

2. Modellierung kompressibler, reibungsfreier eindimensionaler Strömungen

2.1. Die Eulergleichungen

Die Eulergleichungen der Gasdynamik sind Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Mit der Dichte ρ und der Geschwindigkeit v ist die Massenerhaltungsgleichung (**Kontinuitätsgleichung**) gegeben durch (siehe Abschnitt 1.1)

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (2.1)$$

Die Impulserhaltungsgleichung beinhaltet den Druck p :

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 \quad (2.2)$$

Die Energiegleichung ist ein Erhaltungssatz für die Energiedichte E :

$$E_t + [v(E + p)]_x = 0 \quad (2.3)$$

In (2.2) und (2.3) sind Reibungseffekte vernachlässigt. Sollen diese berücksichtigt werden, so müssen wir (2.2), (2.3) durch

$$\begin{aligned} (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= \nu v_{xx}, \\ E_t + [v(E + p)]_x &= \nu (v v_x)_x \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit der Viskosität ν ersetzen, weil der Spannungstensor dann durch $\mathbf{T} = -p + \nu v_x$ gegeben ist. Die erste Gleichung in (2.4) ist die eindimensionale Version der **Navier-Stokes-Gleichungen**.

Um (2.1), (2.2), (2.3) bzw. (2.1), (2.4) zu einem geschlossenen System zu machen, sind zusätzliche Materialgleichungen notwendig. Zunächst schreiben wir die Energie als Summe von kinetischer und innerer Energie:

$$E = \rho \frac{v^2}{2} + \rho e,$$

mit der **spezifischen inneren Energie** e . Weiters beschränken wir uns auf **kalorisch ideale Gase**, d.h. die Beziehungen

$$p = \rho \mathcal{R} T, \quad e = c_v T$$

gelten mit der **Temperatur** T , der **Gaskonstanten** \mathcal{R} und der (als konstant angenommenen) **spezifischen Wärme bei konstantem Volumen** c_v .

2.2. Die Entropie

Die Energiegleichung kann man als eine Version des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik interpretieren. Dazu führen wir die **Materialableitung**

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$$

ein, die die Änderung einer Größe entlang von Teilchenbahnen angibt. Der erste Hauptsatz besagt, daß die Änderung der inneren Energie eines Volumenelementes, das sich mit der Strömung bewegt, durch die Differenz aus der zugeführten Wärmeenergie und der von dem Volumenelement geleisteten Arbeit gegeben ist:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} - \frac{Dw}{Dt}$$

Die Arbeit ergibt sich als Produkt aus dem Druck und der Volumsänderung:

$$\frac{Dw}{Dt} = p \frac{D\rho^{-1}}{Dt}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{Dq}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\rho^{-1}}{Dt},$$

die den Namen spezifische Wärme bei konstantem Volumen für die Konstante c_v erklärt. Mit Hilfe des idealen Gasgesetzes kann diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{Dq}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$$

mit der **spezifischen Wärme bei konstantem Druck** $c_p = c_v + \mathcal{R}$ geschrieben werden.

Gemäß unseren bisherigen Annahmen wird einem sich mit der Strömung bewegenden Volumenelement von außen keine Wärme zugeführt oder entzogen. Die linke Seite der obigen Gleichung verschwindet daher. Die resultierende Gleichung ist äquivalent zu (2.3). Dividiert man diese Gleichung durch T , so kann sie in der Form

$$\frac{c_v}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{\mathcal{R}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

geschrieben werden. Das motiviert die Einführung der Entropie

$$S = c_v \ln T - \mathcal{R} \ln \rho + \text{const} = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}.$$

Hier bezeichnet $\gamma = c_p/c_v$ den Quotienten der spezifischen Wärmen.

Für ein reibungsfreies Gas gilt $DS/Dt = 0$ bzw. in Erhaltungsform

$$(\rho S)_t + (\rho S v)_x = 0.$$

(Reynold'sches Transporttheorem: $\rho(Dz/Dt) = (\rho z)_t + (\rho z v)_x$) Die Entropie eines sich mit der Strömung bewegenden Volumenelementes ist konstant. Allerdings ist diese Aussage im allgemeinen nur für klassische nicht aber für schwache Lösungen von (2.1), (2.2), (2.3) richtig (siehe Kapitel 1).

Eine Gleichung für die Entropie in viskosen Gasen erhält man, indem man zunächst aus der Navier-Stokes-Gleichung eine Gleichung für die kinetische Energie herleitet. Multipliziert man die erste Gleichung in (2.4) mit v , so läßt sich das Resultat schreiben als

$$\left(\rho \frac{v^2}{2}\right)_t + \left(\rho \frac{v^3}{2}\right)_x + v p_x = \nu v v_x.$$

Als Differenz aus dieser Gleichung und der Energiegleichung erhält man

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{\nu}{T} v_x^2.$$

Die Entropie eines sich mit der Strömung bewegenden Volumenelementes wächst. Ähnlich wie in Abschnitt 1.4 läßt sich argumentieren, daß für schwache Lösungen der Eulergleichungen die Ungleichung

$$(\rho S)_t + (\rho S v)_x \geq 0 \tag{2.5}$$

im schwachen Sinn gelten muß. Passiert man beim Verfolgen einer Teilchenbahn eine Sprungunstetigkeit, so ergibt sich als Entropiebedingung, daß die Entropie über den Sprung hinweg nicht kleiner werden darf.

2.3. Isothermische Strömungen

Ein vereinfachtes System, das wir im Folgenden zur Illustration theoretischer Resultate verwenden werden, erhält man mit der Annahme einer konstanten Temperatur $T = \bar{T}$:

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + a^2 \rho)_x &= 0\end{aligned}\tag{2.6}$$

Die Konstante $a = \sqrt{RT}$ hat die Dimension einer Geschwindigkeit.

3. Lineare Hyperbolische Systeme

3.1. Charakteristische Variable

Ein System der Form

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0,\tag{3.1}$$

mit $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ heißt System von Erhaltungssätzen. Beispiel: Eulergleichungen mit $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, E)$. Zunächst beschäftigen wir uns mit linearen Problemen der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x &= 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x),\end{aligned}\tag{3.2}$$

mit einer konstanten $(m \times m)$ -Matrix \mathbf{A} . Dieses System heißt **hyperbolisch**, wenn \mathbf{A} lauter reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ hat und diagonalisierbar ist. Es heißt **streng hyperbolisch**, wenn die Eigenwerte alle verschieden sind. Wir nehmen das im Folgenden an sowie, daß die Eigenwerte geordnet sind:

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_m$$

Dann gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}$$

mit $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und der Matrix \mathbf{R} , deren Spalten die Eigenvektoren $\mathbf{r}_p, p = 1, \dots, m$ von \mathbf{A} sind.

Das Problem (3.2) löst man durch eine Transformation auf **charakteristische Variable**

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x - \lambda_p t, 0) \mathbf{r}_p, \quad \text{mit } \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_0(x).$$

Beispiel : Die Wellengleichung:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

Die Transformation $v = u_x, w = u_t$ führt auf ein streng hyperbolisches System für $\mathbf{u} = (v, w)$ mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Linearisierung nichtlinearer Systeme — Schallwellen

Das System (3.1) kann in der Form

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = 0$$

mit der Jacobimatrix $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u})$ geschrieben werden. Analog zum vorigen Abschnitt bezeichnet man (3.1) als (streng) hyperbolisch, wenn $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ für alle \mathbf{u} die entsprechenden Eigenschaften hat.

Untersucht man die Ausbreitung von Störungen eines konstanten Zustandes, dann erhält man ein lineares System mit konstanten Koeffizienten: Sei $\mathbf{u}(x, t) = \bar{\mathbf{u}} + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x, t) + O(\varepsilon^2)$ mit konstantem $\bar{\mathbf{u}}$ und kleinem ε . Für $\mathbf{u}^{(1)}$ erhält man die Gleichung

$$\mathbf{u}_t^{(1)} + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}})\mathbf{u}_x^{(1)} = 0.$$

Für die Eulergleichungen ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3)v^2/2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)v^3 - \gamma E v / \rho & \gamma E / \rho - (\gamma - 1)3v^2/2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = v - c$, $\lambda_2 = v$ und $\lambda_3 = v + c$, wobei

$$c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma p / \rho}$$

die **Schallgeschwindigkeit** ist. Kleine Störungen eines konstanten Zustandes breiten sich mit den Geschwindigkeiten v und $v \pm c$ aus. Die Wellen, die sich mit Geschwindigkeit $\pm c$ im Verhältnis zur Grundgeschwindigkeit v bewegen, sind Schallwellen.

Für die isothermischen Gleichungen (2.6) sind die Eigenwerte gegeben durch $\lambda_{1,2} = v \pm a$. Hier ist a die Schallgeschwindigkeit. Wellen mit der Geschwindigkeit v treten nicht auf.

3.3. Das Riemann-Problem

Wir wollen (3.2) lösen mit

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & \text{für } x < 0, \\ \mathbf{u}_r & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Da die Eigenvektoren von \mathbf{A} eine Basis des \mathbb{R}^m bilden, gilt

$$\mathbf{u}_l = \sum_{p=1}^m \alpha_p \mathbf{r}_p, \quad \mathbf{u}_r = \sum_{p=1}^m \beta_p \mathbf{r}_p.$$

Sei $J(x, t) = \max\{j : x - \lambda_j t > 0\}$. Dann gilt

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{p=1}^{J(x,t)} \beta_p \mathbf{r}_p + \sum_{p=J(x,t)+1}^m \alpha_p \mathbf{r}_p. \quad (3.3)$$

Der Anfangssprung wurde in eine Summe von Sprüngen zerlegt:

$$\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l = \sum_{p=1}^m (\beta_p - \alpha_p) \mathbf{r}_p,$$

von denen sich jeder entlang einer Charakteristik $x = \lambda_p t$ fortpflanzt. Den entsprechenden Lösungsanteil bezeichnen wir als p -Welle.

Die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung (1.7) gilt in derselben Form auch für Systeme:

$$s[\mathbf{u}] = [\mathbf{f}], \quad (3.4)$$

wobei $[\cdot]$ den Sprung in einer Größe bezeichnet. Der Sprung der Lösung (3.3) über die p -te Charakteristik ist

$$[\mathbf{u}] = (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{r}_p, \quad p = 1, \dots, m.$$

Die Bedingung (3.4) ist auch für diese Sprünge erfüllt wegen

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{A}[\mathbf{u}] = (\beta_p - \alpha_p)\mathbf{A}\mathbf{r}_p = \lambda_p[\mathbf{u}],$$

und λ_p ist wirklich die Geschwindigkeit der p -ten Charakteristik.

Für die spätere Behandlung nichtlinearer Probleme ist es von Vorteil, die Lösung des Riemann-Problems im Phasenraum (d.h. im \mathbf{u} -Raum) zu betrachten. Ausgehend vom Punkt \mathbf{u}_l , bezeichnet man die Menge aller Punkte \mathbf{u} des Phasenraumes, die von \mathbf{u}_l aus durch einen Sprung erreichbar sind, als **Hugoniot-Locus**. Der Hugoniot-Locus besteht aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$s(\mathbf{u} - \mathbf{u}_l) = \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_l),$$

d.h. er ist die Vereinigung von m Geraden durch \mathbf{u}_l , deren Richtungen die Eigenrichtungen der Matrix \mathbf{A} sind.

Das Riemann-Problem wird gelöst, indem man \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r als gegenüberliegende Ecken eines m -dimensionalen Parallelepipeds ansieht, das von den Eigenvektoren von \mathbf{A} aufgespannt wird. Die Lösung des Riemann-Problems besteht darin, sich entlang von Kanten dieses Parallelepipeds von \mathbf{u}_l nach \mathbf{u}_r zu bewegen, wobei der Weg dadurch eindeutig gemacht wird, daß man die (zu $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ parallelen) Kanten in der richtigen Reihenfolge zu beschreiten hat. Die dabei berührten Ecken sind die Werte der Lösung in den Winkelgebieten $\{\lambda_p t < x < \lambda_{p+1} t\}$. Wesentlich für das Funktionieren dieser Konstruktion ist die Tatsache, daß die Eigenvektoren eine Basis des \mathbb{R}^m bilden.

4. Stoßwellen

4.1. Der Hugoniot-Locus

Wir beschäftigen uns nun mit nichtlinearen streng hyperbolischen Systemen

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0.$$

Die Jacobimatrix $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ hat die Eigenwerte $\lambda_1(\mathbf{u}) < \dots < \lambda_m(\mathbf{u})$ und die Eigenvektoren $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{u})$. Analog zum vorigen Abschnitt wird der Hugoniot-Locus von \mathbf{u}_l mit Hilfe der Sprungbedingung definiert als Menge aller \mathbf{u} , die für ein s das Gleichungssystem

$$s(\mathbf{u} - \mathbf{u}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) \tag{4.1}$$

lösen. Statt der Geraden des linearen Falles erwarten wir nun m Lösungskurven. Mit der Parametrisierung

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_p(\xi; \mathbf{u}_l), \quad s = s_p(\xi; \mathbf{u}_l), \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{u}}_p(0; \mathbf{u}_l) = \mathbf{u}_l,$$

für die p -te Kurve ergibt sich aus der Ableitung von (4.1) nach ξ die Forderung

$$s_p(0; \mathbf{u}_l)\tilde{\mathbf{u}}_p'(0; \mathbf{u}_l) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}_l)\tilde{\mathbf{u}}_p'(0; \mathbf{u}_l),$$

die durch die Wahl $s_p(0; \mathbf{u}_l) = \lambda_p(\mathbf{u}_l)$, $\tilde{\mathbf{u}}_p'(0; \mathbf{u}_l) = \mathbf{r}_p(\mathbf{u}_l)$ erfüllt werden kann.

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen kann man zeigen, daß in einer Umgebung von \mathbf{u}_l der Hugoniot-Locus wirklich aus m Kurven durch den Punkt \mathbf{u}_l besteht, deren Tangenten in \mathbf{u}_l parallel zu den Eigenvektoren von $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_l)$ sind. Die Punkte auf der Kurve $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_p(\xi, \mathbf{u}_l)$ können mit \mathbf{u}_l durch einen p -Stoß verbunden werden.

4.2. Das Riemann-Problem

Nun wollen wir eine schwache Lösung des Riemann-Problems konstruieren. Wir definieren

$$\mathbf{u}_1(\xi_1) = \tilde{\mathbf{u}}_1(\xi_1; \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}_p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \tilde{\mathbf{u}}_p(\xi_p; \mathbf{u}_{p-1}(\xi_1, \dots, \xi_{p-1})), \quad p = 2, \dots, m.$$

Dann ist durch $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p(\xi_1, \dots, \xi_p)$ eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit von Punkten im Phasenraum gegeben, die mit \mathbf{u}_l verbunden werden können, indem ein 1-Stoß, ein 2-Stoß usw. bis zu einem p -Stoß aneinandergereiht werden. Lösung des Riemann-Problems ist dann gleichbedeutend mit der Bestimmung von (ξ_1, \dots, ξ_m) , sodaß

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$$

gilt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Jacobimatrix der Abbildung \mathbf{u}_m am Ursprung gleich der Eigenvektormatrix \mathbf{R} und damit regulär ist. Die Abbildung ist daher in einer Umgebung des Ursprunges bijektiv. Das bedeutet, daß für \mathbf{u}_r nahe genug bei \mathbf{u}_l das Riemann-Problem eindeutig durch eine Aufeinanderfolge von Stößen gelöst werden kann.

Eine stärkere Aussage ist im allgemeinen nicht möglich. Es gibt Beispiele, für die das Riemann-Problem keine Lösung hat, wenn der Abstand zwischen \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r groß genug ist.

4.3. Die Entropiebedingung von Lax

Wie unsere Erfahrungen mit skalaren Problemen zeigen, ist die Lösung des Riemann-Problems, die nur aus Stoßwellen besteht, im allgemeinen sicher nicht die physikalisch relevante. Eine Interpretation der skalaren Entropiebedingung

$$f'(u_l) > s > f'(u_r)$$

ist, daß die Charakteristiken in den Stoß hineinlaufen. Eine einfache Verallgemeinerung davon ist die Lax'sche Entropiebedingung für Systeme: Ein p -Stoß ist dann erlaubt, wenn für seine Geschwindigkeit die Ungleichungen

$$\lambda_p(\mathbf{u}_l) > s > \lambda_p(\mathbf{u}_r) \quad (4.2)$$

gelten. Es wird also verlangt, daß die p -Charakteristiken in den p -Stoß hineinlaufen.

Die skalare Entropiebedingung ist unter der Annahme der echten Nichtlinearität ($f'' > 0$) hinreichend. Eine Verallgemeinerung davon auf Systeme ist die **echte Nichtlinearität des p -ten Feldes**:

$$\nabla \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{u} \quad (4.3)$$

Betrachtet man den p -ten Eigenwert entlang der entsprechenden Hugoniot-Kurve, dann gilt

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_p(\tilde{\mathbf{u}}_p)|_{\xi=0} = \nabla \lambda_p(\mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}_l). \quad (4.4)$$

Echte Nichtlinearität bedeutet also, daß sich der Eigenwert entlang der Hugoniot-Kurve ändert.

Für echt nichtlineare Felder werden wir von nun an annehmen, daß der Eigenvektor $\mathbf{r}_p(\mathbf{u})$ so gewählt ist, daß

$$\nabla \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) = 1 \quad (4.5)$$

gilt. Wegen (4.4) bedeutet das, daß λ_p entlang der Hugoniot-Kurve eine streng monoton wachsende Funktion von ξ ist. Daher kann die Entropiebedingung (4.3) nur für $\xi < 0$ erfüllt sein. Erlaubte Sprungziele erreicht man nur, wenn man die Hugoniot-Kurve in Richtung negativer ξ verfolgt.

4.4. Lineare Degeneration

In den Euler-Gleichungen sind das erste und das dritte Feld echt nichtlinear. Für das zweite Feld verschwindet die linke Seite von (4.3) für alle \mathbf{u} . Diese Aussage wird in Kapitel 6 verifiziert. Man bezeichnet das p -te Feld als linear degeneriert, wenn

$$\nabla \lambda_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_p(\mathbf{u}) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{u} \quad (4.6)$$

gilt.

Einen Sprung in einem linear degenerierten Feld bezeichnet man als **Kontaktunstetigkeit**. Für die entsprechende Hugoniot-Kurve gilt

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_p}{d\xi} = \mathbf{r}_p(\tilde{\mathbf{u}}_p),$$

woraus folgt, daß für eine Kontaktunstetigkeit $\lambda_p(\mathbf{u}) = s = \lambda_p(\mathbf{u}_r)$ gilt. Die p -ten Charakteristiken verlaufen parallel zu der Kontaktunstetigkeit.

Angesichts dieser Situation modifizieren wir die Entropiebedingung (4.2):

$$\lambda_p(\mathbf{u}) \geq s \geq \lambda_p(\mathbf{u}_r) \quad (4.7)$$