12. Nichtlineare Stabilität

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Konzepten, die für nichtlineare Probleme den Begriff der Stabilität ersetzen. Das wird uns gestatten, Konvergenzaussagen für numerische Methoden herzuleiten. Da es eine einigermaßen geschlossene Theorie bisher nur für skalare Probleme gibt, werden wir uns in diesem Abschnitt auf solche beschränken:

$$u_t + f(u)_x = 0\,, \qquad u(x,0) = u_0(x) \tag{12.1}$$

Für die Anfangsfunktion nehmen wir an, daß sie kompakten Träger besitzt.

Wir definieren einen Konvergenzbegriff, der berücksichtigt, daß schwache Lösungen nicht eindeutig sind. Sei

$$\mathcal{W} = \{w : w(x,t) \text{ ist eine schwache Lösung des Erhaltungssatzes}\}\,.$$

Für ein Zeitintervall $[0,T]$ wählen wir als Norm die L^1-Norm auf $\mathbb{R} \times [0,T]$:

$$||v||_{1,T} = \int_0^T ||v(.,t)||_1 \, dt = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |v(x,t)| \, dx \, dt$$

Den globalen Fehler definieren wir durch

$$\operatorname{dist}(U_k, \mathcal{W}) = \inf_{w \in \mathcal{W}} ||U_k - w||_{1,T}\,.$$

Ein wesentliches Werkzeug bei Konvergenzbeweisen für nichtlineare Probleme ist *Kompaktheit.* Die in diesem Zusammenhang bedeutende Eigenschaft kompakter Mengen ist die Existenz konvergenter Teilfolgen für jede in einer kompakten Menge enthaltene Folge. In unendlichdimensionalen Räumen ist die Charakterisierung kompakter Mengen im allgemeinen nicht leicht. Hier interessiert uns der Raum

$$L^1_T = \{v : ||v||_{1,T} < \infty\}\,.$$

Wir definieren die Totalvariation auf $\mathbb{R} \times [0,T]$ durch

$$TV_T(u) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x| + |u_t|) \, dx \, dt\,,$$

wobei die Ableitungen wieder im distributionellen Sinn zu verstehen sind. Dann gilt, daß Mengen der Form

$$\mathcal{K} = \{u \in L^1_T : TV_T(u) \le R,\ \operatorname{supp}(u) \subset [-M,M] \times [0,T]\} \tag{12.2}$$

kompakt in L^1_T sind.

Für die stückweise konstanten numerischen Lösungen $U_k(x,t)$ ist die Totalvariation gegeben durch

$$TV_T(U_k) = \sum_{n=0}^{T/k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(k|U^n_{j+1} - U^n_j| + h|U^{n+1}_j - U^n_j|\right) = \sum_{n=0}^{T/k} \left(k\,TV(U^n) + ||U^{n+1} - U^n||_1\right). \tag{12.3}$$

Definition. *Eine Methode heißt TV-stabil, wenn für $k < k_0$ die numerischen Lösungen U_k in einer Menge der Form (12.2) liegen, wobei R und M von u_0 und $f(u)$, nicht aber von k abhängen.*

Für konservative numerische Methoden zeigt der folgende Satz, daß für TV-Stabilität die Kontrolle der eindimensionalen Totalvariation ausreicht.

Satz 12.1. *Wir betrachten eine konservative Methode mit Lipschitz-stetigem numerischen Fluß, sodaß für jedes u_0 Konstante $k_0, R > 0$ existieren mit*

$$TV(U^n) \leq R \qquad \forall\, n, k \text{ mit } k < k_0,\ nk \leq T\,. \tag{12.4}$$

Dann ist die Methode TV-stabil.

Beweis. Für eine konservative Methode gilt offensichtlich

$$\|U^{n+1} - U^n\|_1 = k \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(U^n; j) - F(U^n; j-1)|\,.$$

Da U^n kompakten Träger hat, folgt aus (12.4) die Abschätzung $|U_j^n| \leq R/2$. Damit impliziert die Lipschitzstetigkeit von F

$$|F(U^n; j) - F(U^n; j-1)| \leq K \max_{-p \leq i \leq q} |U_{j+i}^n - U_{j+i-1}^n| \leq K \sum_{i=-p}^{q} |U_{j+i}^n - U_{j+i-1}^n|\,.$$

Es gilt daher

$$\|U^{n+1} - U^n\|_1 \leq kK(p+q+1)TV(U^n) \leq \alpha k \tag{12.5}$$

mit $\alpha = KR(p+q+1)$. Nun schätzen wir mit Hilfe von (12.5) die Totalvariation ab:

$$TV_T(U^n) = \sum_{n=0}^{T/k} \big(k\,TV(U^n) + \|U^{n+1} - U^n\|_1\big) \leq \sum_{n=0}^{T/k} (kR + \alpha k) \leq (R+\alpha)T$$

Da wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit die Träger der U^n in einem beschränkten Intervall liegen, ist der Beweis vollständig. ■

Nun können wir ein Konvergenzresultat formulieren:

Satz 12.2. *Für eine konservative, konsistente numerische Methode mit Lipschitz-stetigem numerischen Fluß folgt aus TV-Stabilität Konvergenz in dem Sinn, daß $\lim_{k \to 0} \operatorname{dist}(U_k, \mathcal{W}) = 0$ gilt.*

Beweis. Angenommen, $\operatorname{dist}(U_k, \mathcal{W})$ konvergiert nicht gegen 0. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Nullfolge k_j mit

$$\operatorname{dist}(U_{k_j}, \mathcal{W}) > \varepsilon \quad \forall\, j\,. \tag{12.6}$$

Da die U_{k_j} in einer kompakten Teilmenge von L_T^1 liegen, gibt es eine Teilfolge, die gegen ein Element v der kompakten Menge konvergiert. Der Satz von Lax-Wendroff impliziert, daß v eine schwache Lösung des Erhaltungssatzes ist. Das steht im Widerspruch zu (12.6). ■

Eine Möglichkeit, die Voraussetzungen des Satzes 12.1 zu erfüllen, besteht in der Forderung, daß die eindimensionale Totalvariation über einen Zeitschritt hinweg nicht zunimmt.

Definition. *Eine Methode heißt* **TVD** *(***t***otal* **v***ariation* **d***iminishing), wenn für alle Gitterfunktionen U^n*

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n)$$

gilt.

Die folgende Definition beinhaltet einen weiteren Stabilitätsbegriff.

Definition. *Eine Methode heißt* **monotonieerhaltend**, *wenn für monotone Anfangsdaten auch die numerische Lösung zu jedem Zeitpunkt monoton ist.*

Satz 12.3. *Jede numerische Methode, die TVD ist, ist auch monotonieerhaltend.*

Beweis. Sei $U_j^0 \geq U_{j+1}^0$ für alle j und $TV(U^0) < \infty$. Dann gilt $TV(U^0) = U_{-\infty}^0 - U_\infty^0$. Wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt $U_{\pm\infty}^n = U_{\pm\infty}^0$ für alle n. Daraus folgt $TV(U^n) \geq U_{-\infty}^0 - U_\infty^0$ und somit wegen der TVD-Eigenschaft $TV(U^n) = U_{-\infty}^n - U_\infty^n$. Das gilt nur dann, wenn U^n monoton ist. ∎

Entropielösungen $u(x,t)$ und $v(x,t)$ eines skalaren Erhaltungssatzes sind L^1**-kontrahierend**, d.h. es gilt

$$\|u(.,t_2) - v(.,t_2)\|_1 \leq \|u(.,t_1) - v(.,t_1)\|_1 \qquad \text{für } t_2 \geq t_1 \,.$$

Definition. *Eine numerische Methode heißt* l_1**-kontrahierend**, *wenn für beliebige Gitterfunktionen* U^n *und* V^n *die Ungleichung*

$$\|U^{n+1} - V^{n+1}\|_1 \leq \|U^n - V^n\|_1$$

gilt.

Satz 12.4. *Jede* l_1*-kontrahierende numerische Methode ist TVD.*

Beweis. Für eine Gitterfunktion U definieren wir V durch $V_j = U_{j-1}$. Dann gilt

$$TV(U) = \frac{1}{h}\|U - V\|_1 \,.$$

Sei die Methode l_1-kontrahierend. Für ein beliebiges U^n definieren wir $V_j^n = U_{j-1}^n$. Da das numerische Verfahren translationsinvariant ist, gilt für das mit Hilfe des numerischen Verfahrens ermittelte V^{n+1} die Gleichung $V_j^{n+1} = U_{j-1}^{n+1}$. Daraus folgt

$$TV(U^{n+1}) = \frac{1}{h}\|U^{n+1} - V^{n+1}\|_1 \leq \frac{1}{h}\|U^n - V^n\|_1 = TV(U^n) \,.$$

∎

Beispiel : Die Methode der linksseitigen Differenzen ist l_1-kontrahierend, wenn die CFL-Bedingung erfüllt ist. Wir nehmen an, daß

$$0 \leq \frac{k}{h} f'(u) \leq 1 \qquad \text{für } \min_j(U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j(U_j^n, V_j^n)$$

gilt. Mit $W_j^n = U_j^n - V_j^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} &= W_j^n - \frac{k}{h}\left[\left(f(U_j^n) - f(V_j^n)\right) - \left(f(U_{j-1}^n) - f(V_{j-1}^n)\right)\right] \\ &= \left(1 - \frac{k}{h} f'(\theta_j^n)\right) W_j^n + \frac{k}{h} f'(\theta_{j-1}^n) W_{j-1}^n \end{aligned}$$

mit Hilfe des Mittelwertsatzes. Anwendung der Dreiecksungleichung sowie Summation über j ergibt

$$\|W^{n+1}\|_1 \leq \|W^n\|_1 \,.$$

Analog kann man zeigen, daß das Lax-Friedrichs-Verfahren l_1-kontrahierend ist, wenn die CFL-Bedingung erfüllt ist.

Eine weitere Stabilitätseigenschaft der Entropielösung ist die folgende:

$$v_0(x) \geq u_0(x) \;\; \forall\, x \quad \Longrightarrow \quad v(x,t) \geq u(x,t) \;\; \forall\, x, t$$

Definition. *Eine numerische Methode heißt* **monoton**, *wenn*

$$V_j^n \geq U_j^n \quad \forall j \quad \Longrightarrow \quad V_j^{n+1} \geq U_j^{n+1} \quad \forall j\,.$$

Hinreichend für Monotonie einer numerischen Methode ist die Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial U_i^n} \mathcal{H}(U^n; j) \geq 0 \quad \forall i, j, U^n$$

des Lösungsoperators.

Beispiel : Das Lax-Friedrichs-Verfahren mit dem Lösungsoperator

$$\mathcal{H}(U^n; j) = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{k}{2h}\big(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)\big)$$

ist monoton, wenn die CFL-Bedingung

$$\frac{k}{h}|f'(U_j^n)| \leq 1 \quad \forall j$$

erfüllt ist.

Satz 12.5. *Jede monotone numerische Methode ist l_1-kontrahierend.*

Satz 12.6. *Die Konsistenzordnung einer monotonen Methode ist höchstens 1.*

Satz 12.7. *Für $k \to 0$ konvergieren die mit einer konsistenten, monotonen numerischen Methode berechneten Lösungen gegen die Entropielösung.*

In Anbetracht von Satz 12.6 ist die Eigenschaft der Monotonie eine zu strenge Stabilitätsforderung. Im folgenden Abschnitt werden wir uns auf die TVD-Eigenschaft beschränken, was uns gestattet, stabile Methoden mit höherer Konsistenzordnung herzuleiten.