\tau)}u(\tau) + \int_\tau^{\tau+h} e^{L(t+h-s)}g(s)\,ds \\ &\quad + \int_\tau^t e^{L(t-s)}[g(s+h) - g(s)]ds \end{aligned}$$

folgt die Abschätzung

$$\|u(t+h) - u(t)\|_\alpha \leq hc(t-\tau)^{-\alpha} + c\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h) - g(s)\|ds\,,$$

und damit unter Verwendung von Annahme (F)

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t)\| &\leq L(h + \|u(t+h) - u(t)\|_\alpha) \\ &\leq hc(t-\tau)^{-\alpha} + c\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h) - g(s)\|ds\,. \end{aligned}$$

Eine Anwendung des Gronwallschen Lemmas 4.5 liefert nun

$$\|g(t+h) - g(t)\| \leq hc(t-\tau)^{-\alpha}\,. \tag{4.17}$$

Aus dem Beweis von Satz 4.2 ergibt sich die Schreibweise

$$\frac{du}{dt}(t) = Le^{L(t-\tau)}u(\tau) + e^{L(t-\tau)}g(t) + \int_\tau^t Le^{L(t-s)}[g(s) - g(t)]ds$$

für die Zeitableitung von u. Daß diese für $t > 0$ in $\mathcal{H}_\delta$ ist, folgt aus einer einfachen Abschätzung unter Verwendung von Lemma 4.3 und (4.17). Schätzt man nun die einzelnen Terme auf der rechten Seite von

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t+h) - \frac{du}{dt}(t) &= (e^{Lh} - I)Le^{L(t-\tau)}u(\tau) + (e^{Lh} - I)e^{L(t-\tau)}g(t+h) \\ &\quad + e^{L(t-\tau)}[g(t+h) - g(t)] + \int_t^{t+h} Le^{L(t+h-s)}[g(s) - g(t+h)]ds \\ &\quad + \int_\tau^t Le^{L(t+h-s)}[g(t) - g(t+h)]ds \\ &\quad + \int_\tau^t (e^{Lh} - I)Le^{L(t-s)}[g(s) - g(t)]ds \end{aligned}$$

(wieder mit Hilfe von Lemma 4.3 und (4.17)) ab, so folgt

$$\left\| \frac{du}{dt}(t+h) - \frac{du}{dt}(t) \right\|_\delta \leq c(t)h^\beta$$

für ein β mit $0 < \beta < 1 - \delta$. □

Das folgende Resultat folgt direkt aus dem Beweis von Satz 4.3.

Lemma 4.6: *Es gelte die Annahme (F). Dann gilt für die Lösung u von (4.7)*

$$u \in C([0, t_0], \mathcal{H}_\alpha)\,.$$

Nun wenden wir uns dem Reaktions-Diffusionsproblem (4.3) zu. Als Hilfsresultat werden wir eine Verallgemeinerung des Regularitätsresultates Satz 4.4 benötigen. Dazu führen wir Räume von Hölderstetigen Funktionen ein: Sei $0 < \nu \leq 1$ und $C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$ die Menge aller Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung m Hölderstetig mit Exponent ν in $\overline{\Omega}$ sind. Mit der Norm

$$\|u\|_{C^{m,\nu}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\boldsymbol{k}| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla^{\boldsymbol{k}} u(x)| + \sum_{|\boldsymbol{k}| = m} \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|\nabla^{\boldsymbol{k}} u(x) - \nabla^{\boldsymbol{k}} u(y)|}{|x-y|^\nu}$$

ist $C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$ ein Banachraum.

Satz 4.8: *Sei der elliptische Operator L wie in Abschnitt 4.2 und $p \geq 2$, $0 < \nu \leq 1$. Dann gibt es eine Konstante c mit*

$$\|u\|_{2,p} \leq c\|Lu\|_{0,p} \qquad \textit{und} \qquad \|u\|_{C^{2,\nu}(\overline{\Omega})} \leq c\|Lu\|_{C^{0,\nu}(\overline{\Omega})}\,.$$

Satz 4.9: *Es gelten die Annahmen von Satz 4.6 mit $\vartheta = 1$. Dann gilt für die Lösung $u : \overline{\Omega} \times [0, t_0] \to \mathbb{R}^m$ von (4.3) $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, t_0])$. Außerdem ist u in $\overline{\Omega} \times (0, t_0]$ stetig differenzierbar nach der Zeit und zweimal stetig differenzierbar nach den Ortsvariablen.*

Beweis: Aus $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ und aus Lemma 4.6 folgt die Stetigkeit von u in $\overline{\Omega} \times [0, t_0]$. Ebenso folgt aus Satz 4.7 die Stetigkeit von $\partial u / \partial t$ in $\overline{\Omega} \times (0, t_0]$. Weiters gilt für $t > 0$, daß $u(t)$ in $\mathcal{H}_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, und damit ∇u in $H^1(\Omega)$ ist.

Nun gehen wir rekursiv vor: Aus $\nabla u \in W^{1,p_n}(\Omega)$ folgt mit Hilfe von Lemma 4.4 a) $\nabla u \in L^{3p_n/(3-p_n)}(\Omega)$, und daraus $Lu = du/dt - g(t) \in L^{p_{n+1}}(\Omega)$ mit

$$p_{n+1} = \frac{3p_n}{\gamma(3-p_n)}\,, \quad p_0 = 2\,.$$

Wegen Satz 4.8 gilt daher $u \in W^{2,p_{n+1}}(\Omega)$, und damit $\nabla u \in W^{1,p_{n+1}}(\Omega)$. Man sieht leicht, daß dabei nach endlich vielen Schritten $p_n > 3$ erreicht wird, woraus mit Lemma 4.4 b) die Hölderstetigkeit von ∇u folgt. Weiters folgt aus Satz 4.7 auch die Hölderstetigkeit von du/dt, und daher die Hölderstetigkeit von Lu. Satz 4.8 impliziert $u(t) \in C^2(\overline{\Omega})$ für $t > 0$. □

4.7 Globale Lösungen

Eine wichtige Konsequenz des zuletzt bewiesenen Satzes ist, daß die Resultate von Abschnitt 3 auf die hier konstruierten Lösungen angewendet werden können. Um das Langzeitverhalten dieser Lösungen studieren zu können, benötigen wir noch eine Methode, um deren globale Existenz (d.h. für alle $t > 0$) zu zeigen.

Satz 4.10: *Es gelte die Annahme (F) mit $T = \infty$ und $U = \mathcal{H}_\alpha$. Sei u eine Lösung von (4.7), sodaß*

$$\|f(t, u(t))\| \leq K(t)(1 + \|u(t)\|_\alpha)$$

für alle t, für die die Lösung existiert, wobei $K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. Dann existiert die Lösung von (4.7) für alle $t > 0$.

Beweis: Sei $0 \leq \tau \leq t$. Die Darstellung

$$u(\tau) = e^{L\tau} u_0 + \int_0^\tau e^{L(\tau - s)} f(s, u(s)) ds$$

der Lösung impliziert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_\alpha &\leq \|u_0\|_\alpha + \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} K(s) ds + \max_{0 \leq s \leq t} K(s) \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} \|u(s)\|_\alpha \, ds \\ &\leq M_1(t) + M_2(t) \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} \|u(s)\|_\alpha \, ds \,, \end{aligned}$$

woraus mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas 4.5 die Existenz einer auf $[0, \infty)$ stetigen Funktion $M(t)$ folgt, sodaß

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M(t)$$

gilt für alle t, für die die Lösung u existiert.

Offensichtlich ist das maximale Zeitintervall, in dem die Lösung existiert, offen. Existiert nämlich die Lösung bis zu einem Zeitpunkt $t_0 > 0$, dann gibt es nach Satz 4.3 ein auf t_0 folgendes Zeitintervall positiver Länge, in das die Lösung fortgesetzt werden kann.

Nehmen wir nun an, das maximale Existenzintervall der Lösung wäre beschränkt, d.h. es existiert $t_1 < \infty$, sodaß die Lösung in $[0, t_1)$ existiert, aber nicht in $[0, t_1]$.

Für $\alpha \leq \beta < 1$ zeigt man leicht

$$\|u(t)\|_\beta \leq K \,, \qquad \text{für } 0 < t_2 \leq t < t_1 \,.$$

Für $t_2 \leq t < t + h < t_1$ gilt daher

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_\alpha &\leq \|(e^{Lh} - I) u(t)\|_\alpha + \int_t^{t+h} \|e^{L(t-s)} f(s, u(s))\|_\alpha \, ds \\ &\leq K h^{\beta - \alpha} + c_\alpha \int_t^{t+h} (t - s)^{-\alpha} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq c h^{\beta - \alpha} \,. \end{aligned}$$

Die Lösung u ist also als Funktion von $[t_2, t_1)$ nach $\mathcal{H}_\alpha$ gleichmäßig stetig. Es gibt daher eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $[t_2, t_1]$. Diese ist offensichtlich auf $[t_2, t_1]$ eine milde Lösung. Wie im Beweis von Satz 4.3 zeigt man nun, daß sie auf diesem Intervall auch eine klassische Lösung ist. Das ist ein Widerspruch zu obiger Annahme, daß das maximale Existenzintervall beschränkt ist. □

Das Resultat impliziert globale Existenz für höchstens linear wachsende Nichtlinearitäten. Man beachte, daß diese Eigenschaft nur entlang der Lösung gelten muß.

4.8 Stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit von den Daten

Wir betrachten abstrakte Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Lu(t) + f(t, u(t), \lambda)\,, \\ u(0) &= u_0\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei $\lambda \in \tilde{U}$ ein Parameter ist. Die Menge $\tilde{U}$ sei eine offene Teilmenge des Banachraumes $\mathcal{B}$. Für den Operator L machen wir die selben Annahmen wie bisher. Weiters sei U eine offene Teilmenge von $\mathcal{H}_\alpha$ mit $0 \le \alpha < 1$.

Satz 4.11: *Sei $f : [0,T] \times U \times \tilde{U} \to \mathcal{H}$ hölderstetig als Funktion von t, sowie r-mal stetig differenzierbar als Funktion von u und λ. Dann gibt es für jedes $(\overline{u}_0, \overline{\lambda}) \in U \times \tilde{U}$ eine Umgebung $V \times \tilde{V}$ und ein $t_0 > 0$, sodaß (4.18) für alle $(u_0, \lambda) \in V \times \tilde{V}$ im Intervall $[0, t_0]$ eine eindeutige Lösung hat. Diese ist als Abbildung von $V \times \tilde{V}$ nach $C([0, t_0], \mathcal{H}_\alpha)$ r-mal stetig differenzierbar.*

Beweis: Wir schreiben (4.18) in der Form $u - F(u, u_0, \lambda) = 0$ mit

$$F(u, u_0, \lambda)(t) = e^{Lt} u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s, u(s), \lambda) ds\,.$$

Man zeigt leicht, daß $F : U \times U \times \tilde{U} \to \mathcal{H}_\alpha$ r-mal stetig differenzierbar ist.

Für die Parameterwerte $\overline{u}_0$ und $\overline{\lambda}$ existiert nach Satz 4.3 die Lösung $\overline{u} \in C([0, t_0], \mathcal{H}_\alpha)$, d.h. es gilt $\overline{u} - F(\overline{u}, \overline{u}_0, \overline{\lambda}) = 0$. Analog zum Existenzbeweis zeigt man, daß die Abbildungsnorm von $\frac{\partial F}{\partial u}(\overline{u}, \overline{u}_0, \overline{\lambda})$ kleiner als 1 ist. Damit ist die lineare Abbildung $I - \frac{\partial F}{\partial u}(\overline{u}, \overline{u}_0, \overline{\lambda})$ beschränkt invertierbar, und die Aussagen des Satzes folgen aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen. □

Betrachten wir als Anwendung das Chaffee-Infante-Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + \lambda u - u^3\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad t > 0\,, \\ u &= 0\,, \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \qquad u(x, 0) = u_0\,. \end{aligned}$$

Aus Satz 4.6 folgt die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung für alle $u_0 \in \mathcal{H}_\alpha$, $3/4 < \alpha < 1$. Satz 4.9 liefert genügend Glattheit, daß die Resultate aus Abschnitt 3 angewendet werden können. Wegen $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ sind die Anfangsdaten und damit auch die Lösung (solange sie existiert) beschränkt. Nun kann Satz 4.10 angewendet werden, der globale Existenz der Lösung garantiert. Aus Satz 4.11 folgt, daß die Lösung glatt von den Anfangsdaten und vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt. Kombination dieser Resultate zeigt, daß für festes λ durch das Chaffee-Infante-Problem ein dynamisches System in $\mathcal{H}_\alpha$ bestimmt wird.

5 Stationäre Punkte, Stabilität

Definition 5.1: *Sei C offene Teilmenge eines Banachraumes $\mathcal{B}$. Sei $U_t(u) \in C$ für $u \in C$ und $0 \leq t < T(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Weiters gelte:*

1. *Für $u_n \to u_0$ und $0 \leq t < T(u_0)$ gilt $t < T(u_n)$ ab einem bestimmten Index, und $U_t(u_n) \to U_t(u_0)$.*
2. *Für alle $u \in C$ ist die Abbildung $t \mapsto U_t(u)$ stetig in $[0, T(u))$.*
3. *U_0 ist die Identität auf C.*
4. *Für $s, t \geq 0$ und $t + s < T(u)$ gilt $U_t(U_s(u)) = U_{t+s}(u)$.*

Dann heißt die Familie $\{U_t; T\}$ ein lokales dynamisches System in C. Gilt $T(u) = \infty$ für alle $u \in C$, dann heißt $\{U_t\}$ dynamisches System in C.

Ein einfaches Beispiel für ein dynamisches System in $\mathcal{H}$ ist die stark stetige Halbgruppe $\{e^{Lt}\}$. Die Resultate von Abschnitt 4 implizieren, daß durch Lösen des semilinearen Problems (4.7) ein lokales dynamisches System in $U \subset \mathcal{H}_\alpha$ bestimmt wird, wenn die Nichtlinearität unabhängig von t ist und die Annahme (F) erfüllt. (Lokale) Dynamische Systeme werden also durch *autonome Differentialgleichungen* bestimmt.

Definition 5.2: *Sei $\{U_t; T\}$ ein lokales dynamisches System in C. Dann heißt $u \in C$ stationärer Punkt, wenn $T(u) = \infty$ und $U_t(u) = u$ für alle $t \geq 0$ gilt.*

Zur Bestimmung von stationären Punkten von Reaktions-Diffusionsproblemen sind Randwertprobleme für semilineare elliptische Gleichungen zu lösen.

Als Beispiel betrachten wir das eindimensionale Chaffee-Infante-Problem. Stationäre Punkte sind Lösungen des Randwertproblems

$$0 = u'' + \lambda u - u^3\,, \qquad u(0) = u(\pi) = 0\,. \tag{5.1}$$

Offensichtlich hat dieses Problem die triviale Lösung $u = 0$. Um weitere Lösungen zu finden, studieren wir zunächst das Phasenporträt der Differentialgleichung, d.h. die Lösungskurven in der (u, u')-Ebene. Dazu multiplizieren wir die Differentialgleichung mit u' und integrieren:

$$u' = \pm\sqrt{c - \lambda u^2 + u^4/2}\,,$$

mit der Integrationskonstanten c. Zwei qualitativ unterschiedliche Fälle treten auf. Für $\lambda \leq 0$ hat die Differentialgleichung in (5.1) nur $u = 0$ als stationären Punkt (Man unterscheide zwischen stationären Punkten des Chaffee-Infante-Problems und stationären Punkten der gewöhnlichen Differentialgleichung in (5.1)!), während für $\lambda > 0$ drei stationäre Punkte ($u = 0, \pm\sqrt{\lambda}$) existieren. Für $\lambda > 0$ gibt es eine Schar von periodischen Lösungen, die durch $(u, u') = (u_0, 0)$ mit $0 < u_0 < \sqrt{\lambda}$ gehen. Um nichttriviale Lösungen von (5.1) konstruieren zu können, benötigt man Lösungskurven, die die u'-Achse mindestens zweimal schneiden. Offensichtlich sind die eben erwähnten periodischen Lösungen die einzigen Lösungskurven, die diese Bedingung erfüllen.

Eine Lösung, die von der u'-Achse ausgehend zu dieser zurückkehrt, ist dann eine Lösung von (5.1), wenn sie dabei ein x-Intervall der Länge π zurücklegt. Für die Periode der durch den Punkt $(u_0, 0)$ gehenden Lösung erhalten wir die Formel

$$P(u_0) = 4\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(\lambda - u_0^2(1+s^2)/2)}}, \qquad 0 < u_0 < \sqrt{\lambda}\,.$$

Offensichtlich ist P eine monoton wachsende Funktion von u_0. Es gilt $P(0) = 2\pi/\sqrt{\lambda}$ und $P(\sqrt{\lambda}) = \infty$.

Wenn nun zum Beispiel die halbe Periodenlänge gleich π ist, dann gibt es zwei Lösungen von (5.1), die der linken bzw. der rechten Hälfte der entsprechenden Lösungskurve entsprechen. Lösungen können aber auch konstruiert werden, indem man den Ursprung entlang einer Lösungskurve ein- oder mehrmals umrundet. Man sieht leicht, daß es zu jedem $k \in \mathbb{N}$, für das ein $0 < u_0 < \sqrt{\lambda}$ mit $kP(u_0)/2 = \pi$ existiert, ein Paar von Lösungen gibt. Aufgrund der Eigenschaften von $P(u_0)$ ist das dann der Fall, wenn $\sqrt{\lambda} > k$ gilt.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß (5.1) für $\lambda \leq 1$ nur die triviale Lösung hat, während es für $k^2 < \lambda \leq (k+1)^2$ genau $2k+1$ Lösungen gibt.

Definition 5.3: *Sei $\{U_t; T\}$ ein lokales dynamisches System in C und $u \in C$ ein stationärer Punkt. Dieser heißt stabil, wenn $\{U_t\}$ in einer Umgebung von u ein dynamisches System ist und wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodaß aus $\|u - v\| < \delta(\varepsilon)$ die Ungleichung $\|u - U_t(v)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ folgt.*

Ein stationärer Punkt, der nicht stabil ist, heißt instabil.

Ein stabiler stationärer Punkt u heißt asymptotisch stabil, wenn es eine Umgebung $V \subset C$ von u gibt, sodaß

$$\lim_{t\to\infty} \|u - U_t(v)\| = 0 \quad \forall\, v \in V.$$

Als Beispiel betrachten wir das durch die Differentialgleichung in (5.1) definierte, lokale dynamische System im $\mathbb{R}^2$ (dem (u, u')-Raum). Offensichtlich ist der Ursprung im Fall $\lambda \leq 0$ ein instabiler, und im Fall $\lambda > 0$ ein stabiler, aber nicht asymptotisch stabiler stationärer Punkt.

5.1 Lyapunovfunktionen

Definition 5.4: *Sei $\{U_t\}$ ein dynamisches System in C und $V : C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodaß*

$$\dot{V}(u) := \limsup_{t\to 0+} \frac{V(U_t(u)) - V(u)}{t} \leq 0$$

für alle $u \in C$ gilt. Dann heißt V Lyapunovfunktion.

Satz 5.1: *Sei $\{U_t\}$ ein dynamisches System in C und $0 \in C$ ein stationärer Punkt. Sei V eine Lyapunovfunktion mit $V(0) = 0$ und $V(u) \geq c(\|u\|)$, $u \in C$, wobei c eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $c(0) = 0$ ist. Dann ist 0 stabil.*

Gelte zusätzlich $\dot{V}(u) \leq -c_1(\|u\|)$, wobei c_1 dieselben Eigenschaften wie c hat. Dann ist 0 global asymptotisch stabil in C, d.h. es gilt

$$\lim_{t\to\infty} U_t(u) = 0 \qquad \forall\, u \in C\,.$$

Beweis: Für $r > 0$ sei $S_r = \{u \in C : V(u) < r\}$. Da $V(U_t(u))$ für alle $u \in C$ eine monoton fallende Funktion von t ist, gilt $U_t(u) \in S_r$ für alle $t \geq 0$ und $u \in S_r$.

Wegen der Stetigkeit von V existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, sodaß $u \in S_{c(\varepsilon)}$ für alle u mit $\|u\| < \delta(\varepsilon)$. Für solche u gilt daher

$$c(\|U_t(u)\|) \leq V(U_t(u)) < c(\varepsilon) \qquad \text{für alle } t \geq 0\,,$$

und damit $\|U_t(u)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$. Also ist 0 stabil.

Gelte nun die zusätzliche Annahme. Für die monoton fallende, durch 0 nach unten beschränkte Funktion $V(U_t(u))$ setzen wir $l = \lim_{t\to\infty} V(U_t(u))$. Ist $l > 0$, dann ist $\inf_{t\geq 0} \|U_t(u)\|$ positiv und damit $\sup_{t\geq 0} \dot{V}(U_t(u)) \leq -m$ für ein positives m. Das steht allerdings im Widerspruch zu $V(U_t(u)) \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Daher konvergieren sowohl $V(U_t(u))$ als auch $\|U_t(u)\|$ für $t \to \infty$ gegen 0. □

Als Anwendung betrachten wir wieder das eindimensionale Chaffee-Infante-Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u - u^3\,, \qquad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,, && (5.2)\\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0\,, && (5.3) \end{aligned}$$

mit $\lambda < 0$. Da die Raumdimension 1 ist und die Nichtlinearität unabhängig von $\partial u/\partial x$ ist, kann man den Beweis von Satz 4.6 für diesen Fall mit $\alpha = 1/2$ durchführen. Die Resultate von Abschnitt 3 und 4 zeigen damit, daß durch (5.2) ein dynamisches System in $\mathcal{H}_{1/2} = H_0^1((0,\pi))$ definiert wird. Außerdem haben wir in Abschnitt 3 gezeigt, daß für $\lambda < 0$ Lösungen von (5.2) für $t \to \infty$ bezüglich der sup-Norm gegen 0 (den einzigen stationären Punkt) konvergieren. Nun werden wir dieses Resultat etwas verstärken und Konvergenz bezüglich der $H_0^1((0,\pi))$-Norm beweisen.

Definiert man

$$V(u) = \int_0^\pi \left(\frac{u_x^2}{2} - \lambda \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} \right) dx\,, \tag{5.4}$$

so zeigt man leicht

$$\dot{V}(u) = -\int_0^\pi (u_{xx} + \lambda u - u^3)^2 dx\,,$$

und damit, daß V eine Lyapunovfunktion ist.

Wir verwenden $\|u_x\|_{0,2}$ als Norm in $H_0^1((0,\pi))$. Es gilt

$$V(u) \geq \frac{1}{2}\|u_x\|_{0,2}^2$$

und

$$\begin{aligned} \dot{V}(u) &= -\int_0^\pi (u_{xx}^2 + \lambda^2 u^2 + u^6 - 2\lambda u_x^2 + 6u^2 u_x^2 - 2\lambda u^4) dx \\ &\leq -(-2\lambda)\|u_x\|_{0,2}^2\,. \end{aligned}$$

Aus dem obigen Satz folgt für $\lambda < 0$ die globale asymptotische Stabilität von 0, d.h. die Konvergenz für $t \to \infty$ aller Lösungen gegen 0 bezüglich der Norm $\|u_x\|_{0,2}$.

5.2 Das Invarianzprinzip

Die Lyapunovfunktion (5.4) für das Chaffee-Infante-Problem erfüllt nur für $\lambda \leq 0$ die Bedingungen von Satz 5.1. Nun entwickeln wir eine Methode, die mit schwächeren Annahmen auskommt.

Definition 5.5: *Sei $\{U_t\}$ ein dynamisches System in C. Eine Menge $K \subset C$ heißt invariant, wenn es für jedes $u_0 \in K$ eine stetige Kurve $u : \mathbb{R} \to K$ mit $u(0) = u_0$ und*

$$U_t(u(\tau)) = u(t+\tau)\,, \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}\,, \quad t \geq 0\,,$$

gibt, d.h. wenn durch jeden Punkt in K eine ganz in K liegende, für alle (positiven und negativen) Zeiten existierende Trajektorie des dynamischen Systems geht.

Definition 5.6: *Sei $\{U_t\}$ ein dynamisches System in C. Dann ist der ω-limit $\omega(u_0)$ eines Punktes $u_0 \in C$ definiert durch*

$$\omega(u_0) := \{u \in C : \text{ es existiert } t_n \to \infty \text{ mit } U_{t_n}(u_0) \to u\}\,.$$

Satz 5.2: *Sei $\{U_t\}$ ein dynamisches System in C. Angenommen, die Menge $\{U_t(u) : t \geq t_0\}$ für $u \in C$ und $t_0 \geq 0$ liegt in einer kompakten Teilmenge von C. Dann ist $\omega(u)$ nichtleer, kompakt, invariant und zusammenhängend. Weiters gilt*

$$\mathit{dist}(U_t(u), \omega(u)) := \inf_{v \in \omega(u)} \|U_t(u) - v\| \to 0 \quad \textit{für } t \to \infty \,.$$

Beweis: Man zeigt leicht

$$\omega(u) = \bigcap_{\tau \geq t_0} \overline{\{U_t(u) : t \geq \tau\}} \,.$$

Als Durchschnitt von nichtleeren, kompakten Mengen ist $\omega(u)$ daher nichtleer und kompakt.

Sei nun $v_0 \in \omega(u)$. Dann gibt es eine Folge $t_n \to \infty$ mit $U_{t_n}(u) \to v_0$. Wegen der Kompaktheit hat diese eine Teilfolge $t_{n,1}$ mit $U_{t_{n,1}-1}(u) \to v_1$. Rekursiv wählen wir weitere Teilfolgen $t_{n,j}$ mit $U_{t_{n,j}-j}(u) \to v_j$. Für die Diagonalfolge $\tau_n = t_{n,n}$ gilt dann $U_{\tau_n - j}(u) \to v_j$ für alle $j = 0, 1, \ldots$

Nun definieren wir $v(t) = U_{t+j}(v_j)$ für $t \geq -j$. Diese Definition ist konsistent wegen $U_{t+k}(v_k) = U_{t+j}(v_j)$ für $t \geq -k, -j$. Die Kurve $v(t)$ erfüllt die Bedingungen der Definition von Invarianz.

Wenn $\omega(u)$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es zwei disjunkte, kompakte Mengen A und B mit $\omega(u) = A \cup B$ und $\mathrm{dist}(A, B) = 3\delta > 0$. Dann gibt es auch Folgen $t_n, t_n' \to \infty$ mit $\mathrm{dist}(U_{t_n}(u), A) < \delta$, $\mathrm{dist}(U_{t_n'}(u), B) < \delta$ für n groß genug. Für diese n gibt es wegen der Stetigkeit von $U_t(u)$ ein t_n'' zwischen t_n und t_n' mit

$$\mathrm{dist}(U_{t_n''}(u), \omega(u)) > \delta \,. \tag{5.5}$$

Die Folge $U_{t_n''}(u)$ liegt in einer kompakten Menge und hat daher eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in $\omega(u)$ liegt. Das ist ein Widerspruch zu (5.5), womit bewiesen ist, daß $\omega(u)$ zusammenhängend ist.

Zum Beweis der letzten Aussage nehmen wir an, es gäbe eine Folge $t_n \to \infty$ mit $\mathrm{dist}(U_{t_n}(u), \omega(u)) \geq \delta > 0$. Dann gibt es wegen der Kompaktheit eine konvergente Teilfolge von $U_{t_n}(u)$, deren Grenzwert in $\omega(u)$ liegen müßte. Damit ist $\mathrm{dist}(U_t(u), \omega(u)) \to 0$ für $t \to \infty$ bewiesen. □

Satz 5.3: *Zusätzlich zu den Annahmen des vorhergehenden Satzes sei V eine Lyapunovfunktion in C. Dann gilt $\omega(u) \subset \{v \in C : \dot{V}(v) = 0\}$.*

Beweis: Die Abbildung $t \mapsto V(U_t(u))$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Sei $l = \lim_{t\to\infty} V(U_t(u))$. Für $v \in \omega(u)$ gilt daher $V(v) = l$ und damit auch $V(U_t(v)) = l$. Daraus folgt $\dot{V}(v) = 0$. □

Um diese Resultate anwenden zu können, benötigen wir Aussagen über die Kompaktheit von Trajektorien. Dazu zunächst ein Hilfsresultat.

Lemma 5.1: *Sei der Operator L wie in Abschnitt 4.2. Ist die Abbildung L^{-1} kompakt, dann ist für $\alpha > \beta \geq 0$ die Einbettung $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta$ kompakt, d.h. beschränkte Mengen in $\mathcal{H}_\alpha$ sind präkompakt in $\mathcal{H}_\beta$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $(-L)^{-\delta}$ für $\delta > 0$ ein kompakter Operator ist. Sei $u_n \in \mathcal{H}$ beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge (ebenfalls mit u_n bezeichnet), sodaß $(-L)^{-1}u_n \to v$. Daraus folgt die Konvergenz der entsprechenden Fourierkoeffizienten: $\langle u_n, \varphi_k\rangle \to -\lambda_k\langle v, \varphi_k\rangle$, und damit auch

$$(-\lambda_k)^{-\delta}\langle u_n, \varphi_k\rangle \to (-\lambda_k)^{1-\delta}\langle v, \varphi_k\rangle\,.$$

Der Lebesguesche Satz über die majorisierte Konvergenz impliziert $(-L)^{-\delta}u_n \to (-L)^{1-\delta}v$, und damit die Kompaktheit von $(-L)^{-\delta}$.

Sei nun u_n beschränkt in $\mathcal{H}_\alpha$. Dann ist $(-L)^\alpha u_n$ beschränkt in $\mathcal{H}$, und $(-L)^\beta u_n = (-L)^{\beta-\alpha}(-L)^\alpha u_n$ besitzt eine gegen $v \in \mathcal{H}$ konvergente Teilfolge. Sei $w = (-L)^{-\beta}v$, dann konvergiert u_n in $\mathcal{H}_\beta$ gegen w, und der Beweis ist abgeschlossen. □

Als weiteres Hilfsresultat verwenden wir eine Erweiterung der Lemmata 4.2 und 4.3.

Lemma 5.2: *Sei der Operator L wie in Abschnitt 4.2. Dann gilt für $0 \le \alpha \le 1$, $\delta > 0$*

$$\|(-L)^\alpha e^{Lt}\| \le ct^{-\alpha}e^{(\lambda_1+\delta)t}\,, \qquad t > 0\,.$$

Satz 5.4: *Sei $u(t)$ eine globale Lösung von (4.7), und es gelte $\|f(t,u(t))\| \le M$. Dann ist für jedes $t_0 > 0$ die Menge $\{u(t) : t \ge t_0\}$ präkompakt in $\mathcal{H}_\alpha$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Menge $\{u(t) : t \ge t_0\}$ beschränkt in $\mathcal{H}_\beta$ für ein $\beta > \alpha$ ist. Aus der Variation-der-Konstanten-Formel und obigem Lemma folgt aber

$$\|u(t)\|_\beta \le ct^{-\beta} + cM\int_0^t (t-s)^{-\beta}e^{(\lambda_1+\delta)(t-s)}ds\,,$$

was für $\delta < -\lambda_1$ beschränkt in $t_1 \le t < \infty$ ist. □

Für das eindimensionale Chaffee-Infante-Problem und die in Abschnitt 5.1 angegebene Lyapunovfunktion gilt $\dot V(u) = 0$ genau dann, wenn u ein stationärer Punkt ist. Da alle Lösungen beschränkt (und damit präkompakt) sind, besteht ihr ω-Limit aus jeweils einem stationären Punkt. Das impliziert, daß alle Lösungen für $t \to \infty$ gegen jeweils einen stationären Punkt konvergieren. Für $\lambda \le 1$ gibt es aber nur einen stationären Punkt, nämlich $u = 0$. Dieser ist also nicht nur für $\lambda < 0$, wie bisher gezeigt, sondern für $\lambda \le 1$ global asymptotisch stabil.

5.3 Stabilität über die Linearisierung

In diesem Abschnitt werden Resultate aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen verallgemeinert, die es gestatten, von der Stabilität bzw. Instabilität linearisierter Probleme auf das zugrundeliegende nichtlineare Problem zu schließen.

Betrachten wir das Chaffee-Infante-Problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \lambda u - u^3\,, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0\,. \end{aligned}$$

Die Linearisierung an der trivialen stationären Lösung besteht offensichtlich darin, den Term u^3 wegzulassen. Das Eigenwertproblem

$$\varphi'' + \lambda\varphi = \mu\varphi\,,$$
$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\,,$$

hat die Eigenwerte $\mu_k = \lambda - k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, d.h. für $\lambda < 1$ sind alle Eigenwerte negativ, und für $\lambda > 1$ gibt es auch positive Eigenwerte. Das bedeutet, daß für das linearisierte Problem die triviale stationäre Lösung für $\lambda < 1$ asymptotisch stabil und für $\lambda > 1$ instabil ist.

Wir wollen nun auf dem Niveau abstrakter Gleichungen einen Rahmen schaffen, der es gestattet, Stabilitätsaussagen für nichtlineare Probleme herzuleiten. Für das abstrakte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Lu + f(u)\,, \\ u(0) &= u_0\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

nehmen wir an, daß $u = 0$ ein stationärer Punkt ist (d.h. $f(0) = 0$) und daß die Linearisierung der rechten Seite der Differentialgleichung durch Lu gegeben ist, d.h. $\|f(u)\| = o(\|u\|_\alpha)$. Diese letzte Annahme werden wir in der folgenden Form benötigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varrho(\varepsilon) > 0$, sodaß

$$\|f(u)\| \le \varepsilon\|u\|_\alpha \qquad \text{für } \|u\|_\alpha \le \varrho\,.$$

Weiters nehmen wir an, daß die Nichtlinearität f die Annahme (F) erfüllt. Der lineare Operator L sei wie in Abschnitt 4.2.

Satz 5.5: *Seien alle Eigenwerte von L negativ. Dann ist 0 ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt von (5.6).*

Beweis: Für die (zumindest lokal existierende, eindeutige) Lösung von (5.6) gilt

$$u(t) = e^{Lt}u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(u(s))ds\,.$$

Für ein positives ε nehmen wir nun an, daß $\|u_0\|_\alpha \le \varrho(\varepsilon)/2$ und $\|u(s)\|_\alpha \le \varrho(\varepsilon)$, $0 \le s < t$, gilt. Mit Hilfe von Lemma 5.2 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\le \|u_0\|_\alpha + c\int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{(\lambda_1+\delta)(t-s)} \|f(u(s))\|ds \\ &\le \frac{\varrho}{2} + \overline{c}\varepsilon\varrho = \varrho\,, \end{aligned}$$

wenn wir $\varepsilon = 1/(2\overline{c})$ wählen. Für $\|u_0\|_\alpha \le \varrho(1/(2\overline{c}))/2$ gilt also $\|u(t)\|_\alpha \le \varrho$ auf dem gesamten Existenzintervall, woraus mit Satz 4.10 die globale Existenz der Lösung folgt.

Sei nun $0 > -\beta > \lambda_1 + \delta$. Dann gilt ähnlich zu obigem

$$\|u(t)\|_\alpha e^{\beta t} \le \|u_0\|_\alpha + c\int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{(\beta+\lambda_1+\delta)(t-s)} \varepsilon\|u(s)\|_\alpha e^{\beta s} ds\,,$$

solange $\|u(t)\|_\alpha$ klein genug bleibt. Für

$$z(t) = \sup_{0\le s\le t} \|u(s)\|_\alpha e^{\beta s}$$

folgt daraus $z(t) \le \|u_0\|_\alpha + \tilde{c}\varepsilon z(t)$ und mit der Wahl $\varepsilon = 1/(2\tilde{c})$ die Abschätzung $z(t) \le 2\|u_0\|_\alpha$. Nach der Definition von $z(t)$ impliziert das exponentielles Abklingen der Lösung, womit der Beweis des Satzes vollständig ist. $\square$

6 Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir werden uns mit zwei Arten von Mannigfaltigkeiten beschäftigen: Solche mit endlicher Dimension und solche mit endlicher Kodimension.

Definition 6.1: *a) Eine Teilmenge M eines Banachraumes $\mathcal{B}$ heißt <u>C^1-Mannigfaltigkeit</u> mit <u>Dimension $k \in \mathbb{N}$</u>, wenn es für jedes $u \in M$ eine Umgebung U, eine offene Menge $P \subset \mathbb{R}^k$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f:\ P \to \mathcal{B}$ gibt, sodaß*

$$M \cap U = \{f(p):\ p \in P\}$$

gilt und die Frechetableitung f' in P eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathcal{B}$ ist.
b) Eine Teilmenge M eines Banachraumes $\mathcal{B}$ heißt <u>C^1-Mannigfaltigkeit</u> mit <u>Kodimension $k \in \mathbb{N}$</u>, wenn es für jedes $u \in M$ eine Kugel $K_\delta(u) \subset \mathcal{B}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $g:\ K_\delta(u) \to \mathbb{R}^k$ gibt, sodaß

$$M \cap K_\delta(u) = \{v \in K_\delta(u):\ g(v) = 0\}$$

gilt und die Frechetableitung g' in $K_\delta(u)$ eine surjektive Abbildung von $\mathcal{B}$ nach $\mathbb{R}^k$ ist.

In endlichdimensionalen Räumen besitzen alle C^1-Mannigfaltigkeiten endliche Dimension und Kodimension. Für $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ haben die k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten die Kodimension $n-k$.

Definition 6.2: *Sei $\{U_t; T\}$ ein lokales dynamisches System in C. Eine Menge $K \subset C$ heißt <u>lokal invariant</u>, wenn es für jedes $u \in K$ ein $v \in K$ und $t_1 > t_0 > 0$ gibt, sodaß $U_t(v) \in K$ für $t < t_1$ und $u = U_{t_0}(v)$ gilt.*

Wir betrachten nun wieder abstrakte Anfangswertprobleme der Form (5.6) mit denselben Annahmen wie im vorigen Abschnitt. Allerdings lassen wir nun zu, daß der lineare Operator L endlich viele positive Eigenwerte besitzt:

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_m > 0 > \lambda_{m+1} > \ldots$$

Wichtig ist hier die Annahme, daß die Realteile aller Eigenwerte verschieden von 0 sind. Wenn für die Linearisierung an einem stationären Punkt diese Annahme zutrifft, dann nennt man diesen einen *hyperbolischen Punkt*. Weiters nehmen wir an, daß die Nichtlinearität f stetig differenzierbar ist.

Für $u \in \mathcal{H}$ definieren wir die Projektion

$$Pu := \sum_{k=1}^{m} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

auf den Unterraum $\mathcal{H}^+$, der von den Eigenvektoren zu den positiven Eigenwerten aufgespannt wird. Entsprechend ist $I - P$ die Projektion auf das orthogonale Komplement $\mathcal{H}^-$ (ein Unterraum mit Kodimension m). Da die Eigenfunktionen im Definitionsbereich von L und damit in $\mathcal{H}_\alpha$ sind, ist $\mathcal{H}^+$ ein Teilraum von $\mathcal{H}_\alpha$, und wir können $\mathcal{H}_\alpha$ als direkte Summe

$$\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha^+ \oplus \mathcal{H}_\alpha^- \tag{6.1}$$

mit $\mathcal{H}_\alpha^+ = \mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}_\alpha^- = \mathcal{H}^- \cap \mathcal{H}_\alpha$ darstellen.

Für das linearisierte Problem (d.h. $f = 0$) gilt das Folgende: Der Unterraum $\mathcal{H}_\alpha^-$ ist die Menge aller Anfangsdaten u_0, für die die Lösung für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Ebenso ist $\mathcal{H}_\alpha^+$ die Menge aller Anfangsdaten, für die die Lösung für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert. Offensichtlich ist für $m > 0$ der stationäre Punkt 0 instabil.

Der Inhalt des folgenden Satzes ist, daß für das nichtlineare Problem das Lösungsverhalten in einer Umgebung des stationären Punktes qualitativ dem des linearisierten Problems entspricht.

Satz 6.1: *In $\mathcal{H}_\alpha$ existiert eine Kugel K_δ mit Mittelpunkt im Ursprung, sodaß Folgendes gilt:*

a) Die Menge aller $u_0 \in K_\delta$, für die die Lösung von (5.6) für alle positiven t existiert, in K_δ liegt und für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist eine lokal invariante C^1-Mannigfaltigkeit mit Kodimension m, genannt die stabile Mannigfaltigkeit W^s. Diese hat im Ursprung den Tangentialraum $\mathcal{H}_\alpha^-$.

b) Die Menge aller $u_0 \in K_\delta$, für die die Lösung von (5.6) für alle negativen t existiert, in K_δ liegt und für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergiert, ist eine lokal invariante C^1-Mannigfaltigkeit mit Dimension m, genannt die instabile Mannigfaltigkeit W^u. Diese hat im Ursprung den Tangentialraum $\mathcal{H}_\alpha^+$.

Beweis: Es ist leicht zu sehen, daß Lösungen, die für $t \to \infty$ gegen 0 konvergieren, das folgende System von Integralgleichungen lösen müssen:

$$\begin{aligned} u^+(t) &= \int_\infty^t e^{L(t-s)} P f(u^+(s) + u^-(s)) ds \,, \\ u^-(t) &= e^{Lt} u_0^- + \int_0^t e^{L(t-s)} (I - P) f(u^+(s) + u^-(s)) ds \,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $u(t) = u^+(t) + u^-(t)$ die Darstellung von $u(t)$ entsprechend der Zerlegung (6.1) von $\mathcal{H}_\alpha$ und u_0^- ein beliebiges Element von $\mathcal{H}_\alpha^-$ ist.

Wir werden skizzieren, wie man zeigt, daß (6.2) Lösungen im Banachraum $\mathcal{B} = C_B([0, \infty), \mathcal{H}_\alpha)$ der stetigen, beschränkten Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathcal{H}_\alpha$ besitzt. Zunächst folgt aus den Eigenschaften von f, daß die rechte Seite von (6.2) eine stetig differenzierbare Funktion von u_0^-, u^+ und u^- ist. Die Ableitung nach (u^+, u^-) am Ursprung verschwindet. Daher folgt für kleine $\|u_0^-\|_\alpha$ die Existenz einer Lösung von (6.2) aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen. Auch hängt diese Lösung differenzierbar von u_0^- ab.

Die Menge der Anfangswerte u_0 der Lösungen von (6.2) ist bestimmt durch die Gleichung

$$P\left(u_0 + \int_0^\infty e^{-Ls} f(u^+(s) + u^-(s))ds\right) = 0\,, \tag{6.3}$$

wobei zu beachten ist, daß im Integral $u^+(s)$ und $u^-(s)$ auch von $u_0^- = (I-P)u_0$ abhängen. Die in der Definition von Mannigfaltigkeiten mit endlicher Kodimension auftretende Abbildung g erhält man, wenn man in (6.3) die Projektion P durch die Abbildung auf die entsprechenden Fourierkoeffizienten ersetzt. Die Ableitung der linken Seite von (6.3) an der Stelle $u_0 = 0$ ist gerade die Projektion P, und diese ist als Abbildung von $\mathcal{H}_\alpha$ nach $\mathcal{H}_\alpha^+$ natürlich surjektiv. Die Surjektivität der Ableitung in einer Umgebung folgt aus einem Stetigkeitsargument. Der Tangentialraum im Ursprung ist bestimmt durch die Gleichung $Pu_0 = 0$ und daher gegeben durch $\mathcal{H}_\alpha^-$. Damit ist Teil a) des Satzes bewiesen.

Der Beweis von Teil b) verläuft analog. Lösungen von (5.6), die für $t \to -\infty$ gegen 0 konvergieren, lösen das System

$$\begin{aligned} u^+(t) &= e^{Lt}u_0^+ + \int_0^t e^{L(t-s)} P f(u^+(s) + u^-(s))ds\,, \\ u^-(t) &= \int_{-\infty}^t e^{L(t-s)}(I-P) f(u^+(s) + u^-(s))ds\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Analog zu oben zeigt man Lösbarkeit in $C_B((-\infty,0],\mathcal{H}_\alpha)$ für kleine $\|u_0^+\|_\alpha$ und stetig differenzierbare Abhängigkeit von u_0^+.

Für die Menge der entsprechenden Anfangswerte ergibt sich nun die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} Pu_0 &= u_0^+\,, \\ (I-P)u_0 &= \int_{-\infty}^0 e^{-Ls}(I-P) f(u^+(s) + u^-(s))ds\,, \end{aligned} \tag{6.5}$$

wobei wie oben $u^+(s)$ und $u^-(s)$ von u_0^+ abhängen. Als Parameter können die m Fourierkoeffizienten von u_0^+ angesehen werden. Die Ableitung der rechten Seite von (6.5) nach u_0^+ an der Stelle $u_0^+ = 0$ ist die natürliche Einbettung von $\mathcal{H}_\alpha^+$ in $\mathcal{H}_\alpha$, die natürlich injektiv ist. Die Injektivität in einer Umgebung von $u_0^+ = 0$ folgt wieder aus der Stetigkeit der Frechetableitung. Die Parameterdarstellung des Tangentialraumes im Ursprung ist offensichtlich die triviale Parameterdarstellung von $\mathcal{H}_\alpha^+$, womit der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

6.1 Die Zentrumsmannigfaltigkeit. Verzweigungen

Bisher wurden nichthyperbolische stationäre Punkte aus unseren Überlegungen ausgeklammert. Wenn die Linearisierung positive Eigenwerte besitzt, ist auch für nichthyperbolische Punkte Instabilität zu erwarten. Der kritische Fall ist gegeben, wenn es Eigenwerte auf der imaginären Achse gibt und alle anderen Eigenwerte negativen Realteil besitzen. Einfache Beispiele zeigen, daß dann die Linearisierung nicht ausreicht, um die Stabilität zu bestimmen.

Hier soll nun eine Vorgangsweise für eine Stabilitätsuntersuchung skizziert werden. Wir verwenden dieselben Annahmen wie bisher, d.h. wir betrachten das Problem (5.6). Für den linearisierten Operator nehmen wir an, er besitze einen m-fachen Nulleigenwert und alle anderen Eigenwerte seien negativ:

$$\lambda_1 = \ldots \lambda_m = 0 > \lambda_{m+1} \geq \ldots$$

Analog zu oben definieren wir die Projektion P auf den von den Eigenvektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ aufgespannten Unterraum $\mathcal{H}_\alpha^0$ und betrachten Lösungen von

$$\begin{aligned} u^0(t) &= u_0^0 + \int_0^t Pf(u(s))ds \,, \\ u^-(t) &= \int_\infty^t e^{L(t-s)}(I-P)f(u(s))ds \,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

wobei $u^0 \in \mathcal{H}_\alpha^0$ und u^- im orthogonalen Komplement $\mathcal{H}_\alpha^-$ liegt und $u = u^0 + u^-$ gilt. Für die Anfangswerte von u^0 und u^- besteht die Beziehung

$$u^-(0) = \int_\infty^0 e^{-Ls}(I-P)f(u(s))ds = w(u_0^0) \,.$$

Durch diese Gleichung wird eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, die *Zentrumsmannigfaltigkeit*, bestimmt, die im Ursprung den Tangentialraum $\mathcal{H}_\alpha^0$ besitzt. Man sieht leicht, daß die Lösungen von (6.6) ganz auf der Zentrumsmannigfaltigkeit liegen: $u^-(t) = w(u^0(t))$. Weiters kann man zeigen, daß sich Lösungen von (5.6) in einer Umgebung des Ursprunges exponentiell der Zentrumsmannigfaltigkeit nähern. Daraus folgert man, daß die Stabilitätseigenschaften des Ursprunges nur vom Fluß auf der Zentrumsmannigfaltigkeit abhängen. Projektion der Differentialgleichung in (5.6) auf $\mathcal{H}_\alpha^0$ gibt

$$\frac{du^0}{dt} = Pf(u^0 + w(u^0)) \,. \tag{6.7}$$

Diese Gleichung kann als ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Fourierkoeffizienten von u^0 angesehen werden, das den Fluß auf der Zentrumsmannigfaltigkeit bestimmt. Die Stabilitätsanalyse wurde damit auf ein Problem niedrigerer (endlicher!) Dimension reduziert.

Wir merken an, daß eine Zentrumsmannigfaltigkeit auch konstruiert werden kann, wenn es sowohl Eigenwerte mit positivem als auch solche mit negativem Realteil und solche auf der imaginären Achse gibt.

Was das praktische Rechnen anlangt, so scheint der Weg über die Zentrumsmannigfaltigkeit zunächst nicht sehr erfolgversprechend. Die Bestimmung der gewöhnlichen Differentialgleichung (6.7) ist vergleichbar schwer wie die Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems. Allerdings hilft hier die folgende Beobachtung: In vielen Fällen läßt sich die Stabilität eines stationären Punktes aus endlich vielen Termen der Taylorentwicklung der rechten Seite der Differentialgleichung bestimmen. Betrachten wir den einfachsten Fall eines einfachen Nulleigenwertes ($m = 1$). Dann ist (6.7) äquivalent zu einer skalaren gewöhnlichen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dv}{dt} = a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots$$

Man sieht leicht, daß der erste von Null verschiedene Term auf der rechten Seite die Stabilität von $v = 0$ bestimmt. Schon im Fall $m = 2$ ist eine Klassifikation aller möglichen Fälle allerdings ein weniger einfaches Problem.

Für die Taylorentwicklung der rechten Seite von (6.7) benötigt man die Taylorentwicklung der Darstellung w der Zentrumsmannigfaltigkeit. Diese kann aber zumeist durch Koeffizientenvergleich rekursiv ermittelt werden.

Die Zentrumsmannigfaltigkeit dient auch zur Analyse von *Verzweigungsproblemen.* Wir werden den einfachsten Fall betrachten, bei dem ein stationärer Punkt bei Variation eines Parameters durch einen kritischen Wert seine Stabilität verliert. Das soll dadurch geschehen, daß ein einfacher Eigenwert abhängig von dem Parameter einen Nulldurchgang hat. Sei

$$\frac{du}{dt} = L(\varepsilon)u + f(u, \varepsilon) \tag{6.8}$$

eine abstrakte gewöhnliche Differentialgleichung, wobei — analog zu den bisherigen Annahmen — der Operator $L(\varepsilon)$ die Eigenwerte

$$\lambda_1(\varepsilon) > \lambda_2(\varepsilon) \geq \dots$$

und zugehörigen Eigenvektoren $\varphi_{1\varepsilon}, \varphi_{2\varepsilon}, \dots$ besitzt. Es gelte

$$\lambda_1(0) = 0\,, \qquad \lambda_1'(0) > 0\,,$$

sowie $\lambda_2(\varepsilon) < \gamma < 0$ für kleine ε. Wie oben beginne die Taylorreihe von f bezüglich u mit den quadratischen Termen. Dann ist der stationäre Punkt $u = 0$ für kleine negative ε asymptotisch stabil und für kleine positive ε instabil.

Bezeichnen wir nun den ersten Fourierkoeffizienten der Lösung mit $v = \langle u, \varphi_{1\varepsilon}\rangle$, dann können wir wie oben die eindimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit mit der Parameterdarstellung $u = v\varphi_{1\varepsilon} + w_\varepsilon(v)$ bestimmen. Das Skalarprodukt von (6.8) mit $\varphi_{1\varepsilon}$ ist dann

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_1(\varepsilon)v + \langle f(v\varphi_{1\varepsilon} + w_\varepsilon(v), \varepsilon), \varphi_{1\varepsilon}\rangle\,. \tag{6.9}$$

Es läßt sich zeigen, daß für kleine ε alle Lösungen mit kleinen Anfangsbedingungen exponentiell gegen die Zentrumsmannigfaltigkeit konvergieren.

Wie oben kann das qualitative Verhalten von Lösungen aus der Taylorentwicklung der rechten Seite von (6.9) (nun nach v und ε) bestimmt werden. Aus unseren Annahmen folgt

$$\frac{dv}{dt} = \alpha\varepsilon v + \beta v^m + v o(\varepsilon) + o(v^m)$$

Figure 6.1: Verzweigungsdiagramm für die transkritische Verzweigung. Durchgezogene Äste von stationären Punkten sind stabil, strichlierte instabil.

Figure 6.2: Verzweigungsdiagramm für die subkritische Heugabelverzweigung.

mit $m \geq 2$, $\alpha > 0$ und $\beta \neq 0$. Die Terme höherer Ordnung beeinflußen das qualitative Verhalten nicht. Daher reduzieren wir unsere Betrachtungen auf die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \alpha\varepsilon v + \beta v^m \, .$$

Drei verschiedene Fälle treten auf:
Die transkritische Verzweigung: m ist eine gerade Zahl. In diesem Fall existiert für positive und negative ε der nichttriviale stationäre Punkt $v_\varepsilon = (-\alpha\varepsilon/\beta)^{1/(m-1)}$. Dieser ist für $\varepsilon < 0$ instabil und für $\varepsilon > 0$ stabil. Bei $\varepsilon = 0$ wechselt also die Stabilität vom trivialen auf den nichttrivialen stationären Punkt (siehe Fig. 6.1).
Die subkritische Heugabelverzweigung: m ist ungerade und $\beta > 0$. Für $\varepsilon < 0$ existieren zwei nichttriviale stationäre Punkte v_ε und $-v_\varepsilon$. Diese sind instabil (siehe Fig. 6.2).
Die superkritische Heugabelverzweigung: m ist ungerade und $\beta < 0$. Die beiden nichttrivialen stationären Punkte v_ε und $-v_\varepsilon$ existieren nun für $\varepsilon > 0$ und sind stabil (siehe Fig. 6.3).

Als Beispiel betrachten wir wieder das Chaffe-Infante-Problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \lambda u - u^3 \, , \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \, . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die bei $\lambda = 1$ auftretende Verzweigung, bei der die triviale stationäre

Figure 6.3: Verzweigungsdiagramm für die superkritische Heugabelverzweigung.

Lösung ihre Stabilität verliert. Die erste Eigenfunktion des linearisierten Operators ist

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \,.$$

Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist bestimmt durch $u = v\varphi_1 + O(v^2)$. Das Skalarprodukt mit der Differentialgleichung gibt

$$v_t = -v + \lambda v - \langle v^3 \varphi_1^3, \varphi_1 \rangle + O(v^4) \,,$$

und damit

$$v_t = (\lambda - 1)v - \frac{3}{2\pi} v^3 + O(v^4) \,.$$

Offensichtlich kommt es bei $\lambda = 1$ zu einer superkritischen Heugabelverzweigung. Diese Tatsache war aufgrund der früheren expliziten Analyse des stationären Problems schon bekannt. Nun haben wir als zusätzliche Information die Stabilität der verzweigenden Lösungen gezeigt. Weiters kann die obige Analyse auch für das mehrdimensionale Problem durchgeführt werden.

7 Wandernde Wellen

Wandernde Wellen sind Lösungen einer zeitabhängigen partiellen Differentialgleichung, die bezüglich eines sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Koordinatensystems stationär erscheinen. Für eine wandernde Wellenlösung gilt also $u(x,t) = \varphi(s)$ mit $s = k \cdot x - ct$, wobei der Wellenvektor k, $|k| = 1$, die Richtung und c die Geschwindigkeit der Welle angibt. Zumeist ist man an wandernden Wellen interessiert, die für $s \to \pm\infty$ konstanten Werten zustreben.

Wir betrachten als Beispiel die Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$u_t = u_{xx} + f(u) \,, \qquad x \in \mathbb{R}, \; t > 0,$$

wobei $f(u) = u(1-u)(u-a)$ gilt und a eine Konstante mit $0 < a < 1/2$ ist. Da die Gleichung räumlich eindimensional ist, ist der Wellenvektor trivial (wir wählen $k = -1$), und wir suchen wandernde Wellen der Form $u(x,t) = \varphi(x + ct)$. Diese lösen die Gleichung

$$\varphi'' - c\varphi' + f(\varphi) = 0 \tag{7.1}$$

Als Grenzwerte von φ für $s = x + ct \to \pm\infty$ kommen nur die Nullstellen 0, 1 und a von f in Frage. Wir suchen nach einer Lösung mit

$$\lim_{s\to-\infty} \varphi(s) = 0 \,, \qquad \lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 1 \,,$$

und behaupten, daß es eine solche für genau ein positives c gibt.

Die stationären Punkte $\varphi = 0$ und $\varphi = 1$ von (7.1) sind für alle c hyperbolisch. Für $c = 0$ erfüllen Lösungen von (7.1)

$$\frac{\varphi'^2}{2} + F(\varphi) = \text{const} \,, \qquad F(\varphi) = \int_0^\varphi f(u)du \,.$$

Figure 7.1: Phasenportrait von (7.1) für $c = 0$.

Es gibt in diesem Fall einen homoklinen Orbit zum stationären Punkt 0, weil die durch den Ursprung in der Phasenebene gehende Lösung $F(\varphi) = -\varphi'^2/2 \le 0$ erfüllt, während $F(1) = (1/2 - a)/6 > 0$ gilt. Der in den ersten Quadranten zeigende Ast der instabilen Mannigfaktigkeit von 0 kehrt daher zwischen $\varphi = a$ und $\varphi = 1$ zur φ-Achse zurück und von dort — wegen der Symmetrie bezüglich der φ-Achse — zurück zum Ursprung (siehe Abbildung).

Für positive c gilt

$$\left(\frac{\varphi'^2}{2} + F(\varphi)\right)' = c\varphi'^2 > 0\,.$$

Daraus folgt, daß die Lyapunovfunktion

$$V(\varphi, \varphi') = \frac{\varphi'^2}{2} + F(\varphi)$$

entlang von Lösungskurven wächst. Berücksichtigt man, daß der Anstieg der instabilen Mannigfaltigkeit im Ursprung eine monoton wachsende Funktion von c ist, dann ist es plausibel, daß für kleine positive Werte von c die instabile Mannigfaltigkeit die φ-Achse an einer Stelle mit $\varphi < 1$ schneidet. Für große Werte von c hingegen schneidet die instabile Mannigfaltigkeit die Niveaulinie $V(\varphi, \varphi') = F(1)$. Aus Stetigkeitsgründen muß es einen Wert von c geben, für den die stabile Mannigfaltigkeit durch den stationären Punkt $(\varphi, \varphi') = (1, 0)$ geht. Diese Lösung kann explizit angegeben werden:

$$c = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - a\right), \qquad \varphi(s) = \frac{1}{1 + e^{-s/\sqrt{2}}}$$

Wir stellen nun die Frage nach der Stabilität der Welle. Dazu transformieren wir zunächst auf die bewegliche Koordinate $\xi = x + ct$:

$$u_t = u_{\xi\xi} - cu_\xi + f(u) \tag{7.2}$$

In diesen Variablen ist $u = \varphi$ ein stationärer Punkt. Die Linearisierung an φ ist gegeben durch

$$u_t = u_{\xi\xi} - cu_\xi + f'(\varphi(\xi))u = Lu\,. \tag{7.3}$$

Die Analyse des linearen Problems wird erschwert dadurch, daß Differentialoperatoren auf unendlichen Bereichen im allgemeinen ein nichttriviales essentielles Spektrum besitzen.

Definition 7.1: *Die* <u>*Resolventenmenge*</u> *eines linearen Operators L ist die Menge aller* $\lambda \in$ ***C****, für die* $L - \lambda I$ *beschränkt invertierbar ist. Das* <u>*essentielle Spektrum*</u> *besteht aus allen* $\lambda \in$ ***C****, die nicht in der Resolventenmenge und nicht im* <u>*Punktspektrum*</u>*, d.h. keine isolierten Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit sind.*

Zumindest formal ist es einsichtig, daß das Spektrum, d.h. die Vereinigung von Punktspektrum und essentiellem Spektrum von linearisierten Problemen für Stabilitätsüberlegungen herangezogen werden können.

Als Beispiel betrachten wir einen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten: $Lu = u'' + au' + bu$. Mit Hilfe der Fouriertransformation erkennt man, daß das essentielle Spektrum gegeben ist durch $\{\lambda = -\mu^2 + ai\mu + b;\ \mu \in \mathbb{R}\}$. Das ist eine nach links offene Parabel in der komplexen Zahlenebene. Stabilität für die Gleichung $u_t = Lu$ erhält man offensichtlich für $b \le 0$.

Für Differentialoperatoren mit Koeffizienten, die für $\xi \to \pm\infty$ konvergieren, kann man Abschätzungen für das essentielle Spektrum angeben. Sei $Lu = u'' + a(x)u' + b(x)u$ mit $a(x) \to a_\pm$, $b(x) \to b_\pm$ für $x \to \pm\infty$. Sei P die Menge aller Punkte innerhalb und auf den beiden Parabeln $\{\lambda = -\mu^2 + a_\pm i\mu + b_\pm;\ \mu \in \mathbb{R}\}$. Man kann zeigen, daß das essentielle Spektrum von L eine Teilmenge von P ist. Insbesondere bedeutet das für λ aus dem essentiellen Spektrum die Eigenschaft $\mathrm{Re}(\lambda) \le \max\{b_+, b_-\}$.

Für das essentielle Spektrum des linearisierten Operators in (7.3) folgt damit $\lambda \le -a < 0$.

Differenzieren der Gleichung (7.1) zeigt, daß $\lambda = 0$ ein Eigenwert von L mit Eigenfunktion φ' ist. Außerdem ist nicht nur φ, sondern auch jede verschobene Funktion $\varphi(. + k)$ stationärer Punkt. Mit asymptotischer Stabilität kann man also nicht rechnen. Man kann aber ein Resultat der folgenden Art zeigen: Sei 0 einfacher Eigenwert von L und der Rest des Spektrums liege in der linken Halbebene beschränkt weg von der imaginären Achse. Weiters sei für eine Lösung u von (7.2) $\|u(.,0) - \varphi\|$ klein genug. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{R}$, sodaß $\|u(.,t) - \varphi(. + k)\|$ exponentiell abklingt. Auf die Wahl der Norm wollen wir hier nicht näher eingehen.

Es bleibt also das Punktspektrum von L zu untersuchen. Führen wir in der Gleichung $Lv = \lambda v$ die Transformation $w(\xi) = v(\xi)e^{-c\xi/2}$ durch, so ergibt sich das selbstadjungierte Eigenwertproblem

$$w'' + \left(f'(\varphi) - \frac{c^2}{4}\right) w = \lambda w \,.$$

Die Funktion $\psi(\xi) = \varphi'(\xi)e^{-c\xi/2}$ erfüllt die Differentialgleichung $\psi'' + (f'(\varphi) - c^2/4)\psi = 0$. Ist w durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(\xi) d\xi = 1$$

normiert, dann folgt aus einer partiellen Integration

$$\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \left(\frac{w}{\psi}\right)'^2 d\xi \,.$$

Das zeigt, daß für $\lambda = 0$ die Beziehung $w/\psi = v/\varphi' = \text{const}$ gelten muß. Der Nulleigenwert ist daher einfach. Alle anderen Eigenwerte sind negativ. Man beachte, daß in dem letzten Argument $\psi > 0$, d.h. die Monotonie der Welle verwendet wurde.