5. Verdünnungswellen — Riemann-Invarianten

Analog zu Abschnitt 1.3 suchen wir nach Lösungen des nichtlinearen Systems (3.1), die nur von $\xi = x/t$ abhängen. Es ergibt sich die Forderung

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \xi\frac{d\mathbf{u}}{d\xi}\,. \tag{5.1}$$

ξ muß ein Eigenwert von $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ sein. Für eine p-Verdünnungswelle fordern wir

$$\xi = \lambda_p(\mathbf{u})\,. \tag{5.2}$$

Ableiten dieser Gleichung nach ξ gibt

$$1 = \nabla\lambda_p(\mathbf{u})\cdot\frac{d\mathbf{u}}{d\xi}\,.$$

Wegen (5.1) muß $d\mathbf{u}/d\xi$ ein Eigenvektor sein. Verdünnugswellen können also nur in echt nichtlinearen Feldern auftreten. Nehmen wir an, daß der Eigenvektor $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ entsprechend (4.5) normiert ist, dann muß

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \tag{5.3}$$

gelten. Wenn ein Punkt $\mathbf{u}$ im Phasenraum vom Punkt $\mathbf{u}_l$ aus durch eine p-Verdünnungswelle erreicht werden soll, dann muß offensichtlich $\lambda_p(\mathbf{u}) > \lambda_p(\mathbf{u}_l)$ gelten. Daher ist die Menge aller solchen Punkte $\mathbf{u}$ die Vereinigung der m Kurven $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_p(\xi;\mathbf{u}_l)$, $p = 1,\cdots,m$, gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{u}}_p' = \mathbf{r}_p(\tilde{\mathbf{u}}_p)\,, \qquad \tilde{\mathbf{u}}_p(0;\mathbf{u}_l) = \mathbf{u}_l\,, \qquad \xi > 0\,.$$

Für die praktische Berechnung von Kontaktunstetigkeiten und Verdünnungswellen sind **Riemann-Invarianten** von Bedeutung:

Definition. *Eine skalare Funktion $w(\mathbf{u})$ heißt p-Riemann-Invariante, wenn*

$$\nabla w(\mathbf{u})\cdot\mathbf{r}_p(\mathbf{u}) = 0\,, \quad \forall\mathbf{u}$$

gilt.

Bemerkung: Man beachte, daß im Falle der linearen Degeneriertheit des p-ten Feldes der Eigenwert $\lambda_p(\mathbf{u})$ selbst eine p-Riemann-Invariante ist.

Man kann zeigen, daß $(m-1)$ p-Riemann-Invarianten existieren, deren Gradienten linear unabhängig sind. Mit Hilfe von Riemann-Invarianten lassen sich Gleichungen für die oben konstruierten Verdünnungswellenkurven und für die Hugoniot-Kurven in linear degenerierten Feldern angeben. Es gilt nämlich: Entlang von p-Verdünnungswellenkurven und Kurven von Kontaktunstetigkeiten sind alle p-Riemann-Invarianten konstant. Das folgt direkt aus der definierenden Eigenschaft von Riemann-Invarianten:

$$\frac{d}{d\xi}w(\tilde{\mathbf{u}}_p) = \nabla w(\tilde{\mathbf{u}}_p)\cdot\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_p}{d\xi} = \nabla w(\tilde{\mathbf{u}}_p)\cdot\mathbf{r}_p(\tilde{\mathbf{u}}_p) = 0$$

Bei Kenntnis von $(m-1)$ p-Riemann-Invarianten sind daher die p-Verdünnugswellenkurven und die Hugoniot-Kurven linear degenerierter Felder bestimmt durch $(m-1)$ Gleichungen der Form $w(\mathbf{u}) = w(\mathbf{u}_l)$.

Nun wollen wir darangehen, eine Lösung des Riemann-Problems ohne entropieverletzende Verdünnugsstöße zu konstruieren. Für alle echt nichtlinearen Felder eliminieren wir zunächst die entropieverletzenden Teile der im vorigen Kapitel konstruierten Hugoniot-Kurven ($\xi > 0$). Dann ersetzen wir diese durch die soeben konstruierten Verdünnungswellenkurven. Die so entstehenden Kurven sind am Punkt $\mathbf{u}_l$ differenzierbar, weil sowohl Hugoniot-Kurven als auch Verdünnungswellenkurven dort den Tangentialvektor $\mathbf{r}_p(\mathbf{u}_l)$ haben. Man kann sogar zweimalige stetige Differenzierbarkeit zeigen. Für linear degenerierte Felder genügen alle Punkte auf der entsprechenden Hugoniot-Kurve der Entropiebedingung. Wir lassen diese daher unverändert. Nun können wir vorgehen wie in Abschnitt 4.2, um Lösbarkeit des Riemann-Problems für $\mathbf{u}_r$ nahe bei $\mathbf{u}_l$ zu zeigen.

6. Das Riemann-Problem für die Eulergleichungen

Das Riemann-Problem für die Eulergleichungen entspricht einem von Riemann durchgeführten Gedankenexperiment. Dabei stellt man sich ein Rohr vor, in dem zwei sich in verschiedenen Zuständen befindliche homogene Gase durch eine Membran getrennt werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Membran entfernt.

Wir verwenden Dichte, Geschwindigkeit und Entropie als abhängige Variable. Für den Druck gilt dann

$$p = p(\rho, S) = ke^{S/c_v}\rho^\gamma .$$

Die Eulergleichungen (2.1), (2.2), (2.3) erhalten die Form

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ p_\rho/\rho & v & p_S/\rho \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}_x = 0 . \tag{6.1}$$

Mit der Schallgeschwindigkeit $c = \sqrt{p_\rho}$ sind die Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren gegeben durch

$$\lambda_1 = v - c , \qquad \lambda_2 = v , \qquad \lambda_3 = v + c$$

bzw.

$$\mathbf{r}_1 = (-\rho, c, 0) , \qquad \mathbf{r}_2 = (p_S, 0, -p_\rho) , \qquad \mathbf{r}_3 = (\rho, c, 0) .$$

Riemann-Invarianten für das erste, zweite bzw. dritte Feld sind

$$\{S, v + \frac{2}{\gamma - 1}c\} , \qquad \{v, p\} \quad \text{bzw.} \quad \{S, v - \frac{2}{\gamma - 1}c\} .$$

Beschäftigen wir uns zunächst mit Stoßwellen. Man berechnet leicht

$$\nabla\lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = \nabla\lambda_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{\gamma + 1}{2}c > 0 .$$

Die Eigenvektoren haben also gemäß (4.5) zumindest die richtige Orientierung. Daraus läßt sich für einen kleinen 1-Stoß die Ungleichung $\rho_r > \rho_l$ und für einen kleinen 3-Stoß $\rho_r < \rho_l$ folgern. Das zeigt, daß bei der Wanderung eines Volumselements durch einen Stoß die Dichte größer wird, weil Teilchenbahnen von links nach rechts durch einen 1-Stoß wandern, während sie von rechts nach links durch einen 3-Stoß wandern. Da die Änderung der Entropie bei einem kleinen Stoß von höherer Ordnung ist, wächst auch der Druck in einem Volumselement bei der Wanderung durch einen kleinen Stoß. Daher werden auch die Begriffe **Verdichtungsstoß** und **Kompressionswelle** verwendet. Es ist etwas aufwendiger, die Änderung der Entropie zu untersuchen. Für kleine Stöße kann man zeigen, daß die Entropie über eine Stoßwelle wächst. Das heißt, daß für kleine Stöße die Lax'sche Entropiebedingung äquivalent ist zu der Forderung des Nichtfallens der Entropie entlang von Teilchenbahnen.

Der Name Verdünnungswelle ist nun erklärt, weil für die Wanderung eines Volumselementes durch eine Verdünnungswelle die für Stoßwellen gültigen Ungleichungen umgekehrt werden müssen. Die Verdünnungswellenkurven sind durch die Forderung bestimmt, daß die Riemann-Invarianten konstant bleiben. Da Verdünnugswellen klassische Lösungen sind, war zu erwarten, daß sowohl für das erste als auch für das dritte Feld die Entropie eine Riemann-Invariante ist.

Kontaktunstetigkeiten stellen sich als etwas sehr Einfaches heraus. Geschwindigkeit und Druck sind auf beiden Seiten gleich. Sie bestehen daher nur aus einem Sprung in der Dichte (bzw. der Temperatur). Der Name Kontaktunstetigkeit wird dadurch erklärt, daß die beiden Gase, die durch Entfernung der Membran in Kontakt gebracht wurden, für alle Zeiten links bzw. rechts von der Kontaktunstetigkeit bleiben.

Die Lösung des Riemann-Problems kann man sich nun folgendermaßen veranschaulichen. Man projiziert zunächst die von $\mathbf{u}_l$ und $\mathbf{u}_r$ ausgehenden Stoß- bzw. Verdünnungswellenkurven in die v-p-Ebene, d.h. man eliminiert die Dichte aus den entsprechenden Gleichungen. In der v-p-Ebene bestimmt man den Schnittpunkt der von $\mathbf{u}_l$ ausgehenden 1-Kurve mit der von $\mathbf{u}_r$ ausgehenden 3-Kurve. Diesem Schnittpunkt entsprechen nun 2 verschiedene ρ-Werte. Der Sprung in der Dichte kann durch eine Kontaktunstetigkeit überwunden werden. In der Praxis läßt sich auf diese Art die Lösung des Riemann-Problems auf die Lösung einer nichtlinearen Gleichung zurückführen.