

10. Das Godunov-Verfahren

Wir suchen eine Verallgemeinerung der Upwind-Methode (7.13). Eine Möglichkeit ist das **Courant-Isaacson-Rees-Verfahren**, das darin besteht, in (7.13) die Matrix \mathbf{A} durch $\mathbf{f}'(\mathbf{U}_j^n)$ zu ersetzen. Eine andere Interpretation ist die, daß zur Berechnung von \mathbf{U}_j^{n+1} die Gleichung

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{U}_j^n)\mathbf{u}_x = 0$$

in dem Intervall (t_n, t_{n+1}) exakt gelöst wird, wobei für die Anfangsdaten an $t = t_n$ lineare Interpolation von \mathbf{U}^n verwendet wird. Diese Methode ist nicht konservativ. Für die Burgersgleichung ist sie identisch mit der Methode (9.1). Das Courant-Isaacson-Rees-Verfahren ist daher im allgemeinen nur für die Berechnung klassischer Lösungen geeignet.

Das **Godunov-Verfahren** ist eine konservative Verallgemeinerung der Upwind-Methode. Es besteht aus zwei Schritten. Zunächst wird eine auf dem Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ definierte Funktion $\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t)$ auf folgende Art konstruiert. $\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t)$ ist eine exakte Entropielösung des nichtlinearen Erhaltungssatzes, mit stückweise konstanten Anfangsdaten:

$$\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t_n) = \mathbf{U}_j^n, \quad x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$$

Im zweiten Schritt wird \mathbf{U}_j^{n+1} durch Mittelung bestimmt:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{u}}^n(x, t_{n+1}) dx$$

Wird der Zeitschritt klein genug gewählt, dann kann $\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t)$ durch Lösung voneinander unabhängiger Riemann-Probleme bestimmt werden. Es ist leicht einzusehen, daß

$$\nu = \max_{p,j,n} \left| \frac{k}{h} \lambda_p(\mathbf{U}_j^n) \right| \leq \frac{1}{2} \quad (10.1)$$

eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß die von den Punkten $x_{j+1/2}$ ausgehenden Wellen nicht interagieren.

Die integrierte Form des Erhaltungssatzes für $\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t)$ zeigt, daß die Methode konservativ ist mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}^n(x_{j+1/2}, t)) dt.$$

Die Berechnung des numerischen Flusses vereinfacht sich stark durch die Beobachtung, daß $\tilde{\mathbf{u}}^n(x_{j+1/2}, t)$ konstant ist. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)$. Das Godunov-Verfahren ist dann gegeben durch

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h} [\mathbf{f}(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n))]. \quad (10.2)$$

Die Konsistenz des Verfahrens folgt aus der Glattheit von \mathbf{f} .

Die obigen Überlegungen zeigen auch, daß die Schrittweitenrestriktion (10.1) insofern gemildert werden kann, als wir nur mehr fordern müssen, daß die $\tilde{\mathbf{u}}^n(x_{j+1/2}, t)$ nicht von benachbarten Riemann-Problemen gestört werden:

$$\nu \leq 1 \quad (10.3)$$

Man beachte, daß die Bedingung (10.3) gestattet, daß Wellen von benachbarten Riemann-Problemen miteinander interagieren.

Für **lineare Systeme** reduziert sich das Godunov-Verfahren auf die Upwind-Methode (7.13). Für den numerischen Fluß ergeben sich die alternativen Schreibweisen

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) = \mathbf{A}\mathbf{U}_j + \mathbf{A}^-(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \mathbf{A}\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{A}^+(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j+1}) - \frac{1}{2}|\mathbf{A}|(\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j), \quad (10.4)$$

mit $|\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$. Die dritte Alternative führt auf eine neue Formulierung der Upwind-Methode:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{2h} \mathbf{A}(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) + \frac{k}{2h} |\mathbf{A}|(\mathbf{U}_{j+1}^n - 2\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j-1}^n) \quad (10.5)$$

Diese Schreibweise werden wir später wegen ihrer formalen Ähnlichkeit zum Lax-Wendroff-Verfahren noch verwenden.

Existiert für das nichtlineare System eine **Entropiebedingung** der Form

$$\eta(\mathbf{u})_t + \psi(\mathbf{u})_x \leq 0 \quad \text{im schwachen Sinn,}$$

mit einer konvexen Entropiefunktion $\eta(\mathbf{u})$, so kann man zeigen, daß das Godunov-Verfahren einer diskreten Entropieungleichung genügt. Da $\tilde{\mathbf{u}}^n$ eine exakte Entropielösung ist, erfüllt es die obige Entropiebedingung. Integration über $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ ergibt

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t_{n+1})) dx \leq \eta(\mathbf{U}_j^n) - \frac{k}{h} [\psi(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)) - \psi(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n))].$$

Wegen der Konvexität von η folgt aus der **Ungleichung von Jensen**

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta(\tilde{\mathbf{u}}^n(x, t_{n+1})) dx.$$

Definiert man den numerischen Entropiefluß

$$\Psi(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) = \psi(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1})),$$

der konsistent mit ψ ist, dann folgt die diskrete Entropieungleichung

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \eta(\mathbf{U}_j^n) - \frac{k}{h} (\Psi(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - \Psi(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)).$$

11. Näherungsweise Lösung des Riemann-Problems

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit sogenannten **Approximate Riemann Solvers**. Dabei werden Lösungen $\hat{\mathbf{u}}(x, t)$ von approximativen Riemann-Problemen

$$\hat{\mathbf{u}}_t + \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) = 0, \quad \hat{\mathbf{u}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_l & x < 0, \\ \mathbf{u}_r & x > 0, \end{cases} \quad (11.1)$$

verwendet. Man beachte, daß die Näherung $\hat{\mathbf{f}}$ von den Daten \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r des Riemann-Problems als Parameter abhängt. Eine Möglichkeit besteht nun darin, in (10.2) $\mathbf{u}^*(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ durch den konstanten Wert $\hat{\mathbf{u}}(0, t)$ zu ersetzen.

In einem zweiten Zugang, auf den wir uns hier konzentrieren, setzt man analog zum Godunov-Verfahren

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{\mathbf{u}}^n(x, t_{n+1}) dx. \quad (11.2)$$

Wegen der Abhängigkeit der Funktion $\hat{\mathbf{f}}$ von den Daten des Riemann-Problems wird für jedes Riemann-Problem ein anderer Erhaltungssatz verwendet. Daher müssen wir zunächst auch eine Annahme ähnlich zu (10.1) für den Zeitschritt machen, damit die von den $x_{j+1/2}$ ausgehenden Wellen nicht interagieren. Weiters kann \mathbf{U}_j^{n+1} nicht wie beim Godunov-Verfahren durch *eine* Integration berechnet werden. Statt dessen integrieren wir den approximativen Erhaltungssatz einmal über das Rechteck $[x_{j-1/2}, x_j] \times [t_n, t_{n+1}]$ und einmal über das Rechteck $[x_j, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{k}{h} (\mathbf{a}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) + \mathbf{b}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)), \quad (11.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}); \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}; \mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Hier gilt $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) = \hat{\mathbf{u}}(0, t)$ für die Lösung $\hat{\mathbf{u}}$ von (11.1). Ist diese Methode konservativ und konsistent?

Satz. Ein Verfahren der Form (11.3) mit glatten Funktionen \mathbf{a} und \mathbf{b} ist genau dann konservativ, wenn es eine Funktion $\mathbf{c}(\mathbf{u})$ gibt, sodaß

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{c}(\mathbf{v}) - \mathbf{c}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \quad (11.5)$$

gilt. Ein numerischer Fluß ist dann gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{v}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}). \quad (11.6)$$

Ein solches Verfahren ist konsistent, wenn \mathbf{c} Lipschitzstetig ist und

$$-\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{c}(\mathbf{u}). \quad (11.7)$$

Beweis. Unter der Annahme, daß (11.5) gilt, ist leicht zu zeigen, daß das Verfahren (11.3) konservativ ist mit dem durch (11.6) gegebenen numerischen Fluß. Nehmen wir andererseits die Konservativität an, dann muß es einen numerischen Fluß \mathbf{F} geben, sodaß

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (11.8)$$

Ableitung dieser Gleichung nach \mathbf{u} gibt $\mathbf{a}_{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{u}}$, und daher

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{c}(\mathbf{v})$$

für eine Funktion \mathbf{c} . Setzen wir das in (11.8) ein, so folgt die Gleichung (11.5). Die Bedingung (11.7) ist offensichtlich hinreichend für die Konsistenz des Verfahrens. ■

Sind \mathbf{a} und \mathbf{b} durch (11.4) gegeben, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für Konservativität und Konsistenz des Verfahrens die Gleichung

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}). \quad (11.9)$$

Der numerische Fluß ist dann gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) + \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (11.10)$$

11.1. Das Verfahren von Roe

Ein Verfahren, das auf Roe (1981) zurückgeht, verwendet die Wahl $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r) = \mathbf{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)\mathbf{u}$. Die Bedingung (11.9) nimmt dann die Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}). \quad (11.11)$$

an. Roe hat die Bedingung (11.11) an die Matrix \mathbf{A} formuliert, ohne den Satz zu verwenden. Zwei weitere Forderungen, die er gestellt hat, sind

$$\mathbf{A} \text{ ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten, d.h. } \mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad (11.12)$$

und

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}). \quad (11.13)$$

Eine Matrix-wertige Funktion $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, die (11.11) – (11.13) erfüllt, nennen wir **Roe-Matrix**.

Existenz einer Roe-Matrix: Man kann zeigen, daß durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{f}'(\mathbf{u} + \theta(\mathbf{v} - \mathbf{u})) d\theta$$

eine Roe-Matrix gegeben ist. Diese Formel ist allerdings im allgemeinen kein praktikabler Weg zur Bestimmung einer Roe-Matrix.

Drei Schreibweisen für den numerischen Fluß im Roe-Verfahren sind

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{A}^+(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}^-(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})) - |\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v})|(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (11.14)$$

mit $\mathbf{A}^\pm = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^\pm\mathbf{R}^{-1}$ und $|\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$. Man vergleiche mit (10.4) (Godunov-Verfahren für lineare Probleme bzw. Upwind-Methode).

Abgesehen von Konservativität und Konsistenz des entstehenden Verfahrens hat eine Roe-Matrix noch weitere günstige Eigenschaften. Sind zum Beispiel \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r durch eine Stoßwelle oder Kontaktunstetigkeit verbunden, gilt also für ein geeignetes s

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_l) = s(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l),$$

dann ist wegen der Eigenschaft (11.11) $(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l)$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_r)$ zum Eigenwert s . Daraus folgt, daß die Näherungslösung $\hat{\mathbf{u}}$ in diesem Fall mit der exakten Lösung übereinstimmt.

Ein Nachteil ist, daß die Näherungslösung nur Sprünge, aber keine Verdünnungswellen enthält. Angewendet auf die Burgersgleichung, ist das Roe-Verfahren äquivalent zu der in Kapitel 9 besprochenen, konservativen Verallgemeinerung der Upwind-Methode. Wir haben festgestellt, daß dieses Verfahren in gewissen Situationen entropieverletzende Stoßwellen approximiert. Da von der Lösung jedes approximativen Riemann-Problems nur $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ die numerische Lösung beeinflusst, ist ein Fehlverhalten nur dann zu erwarten, wenn die exakte Lösung eine transonische Verdünnungswelle enthält. Im Folgenden wird eine Abhilfe für dieses Problem vorgestellt.

11.2. Die Konstruktion eines “sonic entropy fix”

Wir behandeln zunächst skalare Probleme. Für ein skalares Problem tritt eine transonische Verdünnung auf, wenn

$$f'(u_l) < 0 < f'(u_r) \quad (11.15)$$

gilt. In diesem Fall ersetzen wir

$$\hat{f}(u; u_l, u_r) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} u$$

des Verfahrens von Roe durch eine bessere Approximation für f , die die Bedingung (11.9) erfüllt und deren Minimum leicht zu bestimmen ist. Das Minimum ist gerade der Wert $\hat{w}(u_l, u_r)$, der für die Auswertung des numerischen Flusses (11.10) benötigt wird.

Beispiel 1:

$$\hat{f}(u; u_l, u_r) = \begin{cases} f(u_l) + f'(u_l)(u - u_l) & u \leq u_s(u_l, u_r), \\ f(u_r) + f'(u_r)(u - u_r) & u \geq u_s(u_l, u_r), \end{cases}$$

mit

$$u_s(u, v) = \frac{vf'(v) - uf'(u)}{f'(v) - f'(u)} - \frac{f(v) - f(u)}{f'(v) - f'(u)}.$$

Wegen $\hat{f}(u; u, v) = f(u)$ und $\hat{f}(v; u, v) = f(v)$ ist (11.9) offensichtlich erfüllt. Unter der Annahme (11.15) nimmt \hat{f} sein Minimum an der Stelle u_s an. Der numerische Fluß ist gegeben durch

$$F(u, v) = f(u) + f'(u)(u_s(u, v) - u) = f(v) + f'(v)(u_s(u, v) - v).$$

Für diese Methode kann gezeigt werden, daß sie eine diskrete Entropiebedingung erfüllt.

Beispiel 2:

$$\hat{f}(u; u_l, u_r) = \frac{a(u_l, u_r)}{2}(u - u_l)(u - u_r) + f(u_l)\frac{u - u_r}{u_l - u_r} + f(u_r)\frac{u - u_l}{u_r - u_l}$$

mit der Approximation

$$a(u, v) = \frac{f'(u) - f'(v)}{u - v}$$

für die zweite Ableitung von f . Auch hier gilt $\hat{f}(u; u, v) = f(u)$ und $\hat{f}(v; u, v) = f(v)$ und damit (11.9). Das Minimum von \hat{f} wird an

$$u_s(u, v) = \frac{u + v}{2} - \frac{f(v) - f(u)}{f'(v) - f'(u)}$$

angenommen. Der numerische Fluß ist

$$F(u, v) = f(v) - \frac{a(u, v)}{2}(u_s(u, v) - v)^2 = f(u) - \frac{a(u, v)}{2}(u_s(u, v) - u)^2.$$

Für Systeme ergibt sich zunächst die Schwierigkeit festzustellen, ob in der exakten Lösung eine transonische Verdünnung zu erwarten ist. Eine mögliche Vorgangsweise sieht folgendermaßen aus: Wir lösen zunächst das dem Verfahren von Roe entsprechende lineare Riemann-Problem. Die Lösung links bzw. rechts der p -ten Charakteristik bezeichnen wir mit \mathbf{u}_{pl} bzw. \mathbf{u}_{pr} . Dann werden die Eigenwerte $\lambda_{pl} = \lambda_p(\mathbf{u}_{pl})$ und $\lambda_{pr} = \lambda_p(\mathbf{u}_{pr})$ der Matrix \mathbf{f}' berechnet. Das Auftreten einer transonischen Verdünnung im q -ten Feld wird angenommen, wenn

$$\lambda_{ql} < 0 < \lambda_{qr} \quad (11.16)$$

gilt. In diesem Fall transformieren wir zunächst auf die charakteristischen Variablen $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$. Für das lineare Problem gilt dann

$$\alpha_{pt} + \lambda_p \alpha_{px} = 0, \quad p = 1, \dots, m.$$

Dieses modifizieren wir, indem die q -te Gleichung durch

$$\alpha_{qt} + \hat{f}_q(\alpha_q)_x = 0$$

mit einer geeigneten Funktion \hat{f}_q ersetzt wird. In den ursprünglichen Variablen geschrieben, ergibt das (11.1) mit dem Fluß

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_q \mathbf{u} + \hat{f}_q(\mathbf{s}_q \cdot \mathbf{u}) \mathbf{r}_q \quad (11.17)$$

mit

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{R} \mathbf{A}_q \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{A}_q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}, 0, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_m).$$

Die Linkseigenvektoren von \mathbf{A} , d.h. die Zeilen von \mathbf{R}^{-1} , werden mit \mathbf{s}_p , $p = 1, \dots, m$ bezeichnet. Man beachte, daß in (11.17) der Einfachheit halber die Abhängigkeit des Flusses von den Daten des Riemann-Problems unterdrückt wurde. Sowohl \mathbf{A}_q als auch \hat{f}_q , \mathbf{s}_q und \mathbf{r}_q hängen von \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r ab.

Das entstehende Verfahren ist konservativ und konsistent, wenn die Bedingung (11.9),

$$\mathbf{A}_q(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + [\hat{f}_q(\mathbf{s}_q \cdot \mathbf{v}) - \hat{f}_q(\mathbf{s}_q \cdot \mathbf{u})] \mathbf{r}_q = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (11.18)$$

erfüllt ist. In dieser Gleichung sind die nicht explizit auftretenden \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r durch \mathbf{u} und \mathbf{v} zu ersetzen. Führen wir nun wieder eine Transformation $\mathbf{u} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{v} = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$ auf charakteristische Variable durch und multiplizieren (11.18) mit \mathbf{R}^{-1} , so erhalten wir die äquivalente Formulierung

$$\mathbf{A}_q(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}) + [\hat{f}_q(\boldsymbol{\beta}_q) - \hat{f}_q(\boldsymbol{\alpha}_q)] \mathbf{e}_q = \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})]. \quad (11.19)$$

Hier bezeichnet \mathbf{e}_q den q -ten kanonischen Basisvektor im \mathbb{R}^m . Da \mathbf{A} die Bedingung (11.11) erfüllt, gilt

$$\lambda_p(\beta_p - \alpha_p) = \mathbf{s}_p \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})], \quad p = 1, \dots, m,$$

woraus folgt, daß in (11.19) alle Zeilen bis auf die q -te erfüllt sind. Die q -te Zeile kann geschrieben werden als

$$\hat{f}_q(\beta_q) - \hat{f}_q(\alpha_q) = \lambda_q(\beta_q - \alpha_q). \quad (11.20)$$

Die Funktion \hat{f}_q muß so gewählt werden, daß (11.20) gilt.

Beispiel 1: In Anlehnung an den skalaren Fall wählen wir

$$\hat{f}_q(\alpha) = c + \begin{cases} \lambda_{ql}(\alpha - \alpha_s) & \alpha \leq \alpha_s, \\ \lambda_{qr}(\alpha - \alpha_s) & \alpha \geq \alpha_s. \end{cases}$$

Die Wahl der additiven Konstanten c ist für das Weitere ohne Bedeutung. Der Wert α_s wird so gewählt, daß (11.20) erfüllt ist. Das gibt

$$\alpha_s = \frac{\lambda_{qr}\beta_q - \lambda_{ql}\alpha_q}{\lambda_{qr} - \lambda_{ql}} - \frac{\lambda_q(\beta_q - \alpha_q)}{\lambda_{qr} - \lambda_{ql}}.$$

Beispiel 2:

$$\hat{f}_q(\alpha) = \frac{a}{2}(\alpha - \alpha_s)^2 + c$$

Wir wählen

$$a = \frac{\lambda_{qr} - \lambda_{ql}}{\beta_q - \alpha_q}$$

als Approximation für $\nabla \lambda_q \cdot \mathbf{r}_q$. Für α_s ergibt sich aus (11.20)

$$\alpha_s = \frac{\alpha_q + \beta_q}{2} - \frac{\lambda_q}{a}.$$

Für die Berechnung des numerischen Flusses benötigen wir

$$\widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{R}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \widehat{\alpha}_p = \begin{cases} \alpha_p & \lambda_p > 0, p \neq q, \\ \beta_p & \lambda_p < 0, p \neq q, \\ \alpha_s & p = q. \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) + \mathbf{A}_q(\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{v}) + [\widehat{f}_q(\alpha_s) - \widehat{f}_q(\beta_q)]\mathbf{r}_q = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_q(\widehat{\mathbf{w}} - \mathbf{u}) + [\widehat{f}_q(\alpha_s) - \widehat{f}_q(\alpha_q)]\mathbf{r}_q.$$

Definieren wir $\widetilde{\lambda}_q$ durch

$$\widehat{f}_q(\alpha_s) - \widehat{f}_q(\beta_q) = \widetilde{\lambda}_q(\alpha_q - \beta_q),$$

so gilt

$$\widehat{f}_q(\alpha_s) - \widehat{f}_q(\alpha_q) = (\lambda_q - \widetilde{\lambda}_q)(\beta_q - \alpha_q).$$

Für den numerischen Fluß ergeben sich dann analog zu (11.14) die drei Schreibweisen

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \widetilde{\mathbf{A}}^+(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \widetilde{\mathbf{A}}^-(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\mathbf{v})}{2} - |\widetilde{\mathbf{A}}|(\mathbf{v} - \mathbf{u}),$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{A}}^+ &= \mathbf{R} \operatorname{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_{q-1}^+, \widetilde{\lambda}_q, \lambda_{q+1}^+, \dots, \lambda_m^+) \mathbf{R}^{-1}, \\ \widetilde{\mathbf{A}}^- &= \mathbf{R} \operatorname{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_{q-1}^-, \lambda_q - \widetilde{\lambda}_q, \lambda_{q+1}^-, \dots, \lambda_m^-) \mathbf{R}^{-1}, \end{aligned}$$

und $|\widetilde{\mathbf{A}}| = \widetilde{\mathbf{A}}^+ - \widetilde{\mathbf{A}}^-$.

Beispiel 1:

$$\widetilde{\lambda}_q = \lambda_{qr} \frac{\lambda_q - \lambda_{ql}}{\lambda_{qr} - \lambda_{ql}}$$

Beispiel 2:

$$\widetilde{\lambda}_q = \frac{1}{2}(\lambda_{qr} - \lambda_{ql}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_q}{\lambda_{qr} - \lambda_{ql}} \right)^2$$

11.3. Die Konstruktion einer Roe-Matrix

Es ist im allgemeinen nicht besonders schwer, irgendeine Roe-Matrix zu finden. Aus offensichtlichen Gründen ist es allerdings angebracht, die Bedingung (11.12) in dem Sinn zu ergänzen, als die Eigenwerte und Eigenvektoren leicht zu berechnen sein sollten.

Als Beispiel präsentieren wir die Konstruktion einer Roe-Matrix für die isothermischen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + a^2 \rho \end{pmatrix}_x = 0.$$

Die Idee besteht darin, neue Variable $\mathbf{z} = (\alpha, \beta)^{tr}$ einzuführen, sodaß die Komponenten von \mathbf{u} und $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ als quadratische Polynome in den Koeffizienten von \mathbf{z} geschrieben werden können. Für die isothermischen Gleichungen wählen wir

$$\mathbf{z} = \rho^{-1/2} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho v} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ a^2 \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Das Besondere an quadratischen Polynomen $g(\mathbf{z})$ ist die Gleichung

$$g(\mathbf{z}_1) - g(\mathbf{z}_2) = \nabla g(\bar{\mathbf{z}}) \cdot (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2),$$

mit dem arithmetischen Mittel $\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$. Es gilt daher

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{B}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2), \quad \text{mit } \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{z}}) = \begin{pmatrix} 2\bar{\alpha} & 0 \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{C}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2), \quad \text{mit } \mathbf{C} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{z}}) = \begin{pmatrix} \bar{\beta} & \bar{\alpha} \\ 2a^2\bar{\alpha} & 2\bar{\beta} \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\mathbf{A}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$ eine Matrix, die die Bedingung (11.11) erfüllt. Weiters gilt $\mathbf{C} = \mathbf{f}'(\mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}}))\mathbf{B}$ und damit

$$\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{u}(\bar{\mathbf{z}})).$$

Die Bedingung (11.12) ist klarerweise erfüllt, und die Eigenwerte und Eigenvektoren sind die der Matrix \mathbf{f}' . Da \mathbf{u} glatt von \mathbf{z} abhängt, gilt offensichtlich auch (11.13).

Die so konstruierte Roe-Matrix für die isothermischen Gleichungen ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{v}^2 & 2\tilde{v} \end{pmatrix}$$

mit der ρ -gemittelten Geschwindigkeit

$$\tilde{v} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} = \frac{\sqrt{\rho_1}v_1 + \sqrt{\rho_2}v_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}. \quad (11.21)$$

Eine analoge Konstruktion läßt sich für die Eulergleichungen durchführen, wobei $\mathbf{z} = \sqrt{\rho}(1, v, H)^{tr}$ (mit der durch $\rho H = E + p$ definierten **spezifischen Enthalpie** H) gewählt wird. Es ergibt sich die Roe-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3)\tilde{v}^2/2 & (3 - \gamma)\tilde{v} & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)\tilde{v}^3/2 - \tilde{v}\tilde{H} & \tilde{H} - (\gamma - 1)\tilde{v}^2 & \gamma\tilde{v} \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet \tilde{H} die analog zu (11.21) ρ -gemittelte spezifische Enthalpie. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\tilde{v} - \tilde{c}$, \tilde{v} und $\tilde{v} + \tilde{c}$ mit der gemittelten Version

$$\tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{\tilde{v}^2}{2} \right)}$$

der Schallgeschwindigkeit.