Lernbehelf zur Vorlesung

Numerische Methoden für hyperbolische Erhaltungssätze

Christian Schmeiser

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, TU Wien

Literatur: Randall J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

Teil I: Mathematische Theorie

1. Skalare Erhaltungssätze

1.1. Verkehrsfluß — Die Burgers-Gleichung

Dichte (Anzahl pro Längeneinheit) der Fahrzeuge am Ort x zum Zeitpunkt t: $\rho(x,t)$. Geschwindigkeit der Fahrzeuge am Ort x zum Zeitpunkt t: $v(x,t)$. Anzahl der Fahrzeuge pro Zeiteinheit, die eine Stelle passieren: $\rho(x,t)v(x,t)$. Fahrzeugerhaltung im Intervall $[x_1, x_2]$:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = \rho(x_1,t)v(x_1,t) - \rho(x_2,t)v(x_2,t)$$

Daraus folgt wegen der Beliebigkeit von x_1 und x_2:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0$$

Einfaches Modell für die Geschwindigkeit: $v = v_{max}(1 - \rho/\rho_{max})$. Skalierung:

$$x \longrightarrow lx\,, \qquad t \longrightarrow \tau t\,, \qquad \text{mit } l/\tau = v_{max}\,,$$

und die Transformation:

$$\rho - \frac{\rho_{max}}{2} = -\frac{\rho_{max}}{2}u\,,$$

liefern die reibungsfreie Burgers-Gleichung

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \qquad \text{oder} \qquad u_t + uu_x = 0\,.$$

Allgemeiner:

$$u_t + f(u)_x = 0 \qquad \text{oder} \qquad u_t + f'(u)u_x = 0\,. \tag{1.1}$$

Die Funktion $f(u)$ wird als **Fluß** bezeichnet. Typische Annahme: $f''(u) > 0$ für alle u ("Echte Nichtlinearität").

Berücksichtigung von "Reibungseffekten" (z.B. Intelligenz von Autofahrern):

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}\,, \qquad \text{mit } 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{1.2}$$

Anfangswertproblem:

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{1.3}$$

1.2. Nichtexistenz klassischer Lösungen — Schwache Formulierung

Lösung von (1.1), (1.3) mit der Methode der Charakteristiken:

$$\dot{x} = f'(u)\,, \qquad \dot{u} = 0$$

Die Charakteristiken sind geradlinig (konstante Geschwindigkeit $f'(u)$). Die Lösung ist konstant entlang von Charakteristiken.

Beispiel 1: Burgers-Gleichung ($f(u) = u^2/2$). Die Anfangsdichte nimmt mit der Fahrtrichtung ab:

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -a, \\ \frac{x}{a} & \text{für } -a \le x \le a, \\ 1 & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Lösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -a-t, \\ \frac{x}{a+t} & \text{für } -a-t \le x \le a+t, \\ 1 & \text{für } x > a+t. \end{cases}$$

Beispiel 2: Die Anfangsdichte nimmt mit der Fahrtrichtung zu:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -a, \\ -\frac{x}{a} & \text{für } -a \le x \le a, \\ -1 & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Lösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -a+t, \\ \frac{x}{t-a} & \text{für } -a+t \le x \le a-t, \\ -1 & \text{für } x > a-t. \end{cases}$$

Die Lösung wird an $t = a$ unstetig. Für $t \ge a$ kann daher keine klassische Lösung existieren.

Schwache Formulierung von (1.1), (1.3): Sei $C_0^1(\mathbb{R}^2)$ (stetig differenzierbar, kompakter Träger) der Raum der Testfunktionen. Wir multiplizieren (1.1) mit $\phi = \phi(x,t) \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ und integrieren partiell:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)]\,dx\,dt = -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)u_0(x)\,dx \tag{1.4}$$

Definition. *Die Funktion $u(x,t)$ heißt schwache Lösung von (1.1), (1.3), wenn (1.4) für alle $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ gilt.*

Bemerkung: Jede klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung. Schwache Lösungen brauchen nicht differenzierbar zu sein. Schwache Lösungen erfüllen oft die integrierte Version des Erhaltungssatzes:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)) \tag{1.5}$$

1.3. Das Riemann-Problem — Stoßwellen — Verdünnungswellen

Das Riemann-Problem ist ein Problem der Form (1.1), (1.3) mit

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < 0, \\ u_r & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Da mit $u(x,t)$ auch $u(\alpha x, \alpha t)$ Lösung des Riemann-Problems ist, hängt die Lösung nur von $\xi = x/t$ ab: $u = u(\xi)$. Einsetzen in (1.1) gibt

$$\frac{du}{d\xi}(f'(u) - \xi) = 0\,.$$

1. Fall: $u = \text{const}$,

2. Fall: Mit der Annahme $f'' > 0$ hat die Gleichung $f'(u) = \xi$ die eindeutige Lösung $u = u_v(\xi)$. Die Lösung $u(x,t) = u_v(x/t)$ heißt Verdünnungswelle.

Eine dritte Möglichkeit ist ein Sprung entlang eines Strahles $x/t = \text{const}$. Es gibt eine schwache Lösung des Riemann-Problems der Form

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < st, \\ u_r & \text{für } x > st. \end{cases} \tag{1.6}$$

Eine solche Lösung heißt Stoßwelle. Die Stoßgeschwindigkeit s wird aus (1.5) bestimmt. Das gibt die **Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung**

$$s(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)\,. \tag{1.7}$$

Bemerkung: Ist die Lösung links und rechts der Unstetigkeit nicht konstant, dann variiert auch die Geschwindigkeit der Stoßwelle. Die Sprungbedingung behält ihre Gültigkeit, wobei allerdings s als die Momentangeschwindigkeit der Stoßwelle und u_l und u_r als links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte an der Unstetigkeit aufgefaßt werden müssen.

Beispiel: Für die Burgers-Gleichung ergibt sich

$$s = \frac{u_l + u_r}{2}\,. \tag{1.8}$$

Es gibt nun 2 Fälle:

A) $u_l > u_r$. In diesem Fall ist die Stoßwellenlösung (1.6) die einzige schwache Lösung des Riemann-Problems.

B) $u_l < u_r$. Eine zweite schwache Lösung ist gegeben durch die Verdünnungswelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & \text{für } x < f'(u_l)t, \\ u_v(x/t) & \text{für } f'(u_l)t \le x \le f'(u_r)t, \\ u_r & \text{für } x > f'(u_r)t. \end{cases} \tag{1.9}$$

Es gibt allerdings noch unendlich viele andere Lösungen, die aus Kombinationen von Stoß- und Verdünnungswellen bestehen.

Manipulationen mit Erhaltungssätzen: Multipliziert man die Burgers-Gleichung mit $2u$, so läßt sich das Resultat schreiben als

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0\,. \tag{1.10}$$

Das ist ein Erhaltungssatz für die Größe u^2. Offensichtlich haben (1.10) und die Burgers-Gleichung dieselben differenzierbaren Lösungen. Für schwache Lösungen gilt diese Äquivalenz allerdings nicht. Für Stoßwellenlösungen von (1.10) ergibt sich aus der Sprungbedingung (1.7) die Stoßgeschwindigkeit

$$s = \frac{2}{3}\,\frac{u_l^3 - u_r^3}{u_l^2 - u_r^2}\,,$$

was sich klarerweise von (1.8) unterscheidet.

Welche Formulierung eines Erhaltungssatzes die richtige ist, kann nur auf der Basis von physikalischen Überlegungen entschieden werden.

1.4. Entropiebedingungen

Wie kann die Lösung in obigem Fall B) eindeutig gemacht werden? Eine Möglichkeit besteht darin, das Problem (1.1), (1.3) als Grenzfall des "viskosen" Problems (1.2), (1.3) für $\varepsilon \to 0$ zu betrachten. Lösungen der parabolischen Gleichung (1.2) sind für $t > 0$ glatt. Unstetige Lösungen von (1.1) sind daher nur dann zulässig, wenn sie durch Grenzschichten geglättet werden können. Für eine Stoßwelle entlang von $x = st$ ergibt sich mit der Grenzschichtvariablen

$$\eta = \frac{x - st}{\varepsilon}$$

aus (1.2) die Grenzschichtgleichung

$$-su_\eta + f(u)_\eta = u_{\eta\eta}\,.$$

Wir suchen nach Lösungen mit

$$\lim_{\eta\to-\infty} u = u_l\,, \qquad \lim_{\eta\to\infty} u = u_r\,.$$

Aus dieser Forderung läßt sich die Sprungbedingung (1.7) ableiten. Zusätzlich ist aber die Entropiebedingung (erste Version)

$$f'(u_l) > s > f'(u_r)$$

notwendig. Unter der Annahme $f'' > 0$ ist diese Bedingung auch hinreichend und gilt genau dann, wenn $u_l > u_r$. Das bedeutet, daß die Stoßwellenlösung des Riemann-Problems nur im Fall A) die Entropiebedingung erfüllt, während im Fall B) die Verdünnungswelle (1.9) die einzige schwache Lösung ist, die keine entropieverletzenden Sprünge enthält. Die Entropiebedingung macht also die Lösung des Riemann-Problems eindeutig (**Entropielösung**).

Statt eine Glättung in der Differentialgleichung durchzuführen, läßt sich die Entropielösung des Riemann-Problems auch mit Hilfe einer Glättung der Anfangsdaten herleiten. Die Lösung in Beispiel 1 von Abschnitt 1.2 konvergiert für $a \to 0$ gegen eine Verdünnungswelle. Die Stoßwelle ist bezüglich kleiner Änderungen der Anfangsdaten nur dann stabil, wenn die Entropiebedingung erfüllt ist. Das kann man auch damit begründen, daß in diesem Fall die Charakteristiken in die Stoßwelle "hineinlaufen", während sie im Fall eines entropieverletzenden **Verdünnungsstoßes** aus der Stoßwelle herauslaufen.

Eine andere Version der Entropiebedingung wird mit Hilfe einer **Entropiefunktion** formuliert. Sei $\eta(u)$ eine konvexe Funktion ($\eta'' > 0$) und $\psi(u)$ eine Stammfunktion von $\eta'(u)f'(u)$. Dann gilt für klassische Lösungen von (1.1)

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x = 0\,. \tag{1.11}$$

$\eta(u)$ heißt Entropiefunktion und $\psi(u)$ **Entropiefluß**. Schwache Lösungen von (1.1) genügen im allgemeinen nicht der schwachen Formulierung von (1.11).

Multiplikation der viskosen Gleichung (1.2) mit $\eta'(u)$ gibt

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x = \varepsilon\big(\eta'(u)u_x\big)_x - \varepsilon\eta''(u)u_x^2\,.$$

Wir integrieren diese Gleichung:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}[\eta(u)_t + \psi(u)_x]\,dx\,dt =& \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\big[\eta'\big(u(x_2,t)\big)u_x(x_2,t) - \eta'\big(u(x_1,t)\big)u_x(x_1,t)\big]\,dt \\ &-\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\eta''(u)u_x^2\,dx\,dt\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite, während das zweite im allgemeinen wegen der Konvexität der Entropiefunktion gegen eine nichtpositive Zahl konvergiert.

Daraus folgt die zweite Version der Entropiebedingung: Eine schwache Lösung $u(x,t)$ von (1.1), (1.3) ist die Entropielösung, wenn für alle konvexen Entropiefunktionen und die entsprechenden Entropieflüsse im schwachen Sinn die Ungleichung

$$\eta(u)_t + \psi(u)_x \le 0$$

gilt.