

Skriptum zur Vorlesung

**PARTIELLE  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

gehalten von

**Christian Schmeiser**

**Fakultät für Mathematik**

**Universität Wien**

# Contents

Vorwort . . . . .	4
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	5
1.2 Funktionalanalytische Grundbegriffe . . . . .	9
1.3 Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	11
1.4 Distributionen . . . . .	20
1.4.1 Kleine Einführung in die Theorie der Distributionen . . . . .	20
1.4.2 Differentialgleichungen. Fundamentallösungen . . . . .	27
1.5 Die Fouriertransformation . . . . .	31
1.6 Aufgaben . . . . .	34
<b>2 Modellierung</b>	<b>37</b>
2.1 Reagierende Strömungen . . . . .	37
2.2 Wärmeleitung . . . . .	38
2.2.1 Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	38
2.2.2 Zusatzbedingungen . . . . .	40
2.3 Die schwingende Saite . . . . .	42
<b>3 Das Cauchyproblem</b>	<b>47</b>
3.1 Der Satz von Cauchy-Kowalewskaja . . . . .	47
3.2 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung . . . . .	51
3.3 Klassifikation quasilinearer Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	55
3.4 Aufgaben . . . . .	58
<b>4 Elliptische Gleichungen</b>	<b>61</b>
4.1 Der Laplaceoperator . . . . .	61
4.1.1 Die Fundamentallösung. Greensche Funktionen . . . . .	61

4.1.2	Die Poissonsche Integralformel für Kugeln . . . . .	65
4.1.3	Das Maximumprinzip . . . . .	67
4.1.4	Eine Anwendung der Fouriertransformation . . . . .	70
4.2	Das Maximumprinzip für elliptische Operatoren . . . . .	71
4.2.1	Das schwache Maximumprinzip . . . . .	71
4.2.2	Das starke Maximumprinzip . . . . .	73
4.2.3	Anwendungen . . . . .	75
4.3	Schwache Lösungen des Dirichletproblems . . . . .	76
4.3.1	Ein Beispiel . . . . .	76
4.3.2	Sobolevräume . . . . .	77
4.3.3	Bilinearformen. Das Lax-Milgram Lemma . . . . .	82
4.3.4	Existenz schwacher Lösungen . . . . .	83
4.3.5	Regularität . . . . .	85
4.3.6	Ein Variationsprinzip. Finite Elemente . . . . .	86
4.4	Aufgaben . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Parabolische Gleichungen</b>	<b>95</b>
5.1	Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	95
5.2	Das Maximumprinzip für parabolische Operatoren . . . . .	96
5.2.1	Wärmeleitung . . . . .	96
5.2.2	Das Maximumprinzip . . . . .	97
5.2.3	Anwendungen . . . . .	102
5.3	Fouriersynthese für parabolische Gleichungen . . . . .	103
5.3.1	Separation der Variablen . . . . .	103
5.3.2	Eigenwertprobleme für symmetrische, kompakte Operatoren . . . . .	105
5.3.3	Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	111
5.3.4	Stark stetige Halbgruppen . . . . .	115
5.3.5	Inhomogene Probleme . . . . .	117
5.3.6	Regularität . . . . .	119
5.3.7	Verhalten für $t \rightarrow \infty$ . . . . .	120
5.4	Aufgaben . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Hyperbolische Gleichungen</b>	<b>125</b>
6.1	Die eindimensionale Wellengleichung . . . . .	125
6.2	Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	133

*CONTENTS*

3

6.3 Energieintegrale . . . . . 137

## Vorwort

In dieser Vorlesung wird die Theorie der partiellen Differentialgleichungen vom Standpunkt des angewandten Mathematikers aus betrachtet. Die Aufgaben der angewandten Mathematik sind

1. MODELLIERUNG = Ersetzen von naturwissenschaftlichen, technischen, ökonomischen, ... Problemen durch mathematische Probleme.
2. LÖSUNG der mathematischen Probleme. Dazu gehört eine Überprüfung der Lösbarkeit. Man nennt ein Problem *sachgemäß gestellt*, wenn für die Lösung gilt:
  - (a) Existenz
  - (b) Eindeutigkeit
  - (c) Stetige Abhängigkeit von den Daten.
3. REPRÄSENTATION (d.h. exakte oder näherungsweise Bestimmung) der Lösung.
4. INTERPRETATION der Resultate

Die hier betrachteten mathematischen Modelle beinhalten partielle Differentialgleichungen. Das Hauptaugenmerk wird auf die "rein mathematischen" Punkte (2) und (3) gelegt. Die für die praktische Arbeit mindestens genau so wichtigen Punkte (1) und (4) dienen hier hauptsächlich der Motivation.

# Chapter 1

## Grundlagen

### 1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

#### Beispiel 1.1 Abkühlung

Wie verändert sich die Temperatur eines Körpers in einer Umgebung mit konstanter Temperatur? Newtonsches Abkühlungsgesetz: *Die Temperaturveränderung pro Zeit ist proportional zur Differenz zwischen Körpertemperatur und Temperatur der Umgebung.* Wir bezeichnen die Körpertemperatur zum Zeitpunkt  $t$  mit  $u(t)$  und die der Umgebung mit  $\bar{u}$ . Für die Temperaturänderung im Zeitraum  $[t, t + \Delta t]$  gilt dann

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = k(\bar{u} - u(t))$$

mit einer Proportionalitätskonstanten  $k > 0$ . Für  $\Delta t \rightarrow 0$  erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = k(\bar{u} - u).$$

Die Temperatur wird durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt. Ein Beispiel für eine Zusatzbedingung ist die Vorgabe der Temperatur zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$u(0) = u_0.$$

Diese *Anfangsbedingung* bildet zusammen mit der Differentialgleichung ein *Anfangswertproblem* (AWP), dessen eindeutige Lösung

gegeben ist durch

$$u(t) = \bar{u} + (u_0 - \bar{u})e^{-kt}.$$

Offensichtlich gilt die Abschätzung

$$|u(t)| \leq |\bar{u}| + |u_0| \quad \text{für } t \geq 0.$$

Damit können wir die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten  $\bar{u}$  und  $u_0$  zeigen. Sei  $\tilde{u}$  Lösung des Problems mit den Daten  $\bar{u} + \bar{\delta}$ ,  $u_0 + \delta_0$ . Dann ist die Differenz  $\tilde{u} - u$  Lösung des Problems mit den Daten  $\bar{\delta}$ ,  $\delta_0$ . Aus der obigen Abschätzung folgt also

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \leq |\bar{\delta}| + |\delta_0| \quad \text{für } t \geq 0.$$

Kleine Fehler in den Daten (Meßfehler, Fehler bei numerischen Verfahren) verursachen kleine Fehler in der Lösung. Die Abbildung von den Daten  $\bar{u}$ ,  $u_0$  auf die Lösung  $u(t)$  ist stetig.

Diese Vorgangsweise ist eine Anwendung des *Superpositionssprinzips*, das für *lineare* Probleme gültig ist. Als Daten bezeichnen wir bei linearen Problemen die Inhomogenitäten. Kann die Lösung durch die Inhomogenitäten abgeschätzt werden, so folgt daraus unmittelbar die stetige Abhängigkeit von den Daten.

Die Lösung zeigt, dass die Abkühlung exponentiell vor sich geht, wobei durch  $k^{-1}$  eine *charakteristische Zeit* gegeben ist, in der die Differenz zwischen Körper- und Umgebungstemperatur um den Faktor  $e^{-1}$  reduziert wird.

### Beispiel 1.2 Pendel

Wir betrachten einen starren gewichtslosen Stab der Länge  $l$  mit einer Punktmasse  $m$  an einem Ende. Am anderen Ende sei er frei drehbar um eine horizontale Achse aufgehängt. Den Winkel zwischen dem Stab und der Vertikalen zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnen wir mit  $\vartheta(t)$ . Die Länge des Weges der Masse  $m$  zwischen ihrer Position zum Zeitpunkt  $t$  und der Vertikalen nennen wir  $s(t)$ . Es gilt die Beziehung

$$s(t) = l\vartheta(t).$$

Damit ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Gesetz

Kraft = Masse \* Beschleunigung

die Gleichung

$$-mg \sin \vartheta = m \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Daraus folgt für den Winkel  $\vartheta(t)$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0.$$

Diese Gleichung ist nichtlinear. Als Vereinfachung betrachten wir den Fall kleiner Schwingungen. Wenn  $\vartheta(t)$  nur kleine Werte annimmt, können wir als Näherung  $\sin \vartheta$  durch  $\vartheta$  ersetzen. Die Gleichung hat dann die Form

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \omega^2 \vartheta = 0,$$

wobei wir  $\omega = \sqrt{g/l}$  gesetzt haben. Zur Bestimmung von  $\vartheta(t)$  lösen wir das AWP

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d\vartheta}{dt}(0) = v_0.$$

Wir geben also Position und Geschwindigkeit des Pendels zum Zeitpunkt  $t = 0$  vor. Die eindeutige Lösung ist

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Die Daten in diesem Problem sind  $\vartheta_0$  und  $v_0$ , und es gilt die Abschätzung

$$|\vartheta(t)| \leq |\vartheta_0| + \frac{1}{\omega} |v_0|.$$

Das Resultat ist eine periodische Schwingung mit der Amplitude

$$\sqrt{\vartheta_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

und der Periode  $2\pi/\omega$ .

Die beiden behandelten Beispiele sind Spezialfälle des AWP

$$\begin{aligned} f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^p u}{dt^p}\right) &= 0, & t > 0, \\ u(0) = u_0, \quad \dots, \quad \frac{d^{p-1} u}{dt^{p-1}}(0) &= u_{p-1}, \end{aligned} \quad (1.1)$$



für eine Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung. Gegeben sind die Funktion  $f : \mathbb{R}^{p+2} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Konstanten  $u_0, \dots, u_{p-1}$ . Ein Zugang zur Lösung dieses Problems beruht auf dem Potenzreihenansatz

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{k!} t^k.$$

Die Koeffizienten  $u_0, \dots, u_{p-1}$  sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Durch Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung, Entwicklung um  $t = 0$  und Koeffizientenvergleich erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(0, u_0, \dots, u_p) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial u_p}(0, u_0, \dots, u_p) u_k &= h_k(u_0, \dots, u_{k-1}) \quad \text{für } k > p, \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit Funktionen  $h_k$ , die mit Hilfe von partiellen Ableitungen der Funktion  $f$  bis zur Ordnung  $k - p$  an der Stelle  $(0, u_0, \dots, u_p)$  definiert sind. Offensichtlich ist die folgende Bedingung notwendig für eine eindeutige Berechnung der Koeffizienten:

**(B)** Die Gleichung (1.2) hat eine Lösung  $u_p$ , für die  $\frac{\partial f}{\partial u_p}(0, u_0, \dots, u_p) \neq 0$  gilt.

Zusätzlich müssen wir verlangen, dass alle partiellen Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $(0, u_0, \dots, u_p)$  existieren. Das alles gewährleistet allerdings noch nicht, dass die so konstruierte formale Potenzreihe für die Lösung für irgendein  $t > 0$  konvergiert. Unter einer noch stärkeren Bedingung an  $f$  kann man das folgende Resultat beweisen:

**Satz 1.1 (Cauchy)** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^{p+2} \rightarrow \mathbb{R}$  sei in einer Umgebung des Punktes  $(0, u_0, \dots, u_p)$  analytisch und erfülle die Bedingung (B). Dann existiert ein  $T > 0$ , sodass die oben konstruierte Potenzreihe in  $(-T, T)$  gegen eine analytische Lösung des Problems (1.1) konvergiert.

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen folgt aus der Bedingung (B), dass in einer Umgebung von  $(0, u_0, \dots, u_p)$  die Differentialgleichung in (1.1) nach der  $p$ -ten Ableitung aufgelöst werden kann:

$$\frac{d^p u}{dt^p} = g \left( t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}} \right) \tag{1.3}$$

Der von Picard entdeckte Zugang gestattet es, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter viel schwächeren Voraussetzungen an die Glattheit der Daten zu beweisen.

**Satz 1.2 (Picard)** Die Funktion  $g(t, y_0, \dots, y_{p-1})$  sei in einer Umgebung des Punktes  $(0, u_0, \dots, u_{p-1})$  stetig in  $t$  und Lipschitzstetig in  $y_0, \dots, y_{p-1}$ . Dann gibt es ein  $T > 0$ , sodass das AWP für (1.3) eine eindeutige Lösung  $u \in C^p((-T, T))$  besitzt.

**Beweis:** (Skizze) Mit Hilfe des Taylorschen Satzes kann man das AWP umschreiben als Fixpunktproblem  $u = F(u)$ , wobei der Fixpunktoperator definiert ist durch

$$F(u)(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{u_k}{k!} t^k + \int_0^t \frac{g\left(s, u(s), \dots, \frac{d^{p-1}u}{dt^{p-1}}(s)\right)}{(p-1)!} (t-s)^{p-1} ds.$$

Nun zeigt man mit Hilfe der Lipschitzstetigkeit von  $g$ , dass für  $T$  klein genug  $F$  eine Kontraktion im Raum  $C^{p-1}((-T, T))$  ist. Die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes folgt damit aus dem Banachschen Fixpunktsatz.  $p$ -maliges Differenzieren der Fixpunktgleichung zeigt, dass der Fixpunkt wirklich in  $C^p((-T, T))$  liegt und eine Lösung der Differentialgleichung (1.3) ist. QED

Der Beweis liefert auch ein konstruktives Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung, die sogenannte *Picarditeration*. Er beruht nämlich darauf, dass eine durch  $u_{l+1} = F(u_l)$  rekursiv definierte Folge gegen die Lösung konvergiert.

## 1.2 Funktionalanalytische Grundbegriffe

Wir betrachten Räume mit einer algebraischen und einer topologischen Struktur. Die algebraische Struktur ist immer die eines *Vektorraumes*. Der Skalarkörper ist in den meisten Fällen der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Man beachte allerdings, dass jeder reelle Vektorraum leicht zu einem komplexen erweitert werden kann: Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Dann definieren wir  $\tilde{V} = \{u + iv : u, v \in V\}$  mit der imaginären Einheit  $i$ . Mit den üblichen Rechenregeln wird  $\tilde{V}$  zu einem Vektorraum über  $\mathbb{C}$ .

Was die topologische Struktur betrifft, sind wir hauptsächlich an normierten Räumen interessiert. Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  heißt normiert, wenn er mit einer Norm ausgestattet ist, d.h. mit einer Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften

- $\|v\| = 0 \iff v = 0$  (Definitheit),

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  für  $u, v \in V$  (Dreiecksungleichung),
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  für  $v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Mit  $d(u, v) = \|u - v\|$  ist in normierten Räumen ein Abstands begriff und damit auch ein Konvergenzbegriff gegeben. Ist  $V$  ein normierter Raum, dann definiert man für die komplexe Erweiterung eine Norm durch  $\|u + iv\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$ .

Ein vollständiger normierter Raum, d.h. einer, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *Banachraum*. Jeder unvollständige normierte Raum kann auf eindeutige Art (bis auf Namensgebung) durch Hinzunahme der Grenzwerte von Cauchyfolgen zu einem Banachraum gemacht werden.

Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  heißt *Prähilbertraum*, wenn er mit einem inneren Produkt ausgestattet ist, d.h. mit einer Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  für  $u, v \in V$  (Symmetrie),
- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$  für  $u, v, w \in V$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (Bilinearität),
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ ;  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$  (Definitheit).

Mit der induzierten Norm  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  ist jeder Prähilbertraum ein normierter Raum. Ist er vollständig, so heißt er *Hilbertraum*. In Prähilberträumen  $V$  gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \text{für } u, v \in V.$$

Für die komplexe Erweiterung eines reellen Prähilbertraumes definiert man ein inneres Produkt durch  $\langle u + iv, x + iy \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, y \rangle + i(\langle v, x \rangle - \langle u, y \rangle)$ . Dieses erfüllt obige Eigenschaften bis auf die erste. Die Symmetrie geht in die Hermite-Eigenschaft über:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ .

Ein *lineares Funktional* auf einem Vektorraum ist eine lineare Abbildung von dem Vektorraum in den Skalarkörper. Für einen Vektorraum  $V$  mit Konvergenzbegriff ist der *Dualraum*  $V'$  die Menge aller folgenstetigen linearen Funktionale auf  $V$ . Der Dualraum ist ein Vektorraum. Für einen Banachraum  $V$  wird auch  $V'$  mit der Norm

$$\|F\|_{V'} = \sup_{\|v\|=1} |F(v)| \quad \text{für } F \in V'$$

zu einem Banachraum.

Eine Folge  $\{v_n\} \subset V$  ist *schwach konvergent* gegen  $v \in V$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = F(v) \quad \text{für alle } F \in V'.$$

Eine Folge  $\{F_n\} \subset V'$  ist *schwach\* konvergent* gegen  $F \in V'$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Ein Hilbertraum kann mit seinem Dualraum identifiziert werden:

**Satz 1.3 (Rieszscher Darstellungssatz)** *Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $F \in \mathcal{H}'$ . Dann gibt es genau ein  $u \in \mathcal{H}$  mit*

$$\langle u, v \rangle = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \|u\|_{\mathcal{H}} = \|F\|_{\mathcal{H}'}. \quad (1.4)$$

*Umgekehrt wird für jedes  $u \in \mathcal{H}$  durch  $F(v) := \langle u, v \rangle$  ein  $F \in \mathcal{H}'$  definiert.*

Der Satz motiviert, dass wir im Folgenden für  $F \in V'$  und  $v \in V$  häufig die Notation  $\langle F, v \rangle := F(v)$  verwenden werden (auch wenn  $V$  kein Hilbertraum ist).

Ein weiterer Begriff, den wir benötigen, ist Kompaktheit:

**Definition 1.1** *Sei  $K$  Teilmenge eines Banachraumes  $B$ . Wenn jede Folge, die in  $K$  liegt, eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $K$  besitzt, dann heißt  $K$  kompakt. Ist der Abschluss von  $K$  kompakt, dann heißt  $K$  präkompakt.*

Der Satz von Bolzano-Weierstraß zeigt, dass in endlichdimensionalen Räumen jede abgeschlossene, beschränkte Menge kompakt ist. Im allgemeinen gilt das nicht. Allerdings ist die Umkehrung leicht zu zeigen:

**Lemma 1.1** *Jede kompakte Menge ist beschränkt und abgeschlossen.*

## 1.3 Funktionen von mehreren Veränderlichen

### Notation

Dieser Abschnitt dient der Begriffsbildung. Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  auch mit  $\boldsymbol{x} = (x, y)$  bzw.

$\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Für das skalare Produkt von 2 Vektoren verwenden wir die Schreibweise  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Die euklidische Norm eines Vektors wird mit  $|\mathbf{x}|$  bezeichnet ( $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ ). Üblicherweise steht  $\Omega$  für Gebiete (offene, zusammenhängende Mengen) im  $\mathbb{R}^n$  und  $\partial\Omega$  für deren Rand. Oft verwendete Gebiete sind offene Kugeln  $K_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$ . Für Kugeln mit Mittelpunkt im Ursprung schreiben wir auch  $K_r := K_r(0)$ . Der Abschluss einer Menge  $\Omega$  wird mit  $\bar{\Omega}$  bezeichnet. Den *Gradienten* einer Funktion  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$  bezeichnen wir mit

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad \text{wobei wir formal} \quad \nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

setzen. Für einen Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  bezeichnen wir die Richtungsableitung von  $u$  in Richtung  $\mathbf{a}$  mit  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}}$ . Für stetig differenzierbare  $u$  gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \nabla u.$$

Einen Vektor  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)^T \in (\mathbb{N}_0)^n$  nennen wir einen *Multiindex* und definieren seine Ordnung  $|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n$  und Fakultät  $\mathbf{k}! := k_1! \dots k_n!$ . Für einen Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  und einen Multiindex  $\mathbf{k}$  definieren wir

$$\mathbf{y}^{\mathbf{k}} := y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}.$$

Durch einen Multiindex  $\mathbf{k}$  ist eine partielle Ableitung der Ordnung  $|\mathbf{k}|$  gegeben. Gemäß obiger Definition können wir schreiben

$$\nabla^{\mathbf{k}} u = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

**Beispiel 1.3** Mit der gerade eingeführten Notation ergibt sich für Taylorreihen von Funktionen mehrerer Veränderlicher die kompakte Schreibweise

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}} \frac{\nabla^{\mathbf{k}} u(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{k}}.$$

**Beispiel 1.4** Auch der *Multinomial*satz erhält eine handliche Form: Für  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  und  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$(a_1 + \dots + a_n)^m = \sum_{|\mathbf{k}|=m} \binom{m}{\mathbf{k}} \mathbf{a}^{\mathbf{k}}, \quad \text{mit} \quad \binom{m}{\mathbf{k}} := \frac{m!}{\mathbf{k}!}.$$

Für ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{b} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definieren wir die *Divergenz*

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}.$$

### Funktionsräume

Der Vektorraum der in einem Gebiet  $\Omega$   $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen heißt  $C^m(\Omega)$ . Der Teilraum von Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  fortgesetzt werden können, heißt  $C^m(\bar{\Omega})$ . Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  ist der Vektorraum  $C^m(\bar{\Omega})$  mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} := \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\nabla^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x})|$$

ein Banachraum. Wir definieren auch

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$$

Der Träger einer Funktion  $f \in C(\Omega)$  ist definiert durch

$$\text{supp}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

(‘supp’ ist eine Abkürzung des englischen ‘support’.) Weiters definieren wir

$$C_0^m(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}, \\ 0 \leq m \leq \infty.$$

Sei  $B$  ein Banachraum und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann sind für Funktionen  $f : I \rightarrow B$  Frechet-Ableitungen definiert durch Differentialquotienten:

$$f^{(m)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(m-1)}(t+h) - f^{(m-1)}(t)}{h}, \quad f^{(0)}(t) = f(t),$$

wobei der Grenzwert im Sinne der Norm in  $B$  zu verstehen ist. Der Vektorraum der Funktionen  $f : I \rightarrow B$ , deren Frechet-Ableitungen bis zur Ordnung  $m \geq 0$  stetig sind (als Funktionen von  $I$  nach  $B$ ), wird mit  $C^m(I, B)$  bezeichnet.

Wir benötigen auch Räume von Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Allerdings können wir uns auf eine sehr einfache Definition dieser Räume beschränken. Für  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $p \geq 1$  definieren wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

wobei das Integral als Bereichsintegral im Riemannschem Sinn verstanden werden kann.

**Lemma 1.2** *Sei  $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $1/p + 1/q = 1$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Dann gelten die Höldersche Ungleichung*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

und die Minkowskische Ungleichung

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Beweis:** Zunächst beweisen wir das Hilfsresultat

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad \text{für } a, b > 0, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (1.5)$$

Die Funktion  $f(t) = t^p/p + 1/q - t$  nimmt für positive  $t$  an der Stelle  $t = 1$  den minimalen Wert Null an. Die Ungleichung  $f((a/b)^{1/p}) \geq 0$  ist äquivalent zu (1.5). Weiters gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|fg\|_{L^1(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} &= \int_{\Omega} \left( \frac{|f(\mathbf{x})|^p}{\int_{\Omega} |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}} \right)^{1/p} \left( \frac{|g(\mathbf{x})|^q}{\int_{\Omega} |g(\mathbf{y})|^q d\mathbf{y}} \right)^{1/q} d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \frac{|f(\mathbf{x})|^p}{p \int_{\Omega} |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}} + \frac{|g(\mathbf{x})|^q}{q \int_{\Omega} |g(\mathbf{y})|^q d\mathbf{y}} \right) d\mathbf{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

womit die Höldersche Ungleichung bewiesen ist. Nun verwenden wir diese:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) d\mathbf{x} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f + g|^p d\mathbf{x} \right)^{1/q} \left( \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

was äquivalent zur Minkowskischen Ungleichung ist. QED

Mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung (Dreiecksungleichung) zeigt man, dass  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  eine Norm ist. Damit wird  $C_0^\infty(\Omega)$  zu einem normierten Raum gemacht. Dieser Raum ist allerdings nicht vollständig. Der Banachraum  $L^p(\Omega)$  wird nun durch Vervollständigung erzeugt. (Dieser Raum ist bis auf Namensgebung identisch zum Raum der Funktionen, deren  $p$ -te Potenz Lebesgue-integrierbar ist, wobei fast überall übereinstimmende Funktionen als identisch angesehen werden.) Wir sollten uns noch Gedanken darüber machen, inwieweit Elemente von  $L^p(\Omega)$  als Funktionen interpretiert werden können. Als Beispiel kann man für beschränkte Riemann-messbare Teilmengen  $B$  von  $\Omega$  und für  $f \in L^p(\Omega)$  das Integral  $\int_B f d\mathbf{x}$  definieren, indem man  $f$  zunächst durch eine Folge  $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$  approximiert. Dann schätzt man mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung ab:

$$\left| \int_B f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_B f_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \mu(B)^{1/q} \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)},$$

woraus folgt, dass die Folge  $\int_B f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  von Riemann-Integralen konvergiert (weil  $f_n$  bezüglich  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  eine Cauchyfolge ist). Den Grenzwert verwendet man für die Definition des Integrales von  $f$ .

Festzuhalten ist, dass der Raum  $L^2(\Omega)$  ein Hilbertraum ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg d\mathbf{x}.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in  $L^2(\Omega)$  ist ein Spezialfall der Hölderschen Ungleichung (mit  $p = q = 2$ ).

Die Art der Einführung der  $L^p$ -Räume bewirkt eine gewisse Umständlichkeit der folgenden Definition von Räumen von lokal integrierbaren Funktionen. Zunächst halten wir fest, dass mit Hilfe der obigen Definition des Integrals über Teilmengen von  $\Omega$  es klar ist, dass für  $\Omega' \subset \Omega$  der Raum  $L^p(\Omega)$  als Teilraum von  $L^p(\Omega')$  angesehen werden kann. Für ein festes Gebiet  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}$  die Menge aller kompakten Teilmengen von  $\Omega$ .

**Definition 1.2** Die Menge  $L_{loc}^p(\Omega)$  ist definiert als Menge aller Abbildungen  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft: Für jedes  $K \in \mathcal{K}$  existiert ein  $f_K \in L^p(K)$ , sodass  $f(K) = \int_K f_K d\mathbf{x}$  gilt. Weiters muss für  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$   $f_{K_1} = f_{K_2}$  in  $L^p(K_1 \cap K_2)$  gelten.



Diese Definition impliziert im Wesentlichen, dass es für das 'Maß'  $f$  eine überall im Inneren von  $\Omega$  definierte 'Dichtefunktion' gibt, deren  $p$ -te Potenz lokal integrierbar ist. Die Idee ist es,  $f$  mit dieser Dichtefunktion zu identifizieren. Deswegen wird auch  $L_{loc}^1(\Omega)$  als Raum der lokal integrierbaren Funktionen bezeichnet. 'Raum', weil leicht zu sehen ist, dass  $L_{loc}^p(\Omega)$  als Vektorraum betrachtet werden kann.

### Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

Wir definieren Mannigfaltigkeiten als Mengen, die lokal als Graphen von stetigen Funktionen interpretiert werden können:

**Definition 1.3** Eine Menge  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  wird als  $k$ -dimensionale ( $k < n$ ) Mannigfaltigkeit bezeichnet, wenn für jeden Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$ , eine Permutation  $(l_1, \dots, l_n)$  von  $(1, \dots, n)$  und stetige Funktionen  $f_{k+1}, \dots, f_n : U' \rightarrow \mathbb{R}$  existieren ( $U' = \{(x_{l_1}, \dots, x_{l_k}) : \mathbf{x} \in U\}$ ), sodass

$$\Gamma \cap U = \{\mathbf{x} \in U : x_{l_j} = f_j(x_{l_1}, \dots, x_{l_k}), j = k+1, \dots, n\}.$$

Man sagt 'Eine Mannigfaltigkeit ist Lipschitz ( $C^m$ ,  $C^\infty$ , analytisch)', wenn die Funktionen  $f_{k+1}, \dots, f_n$  Lipschitz ( $C^m$ ,  $C^\infty$ , analytisch) sind.  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten werden als Hyperflächen bezeichnet.

Definieren wir eine Funktion  $\mathbf{x}_\Gamma : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$(\mathbf{x}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}))_{l_j} = \begin{cases} \xi_j, & j \leq k, \\ f_j(\boldsymbol{\xi}), & j > k, \end{cases}$$

dann erhalten wir eine lokale *Parameterdarstellung* der Mannigfaltigkeit:

$$\Gamma \cap U = \{\mathbf{x}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \in U'\}.$$

Offensichtlich hat  $\mathbf{x}_\Gamma$  alle eventuellen Glattheitseigenschaften der Mannigfaltigkeit. Ist die Mannigfaltigkeit  $C^1$ , dann können die Tangentialvektoren  $\frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_j}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , berechnet werden. Man sieht leicht, dass sie linear unabhängig sind und daher einen  $k$ -dimensionalen Tangentialraum aufspannen.

In der Nähe von glatten Mannigfaltigkeiten können lokal Koordinatentransformationen auf tangentielle und orthogonale Koordinaten durchgeführt werden. Wir benötigen dieses Resultat nur für Hyperflächen:

**Lemma 1.3** Sei  $\Gamma$  eine  $C^2$ -Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ . Dann gibt es in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  eine stetig differenzierbare Koordinatentransformation  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  auf tangentiale Koordinaten  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  und die normale Koordinate  $\xi_1$ , d.h. die Abbildung  $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\xi}$  bildet eine Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  bijectiv auf eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ab, das Bild von  $\Gamma$  im  $\boldsymbol{\xi}$ -Raum ist durch die Gleichung  $\xi_1 = 0$  gegeben, und der Vektor  $\nabla \xi_1$ , ausgewertet auf  $\Gamma$ , steht normal auf  $\Gamma$ .

**Beweis:** Nach den Voraussetzungen kann  $\Gamma$  in der Nähe von  $\mathbf{x}_0$  durch eine zweimal stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma(\xi_2, \dots, \xi_n)$  beschrieben werden, sodass die Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_n} \quad (1.6)$$

linear unabhängig sind. Sie spannen den Tangentialraum an  $\Gamma$  auf. Als nächsten Schritt konstruieren wir einen Normalvektor  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$  auf den Tangentialraum. Wir setzen  $\tilde{\nu}_i = (-1)^{i-1} \det C_i$ , wobei  $C_i$  durch Streichung der  $i$ -ten Zeile der Matrix mit den Spalten (1.6) entsteht. Es gilt

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_j} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_j} \right)_i \det(C_i) = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_j}, \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_n} \right) = 0,$$

sowie  $\tilde{\boldsymbol{\nu}} \neq 0$ , weil wegen der linearen Unabhängigkeit der Tangentialvektoren mindestens eine der  $C_i$  regulär sein muss.

Man beachte, dass der Einheitsnormalvektor  $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}/|\tilde{\boldsymbol{\nu}}|$  stetig differenzierbar von  $(\xi_2, \dots, \xi_n)$  abhängt. Wir sind nun in der Lage, die inverse Koordinatentransformation anzugeben:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_\Gamma(\xi_2, \dots, \xi_n) + \boldsymbol{\nu}(\xi_2, \dots, \xi_n)\xi_1$$

Offensichtlich ist  $\Gamma$  in den neuen Koordinaten durch die Gleichung  $\xi_1 = 0$  gegeben. Für die Jacobimatrix gilt

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}} \Big|_{\xi_1=0} = \left( \boldsymbol{\nu}, \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_\Gamma}{\partial \xi_n} \right),$$

und daher

$$\det \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}} \Big|_{\xi_1=0} \right) = \boldsymbol{\nu} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nu}} = |\tilde{\boldsymbol{\nu}}|. \quad (1.7)$$

Wegen der Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen ist die Jacobimatrix in einer Umgebung von  $\Gamma$  regulär, und die oben definierte Abbildung ist wirklich eine Koordinatentransformation.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\nabla\xi_1|_\Gamma$  normal auf  $\Gamma$  steht. Dazu beobachten wir, dass die Vektoren  $\nabla\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  die Zeilen der inversen Jacobimatrix  $d\xi/d\mathbf{x} = (d\mathbf{x}/d\xi)^{-1}$  sind. Daraus folgt, dass  $\nabla\xi_1$  auf die zweite bis  $n$ -te Spalte von  $d\mathbf{x}/d\xi$ , und damit auf  $\Gamma$ , normal steht. QED

Der im obigen Beweis konstruierte Normalvektor  $\tilde{\nu}$  wird bei der Definition des Oberflächenintegrals über Hyperflächen verwendet: Sei  $\Gamma$  eine  $C^1$ -Hyperfläche mit Parameterdarstellung  $\Gamma = \{\mathbf{x}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \in P \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$ . Weiters sei  $f$  eine auf  $\Gamma$  definierte reellwertige Funktion. Dann ist das Oberflächenintegral von  $f$  über  $\Gamma$  definiert durch

$$\int_\Gamma f dF := \int_P f(\mathbf{x}_\Gamma(\boldsymbol{\xi})) |\tilde{\nu}(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi},$$

solange das  $(n-1)$ -dimensionale Bereichsintegral auf der rechten Seite existiert.

### Beispiel 1.5

Wir berechnen die Oberfläche  $S_n$  der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ . Dazu berechnen wir das Integral von  $\exp(-|\mathbf{x}|^2/2)$  über  $\mathbb{R}^n$  auf zwei Arten:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} d\mathbf{x} &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} d\mathbf{x} \right)^{n/2} = \left( 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \right)^{n/2} \\ &= \left( 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty r e^{-r^2/2} dr \right)^{n/2} = (2\pi)^{n/2}, \quad (1.8) \\ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} d\mathbf{x} &= \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} e^{-r^2/2} r^{n-1} dF dr = S_n \int_0^\infty (2t)^{n/2-1} e^{-t} dt \\ &= S_n 2^{n/2-1} \Gamma(n/2). \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Resultate gibt

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Zusammenhänge zwischen Bereichs- und Oberflächenintegralen sind durch den Gaußschen Integralsatz gegeben. Wir benötigen einen Spezialfall, den *Divergenzsatz*:

**Satz 1.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, dessen Rand disjunkte Vereinigung von endlich vielen  $C^1$ -Flächenstücken ist. Weiters seien die Komponenten des Vektorfeldes  $\mathbf{b} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1(\overline{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} dF = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x},$$

wobei das Oberflächenintegral als Summe von Integralen über die oben erwähnten Flächenstücke zu verstehen ist. Mit  $\boldsymbol{\nu}$  wird der in das Äußere von  $\Omega$  orientierte Einheitsnormalvektor auf  $\partial\Omega$  bezeichnet. Diese Konvention wird auch im Weiteren verwendet.

### Beispiel 1.6

Als Anwendung berechnen wir das Volumen  $V_n$  der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ :

$$V_n = \int_{|\mathbf{x}| < 1} d\mathbf{x} = \frac{1}{n} \int_{|\mathbf{x}| < 1} \nabla \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x} = \frac{1}{n} \int_{|\mathbf{x}|=1} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} dF = \frac{S_n}{n},$$

wegen  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\nu}$  auf der Kugeloberfläche.

### Beispiel 1.7

Ein Korollar des Divergenzsatzes ist mehrdimensionale *partielle Integration*. Mit den Voraussetzungen des Divergenzsatzes und mit  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  gilt  $\nabla \cdot (u\mathbf{b}) = u\nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla u$  und damit

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} dF - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla u d\mathbf{x}.$$

## Differentialoperatoren

Im Folgenden definieren wir die Objekte, die in dieser Vorlesung betrachtet werden.

**Definition 1.4** Sei  $F : \Omega \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_s$  Multiindices. Dann wird durch

$$L(u) = F(\mathbf{x}, \nabla^{\mathbf{k}_1} u, \dots, \nabla^{\mathbf{k}_s} u)$$

ein formaler Differentialoperator der Ordnung  $p = \max_{1 \leq i \leq s} |\mathbf{k}_i|$  im Gebiet  $\Omega$  definiert. Der Operator  $L$  heißt linear, wenn  $F$  bezüglich der Argumente  $\nabla^{\mathbf{k}_i} u$  linear ist. Er heißt quasilinear, wenn er linear ist bezüglich

der Ableitungen  $p$ -ter Ordnung:

$$L(u) = \sum_{|\mathbf{k}|=p} a_{\mathbf{k}}(u) \nabla^{\mathbf{k}} u + f(u),$$

wobei  $a_{\mathbf{k}}$  und  $f$  formale Differentialoperatoren der Ordnung  $\leq p - 1$  sind. Der Ausdruck

$$L_p(\mathbf{y}; u) = \sum_{|\mathbf{k}|=p} a_{\mathbf{k}}(u) \mathbf{y}^{\mathbf{k}}$$

heißt der Hauptteil des quasilinearen Differentialoperators  $L$ . Man beachte, dass der Hauptteil im allgemeinen vom Punkt  $\mathbf{x}$  und der Funktion  $u$  samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung  $p - 1$  abhängt. Für lineare Differentialoperatoren sind die  $a_{\mathbf{k}}$  und damit auch der Hauptteil unabhängig von  $u$ .

Die Gleichung

$$L(u) = 0$$

heißt partielle Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung für die Funktion  $u$ .

### Beispiel 1.8

Ein wichtiges Beispiel für einen formalen Differentialoperator ist der Laplaceoperator  $\Delta$ , definiert durch

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Der Laplaceoperator ist natürlich ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung. Die entsprechende Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  heißt *Laplacegleichung*.

## 1.4 Distributionen

### 1.4.1 Kleine Einführung in die Theorie der Distributionen

Mitte des 20. Jahrhunderts wurde von *Schwartz* die durch physikalische Anwendungen notwendig gewordene Erweiterung des Funktionsbegriffes in einen mathematischen Rahmen gebracht. In diesem Abschnitt sollen nur die wichtigsten Elemente der Schwartzschen Theorie dargestellt werden.

Für ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir den Vektorraum  $C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Die Elemente von  $\mathcal{D}(\Omega)$  heißen *Testfunktionen*. Die Frage, ob es

nichttriviale Testfunktionen überhaupt gibt, kann positiv beantwortet werden. Die Funktionen

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{x}| \geq \alpha, \\ \exp\left(\frac{\alpha^2}{|\mathbf{x}|^2 - \alpha^2}\right), & |\mathbf{x}| < \alpha, \end{cases}$$

sind Elemente von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Bemerkenswert ist, dass  $\mathcal{D}(\Omega)$  abgeschlossen ist bezüglich der Bildung von partiellen Ableitungen. Ein Konvergenzbegriff in  $\mathcal{D}(\Omega)$  wird durch folgende Definition eingeführt.

**Definition 1.5** *Eine Folge  $\{\varphi_n\}$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  konvergiert gegen Null, wenn es eine beschränkte Menge gibt, außerhalb derer alle  $\varphi_n$  verschwinden, und wenn alle partiellen Ableitungen von  $\varphi_n$  gleichmäßig gegen Null konvergieren d.h. wenn für alle  $n$ -dimensionalen Multiindices  $\mathbf{k}$  gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\nabla^{\mathbf{k}} \varphi_n(\mathbf{x})| \right) = 0.$$

Nun sind wir bereit, verallgemeinerte Funktionen zu definieren.

**Definition 1.6** *Ein lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  (das ist eine lineare Abbildung von  $\mathcal{D}(\Omega)$  nach  $\mathbb{R}$ ), das bezüglich des oben definierten Konvergenzbegriffes in  $\mathcal{D}(\Omega)$  stetig ist, heißt Distribution auf  $\Omega$ . Die Menge aller Distributionen auf  $\Omega$  wird mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$  bezeichnet. Für das Bild einer Testfunktion  $\varphi$  unter der Distribution  $f$  verwenden wir die Schreibweise  $f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$ .*

Die Definition von Distributionen hat den Zweck, den Begriff der Funktion zu verallgemeinern. Das ist auch der Fall:

**Satz 1.5** *Jede lokal integrierbare Funktion  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  kann mit der Definition*

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\text{supp}(\varphi)} f_{\text{supp}(\varphi)} \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

*als Distribution auf  $\Omega$  aufgefasst werden (wobei der Distribution derselbe Namen gegeben wurde). In der obigen Gleichung haben wir verwendet, dass für kompaktes  $K$  das Produkt eines Elementes von  $L^1(K)$  mit einer Funktion in  $C^\infty(K)$  als Element von  $L^1(K)$  definiert werden kann.*

**Beweis:** Die Linearität ist offensichtlich, und die Stetigkeit folgt aus der Abschätzung

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\varphi(\mathbf{x})| \|f_{\text{supp}(\varphi)}\|_{L^1(\text{supp}(\varphi))}.$$

QED

Damit ist gewährleistet, dass wir den Raum der lokal integrierbaren Funktionen als Unterraum des Raumes der Distributionen auffassen können.

**Definition 1.7** *Eine Distribution, die einer lokal integrierbaren Funktion entspricht, heißt regulär, andernfalls singulär.*

Als Konvergenzbegriff auf dem Raum der Distributionen wählen wir die Schwach\*-Konvergenz:

**Definition 1.8** *Eine Folge  $\{f_n\}$  von Distributionen auf  $\Omega$  konvergiert gegen die Distribution  $f$ , wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

*gilt.*

### Beispiel 1.9

Wir betrachten die Familie

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x - x_0| > \varepsilon, \\ 1/(2\varepsilon) & |x - x_0| < \varepsilon, \end{cases} \quad (1.9)$$

von Funktionen (siehe Abb. 1.4.1) in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Durch die Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

wird ein lineares Funktional aus  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  definiert. Wenn dieses eine Distribution ist, dann ist sie Grenzwert der Familie  $\{f_\varepsilon\}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dass das so ist, wird durch den folgenden Satz garantiert.

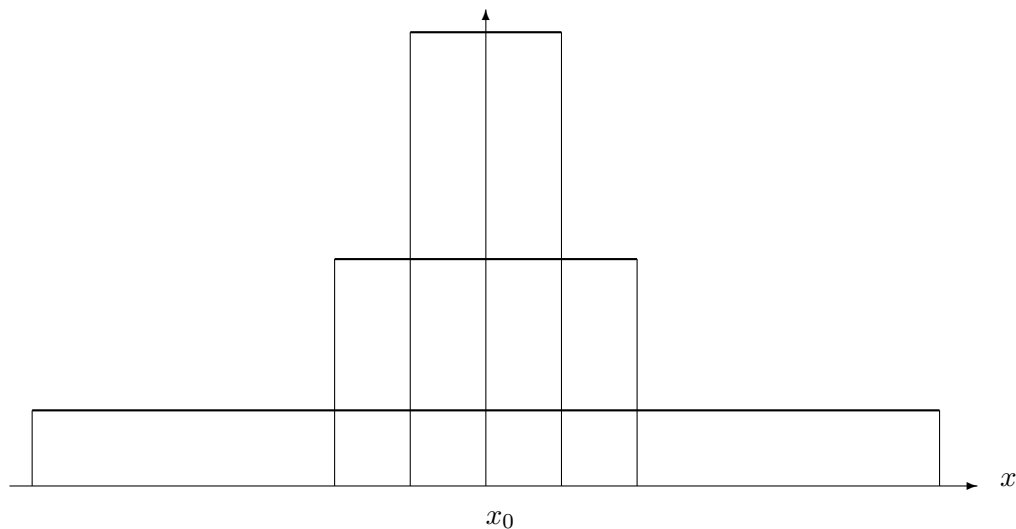
**Satz 1.6** *Sei  $\{f_n\}$  eine Folge von Distributionen auf  $\Omega$ . Angenommen, es existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle, \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Dann wird durch*

$$\langle f, \varphi \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

*eine Distribution auf  $\Omega$  definiert.*

Figure 1.1: Die Funktion  $f_\varepsilon(x)$ **Beispiel 1.10**

Durch  $\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$  ist eine singuläre Distribution  $\delta$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert. Sie wird *Diracsche Deltadistribution* (manchmal auch – eigentlich falsch – 'Deltafunktion') genannt.

**Beispiel 1.11**

Man zeigt leicht, dass für eine Folge  $\{f_n\}$  von Testfunktionen, die bezüglich der  $L^p(\Omega)$ -Norm eine Cauchyfolge ist,  $\langle f_n, \varphi \rangle$  für jede Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert. Das zeigt, dass jedes Element von  $L^p(\Omega)$  als Distribution interpretiert werden kann.

Ein wesentliches Charakteristikum des Funktionsbegriffes ist, dass man das lokale Verhalten von Funktionen diskutieren kann. Das lässt sich in einem gewissen Ausmaß auf Distributionen verallgemeinern.

**Definition 1.9 (Lokales Verhalten von Distributionen)** Sei  $R$  eine offene Teilmenge des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Man sagt,  $f$  verschwindet in  $R$ , wenn für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset R$  gilt:

$$\langle f, \varphi \rangle = 0.$$



**Beispiel 1.12**

Die Deltadistribution verschwindet auf jeder Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , die den Ursprung nicht enthält.

Um mit Distributionen rechnen zu können, sollen Operationen, die man mit Funktionen durchführen kann, auf Distributionen übertragen werden. Den Rahmen dafür liefert der folgende Satz.

**Satz 1.7** Sei  $L : \mathcal{D}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_2)$  eine lineare, folgenstetige Abbildung. Weiters existiere eine folgenstetige adjungierte Abbildung  $L^* : \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1)$  in dem Sinn, dass

$$\langle L(\varphi), \psi \rangle = \int_{\Omega_2} L(\varphi)\psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} \varphi L^*(\psi) \, d\mathbf{x} = \langle \varphi, L^*(\psi) \rangle$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ ,

gilt. Dann wird durch die Definition

$$\langle L(f), \psi \rangle = \langle f, L^*(\psi) \rangle \quad \text{für } f \in \mathcal{D}'(\Omega_1), \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2),$$

der Operator  $L$  auf eine folgenstetige Abbildung von  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$  nach  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$  erweitert.

**Beweis:** Zunächst zeigen wir, dass  $L(f)$  eine Distribution ist. Linearität ist eine Konsequenz aus der Linearität von  $L^*$ . Sei  $\psi_k$  eine in  $\mathcal{D}(\Omega_2)$  gegen  $\psi_0$  konvergente Folge. Dann konvergiert auch  $L^*(\psi_k)$  gegen  $L^*(\psi_0)$ , und daher auch  $\langle L(f), \psi_k \rangle = \langle f, L^*(\psi_k) \rangle$  gegen  $\langle f, L^*(\psi_0) \rangle = \langle L(f), \psi_0 \rangle$ , womit  $L(f) \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$  bewiesen ist.

Konvergiere nun  $f_k$  in  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$  gegen  $f_0$ . Dann konvergiert auch  $\langle L(f_k), \psi \rangle = \langle f_k, L^*(\psi) \rangle$  gegen  $\langle f_0, L^*(\psi) \rangle = \langle L(f_0), \psi \rangle$ , womit die Stetigkeit von  $L$  als Abbildung von  $\mathcal{D}'(\Omega_1)$  nach  $\mathcal{D}'(\Omega_2)$  bewiesen ist. QED

**Beispiel 1.13 (Multiplikation mit einer glatten Funktion)**

Sei  $a \in C^\infty(\Omega)$  und  $L(\varphi) = a\varphi$ . Dann gilt  $L^* = L$ , und die Multiplikation einer Distribution mit  $a$  wird definiert durch

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

**Beispiel 1.14 (Koordinatentransformation)**

Sei  $\eta : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus (d.h. bijektiv, beliebig oft differenzierbar mit beliebig oft differenzierbarer Inverser) und  $L(\varphi) = \varphi \circ \eta$ . Die Rechnung

$$\int_{\Omega_2} \varphi(\eta(\mathbf{y}))\psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_1} \varphi(\mathbf{x})\psi(\eta^{-1}(\mathbf{x})) \left| \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \right| d\mathbf{x}$$

zeigt, dass die Transformation von Distributionen durch

$$\langle f \circ \eta, \psi \rangle = \langle f, |\det D\eta^{-1}| \psi \circ \eta^{-1} \rangle$$

definiert werden kann, wobei  $D\eta^{-1}$  die Jacobimatrix von  $\eta^{-1}$  bezeichnet. Anwendungen sind die *Translation* um einen Vektor  $\mathbf{y}$

$$(\tau_{\mathbf{y}}\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad \langle \tau_{\mathbf{y}}f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-\mathbf{y}}\varphi \rangle,$$

und die *Reflexion*

$$(\mathcal{R}\varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(-\mathbf{x}), \quad \langle \mathcal{R}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{R}\varphi \rangle.$$

Die um  $-\boldsymbol{\xi}$  verschobene Deltadistribution  $\delta_{\boldsymbol{\xi}} = \tau_{-\boldsymbol{\xi}}\delta$  mit

$$\langle \delta_{\boldsymbol{\xi}}, \varphi \rangle = \varphi(\boldsymbol{\xi})$$

wird *Deltadistribution mit Pol in  $\boldsymbol{\xi}$*  genannt und auch mit  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  bezeichnet.

### Beispiel 1.15 (Ableitung)

Sei  $L = \nabla^{\mathbf{k}}$ . Partielle Integration zeigt  $L^* = (-1)^{|\mathbf{k}|} \nabla^{\mathbf{k}}$ . Wir definieren also

$$\langle \nabla^{\mathbf{k}} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{k}|} \langle f, \nabla^{\mathbf{k}} \varphi \rangle.$$

Damit ist jede Distribution beliebig oft partiell differenzierbar. Insbesondere können wir mit der obigen Definition auch jeder Funktion in  $L_{loc}^1(\Omega)$  partielle *Ableitungen im distributionellen Sinn* zuordnen.

Als Beispiel betrachten wir die *Heaviside-Funktion*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Sie ist im klassischen Sinn nicht differenzierbar. Klarerweise erzeugt sie eine Distribution, deren Ableitung wir berechnen wollen:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Die Ableitung der Heaviside-Funktion im distributionellen Sinn ist also die eindimensionale Deltadistribution.

**Lemma 1.4** *Die Folge  $\{f_n\}$  von Distributionen konvergiere im distributionellen Sinn gegen die Distribution  $f$ . Sei  $\mathbf{k}$  ein Multiindex. Dann konvergiert die Folge  $\{\nabla^{\mathbf{k}} f_n\}$  gegen  $\nabla^{\mathbf{k}} f$ .*

**Beweis:**

$$\langle \nabla^{\mathbf{k}} f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\mathbf{k}|} \langle f_n, \nabla^{\mathbf{k}} \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\mathbf{k}|} \langle f, \nabla^{\mathbf{k}} \varphi \rangle = \langle \nabla^{\mathbf{k}} f, \varphi \rangle$$

QED

**Beispiel 1.16 (Faltung mit einer Testfunktion)**

Für Testfunktionen  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist die Faltung (auch Konvolution) definiert durch

$$(\psi * \varphi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Man sieht leicht, dass  $\psi * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt, dass die Faltung kommutativ ist und dass partielle Ableitungen durch  $\nabla^{\mathbf{k}}(\psi * \varphi) = \psi * \nabla^{\mathbf{k}} \varphi = (\nabla^{\mathbf{k}} \psi) * \varphi$  berechnet werden können.

Für festes  $\psi$  sind die Abbildung  $L(\varphi) = \psi * \varphi$  und ihre adjungierte  $L^*(\varphi) = (\mathcal{R}\psi) * \varphi$  folgenstetig. Damit lässt sich die Faltung einer Testfunktion mit einer Distribution definieren durch

$$\langle \psi * f, \varphi \rangle = \langle f, (\mathcal{R}\psi) * \varphi \rangle.$$

Auch  $f * \psi$  kann auf ähnliche Art definiert werden. Leichte Rechnungen zeigen, dass die Kommutativität erhalten bleibt und dass für beliebige Multiindices  $\mathbf{k}$

$$\nabla^{\mathbf{k}}(\psi * f) = \psi * \nabla^{\mathbf{k}} f = (\nabla^{\mathbf{k}} \psi) * f$$

gilt.

Als Beispiel berechnen wir  $\psi * \delta$ ,

$$\langle \psi * \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, (\mathcal{R}\psi) * \varphi \rangle = ((\mathcal{R}\psi) * \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Es gilt also  $\psi * \delta = \psi$ .

### 1.4.2 Differentialgleichungen. Fundamentallösungen

Sei ein linearer formaler Differentialoperator der Ordnung  $m$  mit Koeffizienten  $a_{\mathbf{k}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $|\mathbf{k}| \leq m$ , gegeben durch

$$L = \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} a_{\mathbf{k}} \nabla^{\mathbf{k}}.$$

Weiters definieren wir den *formal adjungierten* Operator

$$L^*(\varphi) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} (-1)^{|\mathbf{k}|} \nabla^{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} \varphi).$$

Gilt  $L = L^*$ , dann heißt  $L$  *formal selbstadjungiert*.

**Satz 1.8** *Seien  $L$  und  $L^*$  wie oben beschrieben. Dann existiert eine bilineare Abbildung  $\mathbf{B} : C^\infty(\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$ , sodass für jedes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^1$ -Rand die Greensche Formel*

$$\int_{\Omega} (vL(u) - uL^*(v)) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(u, v) \cdot \boldsymbol{\nu} \, dF \quad \forall u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

*gilt. Die Komponenten von  $\mathbf{B}(u, v)$  sind bilineare Ausdrücke in  $u$  und  $v$  bzw. deren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $m - 1$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass es für jeden Multiindex  $\mathbf{k}$  eine bilineare Abbildung  $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ , wie im Satz beschrieben, gibt, sodass

$$v \nabla^{\mathbf{k}} u - (-1)^{|\mathbf{k}|} u \nabla^{\mathbf{k}} v = \nabla \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(u, v) \quad (1.10)$$

gilt. Wir verwenden vollständige Induktion nach  $|\mathbf{k}|$ . Offensichtlich gilt (1.10) für  $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)^T$ . Angenommen, es gelte für alle  $\mathbf{k}$  mit  $|\mathbf{k}| \leq m - 1$ . Sei nun  $|\mathbf{k}| = m > 0$ . Dann gibt es ein  $k_i > 0$ , und wir definieren  $\mathbf{k}' = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_n)^T$ . Es gilt

$$v \nabla^{\mathbf{k}} u = \frac{\partial}{\partial x_i} (v \nabla^{\mathbf{k}'} u) - \frac{\partial v}{\partial x_i} \nabla^{\mathbf{k}'} u.$$

Auf den zweiten Term können wir wegen  $|\mathbf{k}'| = m - 1$  die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\begin{aligned} v \nabla^{\mathbf{k}} u &= \frac{\partial}{\partial x_i} (v \nabla^{\mathbf{k}'} u) - \nabla \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}'} \left( u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - (-1)^{|\mathbf{k}'|} u \nabla^{\mathbf{k}'} \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(u, v) + (-1)^{|\mathbf{k}|} u \nabla^{\mathbf{k}} v \end{aligned}$$

mit

$$B_{\mathbf{k},j}(u,v) = -B_{\mathbf{k}',j} \left( u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} v \nabla^{\mathbf{k}'} u \quad j = 1, \dots, n.$$

Damit ist (1.10) bewiesen. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} vL(u) &= \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} a_{\mathbf{k}} v \nabla^{\mathbf{k}} u = \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \left( \nabla \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(u, a_{\mathbf{k}} v) + (-1)^{|\mathbf{k}|} u \nabla^{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} v) \right) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{B}(u, v) + uL^*(v) \end{aligned} \quad (1.11)$$

mit  $\mathbf{B}(u, v) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(u, a_{\mathbf{k}} v)$ . Der Beweis wird vervollständigt durch Integration von (1.11) über  $\Omega$  und Anwendung des Divergenzsatzes. QED

Wir können  $L$  im Sinn von Satz 1.7 als Operator auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  auffassen. Die Greensche Formel zeigt, dass  $L^*$  die adjungierte Abbildung ist. Die Anwendung von  $L$  auf eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  kann definiert werden durch

$$\langle L(u), \varphi \rangle = \langle u, L^*(\varphi) \rangle.$$

Wir haben nun eine Möglichkeit, Differentialgleichungen mit dem Operator  $L$  auf verschiedene Arten zu interpretieren:

**Definition 1.10** a) Sei  $f \in C(\Omega)$ ,  $u \in C^m(\Omega)$ , und es gelte  $L(u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Dann heißt  $u$  klassische Lösung der Differentialgleichung  $L(u) = f$ .

b) Seien  $u, f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und es gelte  $L(u) = f$  in  $\Omega$  im Sinn von Distributionen. Dann heißt  $u$  distributionelle Lösung der Differentialgleichung.

c) Eine distributionelle Lösung, für die  $u, f \in L^1_{loc}(\Omega)$  gilt, heißt schwache Lösung.

Die distributionelle Interpretation der Differentialgleichung ist eine Erweiterung der klassischen. Das zeigt das folgende Resultat, dessen Beweis sehr leicht ist.

**Lemma 1.5** a) Jede klassische Lösung der Differentialgleichung  $L(u) = f$  ist auch distributionelle Lösung.

b) Sei  $u$  distributionelle Lösung und  $u \in C^m(\Omega)$ . Dann ist  $u$  auch klassische Lösung.

**Definition 1.11** Sei  $L$  ein linearer formaler Differentialoperator mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten. Dann heißt jede (distributionelle) Lösung der Gleichung

$$L(U_{\xi}) = \delta_{\xi} \quad (1.12)$$

Fundamentallösung von  $L$  mit Pol an  $\xi$ .

**Beispiel 1.17**

Wir wollen zeigen, dass

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & x < \xi, \\ \xi(x - 1) & x > \xi, \end{cases} \quad (1.13)$$

eine Fundamentallösung des Operators  $\frac{d^2}{dx^2}$  mit Pol in  $\xi$  ist. Diese Tatsache wird durch die folgende Rechnung überprüft:

$$\begin{aligned} \langle g'', \varphi \rangle &= \langle g, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{\xi} x(\xi - 1)\varphi'' dx + \int_{\xi}^{\infty} \xi(x - 1)\varphi'' dx \\ &= (\xi - 1) \left[ x\varphi' \Big|_{-\infty}^{\xi} - \int_{-\infty}^{\xi} \varphi' dx \right] + \xi \left[ (x - 1)\varphi' \Big|_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \varphi' dx \right] \\ &= (\xi - 1) [\xi\varphi'(\xi) - \varphi(\xi)] + \xi [-(\xi - 1)\varphi'(\xi) + \varphi(\xi)] \\ &= \varphi(\xi) = \langle \delta_{\xi}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Wozu sind Fundamentallösungen gut? Sie können zur Lösung von inhomogenen Gleichungen verwendet werden. Kann eine Fundamentallösung durch eine Funktion  $U(\mathbf{x}, \xi)$  von zwei Veränderlichen repräsentiert werden, so ist durch

$$u = \int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi \quad (1.14)$$

(wenn das Integral existiert) ein Kandidat für eine Lösung der Gleichung  $L(u) = f$  gegeben, wie die folgende – rein formale – Rechnung zeigt:

$$L \left( \int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \xi) f(\xi) d\xi = f(\mathbf{x}).$$

**Beispiel 1.18**

Man rechnet leicht nach, dass mit der durch (1.13) gegebenen Funktion  $g(x, \xi)$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

für jedes  $f \in C_0(\mathbb{R})$  eine Lösung der Differentialgleichung  $u'' = f$  ist.

Das Funktionieren dieses Rezeptes kann für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten und Testfunktionen als Inhomogenitäten leicht bewiesen werden. Dazu stellen wir zunächst fest, dass wegen der Translationsinvarianz von Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentallösung mit Pol in  $\xi$  durch Translation einer Fundamentallösung mit Pol in 0 erzeugt werden kann.

**Lemma 1.6** *Sei  $L$  ein linearer formaler Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und  $U$  eine Fundamentallösung mit Pol in 0. Dann ist  $\tau_{-\xi}U$  eine Fundamentallösung mit Pol in  $\xi$ .*

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \langle L(\tau_{-\xi}U), \varphi \rangle &= \langle \tau_{-\xi}U, L^*(\varphi) \rangle = \langle U, \tau_{\xi}L^*(\varphi) \rangle = \langle U, L^*(\tau_{\xi}\varphi) \rangle \\ &= \langle L(U), \tau_{\xi}\varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{\xi}\varphi \rangle = \langle \delta_{\xi}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

QED

Verwenden wir dieses Resultat in (1.14), dann ergibt sich für konstante Koeffizienten der Kandidat  $U * f$  für eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

**Satz 1.9** *Sei  $L$  ein linearer formaler Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten,  $U$  eine Fundamentallösung mit Pol in 0 und  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist durch  $u = U * f$  eine Lösung der Differentialgleichung  $L(u) = f$  gegeben.*

**Beweis:** Mit Hilfe der oben angegebenen Eigenschaften der Faltung berechnen wir

$$L(U * f) = L(U) * f = \delta * f = f.$$

QED

Sucht man nach Fundamentallösungen, die durch Funktionen repräsentiert werden, so muss für diese

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(\mathbf{x}, \xi) L^*(\varphi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(\xi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (1.15)$$

gelten. Diese Formel wird im Folgenden zur Berechnung von Fundamentallösungen verwendet werden.

## 1.5 Die Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist ein Werkzeug zur Behandlung von Problemen auf unbeschränkten Gebieten. Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die Fourier-Transformierte definiert durch

$$f^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.16)$$

Offensichtlich gilt

$$\sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n} |f^\wedge(\boldsymbol{\mu})| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.17)$$

Im Folgenden lassen wir die Fouriertransformation auf dem Raum  $\mathcal{S}_n$  der *schnell abklingenden Funktionen* operieren. Dieser ist definiert durch:  $f \in \mathcal{S}_n$  genau dann, wenn  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und für alle  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\max_{|\boldsymbol{k}_1| \leq N_1} \max_{|\boldsymbol{k}_2| \leq N_2} \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}_1} \nabla^{\boldsymbol{k}_2} f(\boldsymbol{x})| < \infty,$$

d.h. wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  schneller abklingen als der Kehrwert jedes Polynomes. Offensichtlich gilt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ . Daher ist  $\mathcal{S}_n$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$ . Man beachte, dass wir hier alle Funktionenräume als Räume komplexwertiger Funktionen verstehen.

Bildet man für  $f \in \mathcal{S}_n$  partielle Ableitungen bezüglich  $\boldsymbol{\mu}$  in (1.16), so erhält man

$$\nabla^{\boldsymbol{k}} f^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = (-i)^{|\boldsymbol{k}|} (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} f)^\wedge(\boldsymbol{\mu}),$$

und daher

$$(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} f)^\wedge = i^{|\boldsymbol{k}|} \nabla^{\boldsymbol{k}} f^\wedge.$$

Multipliziert man (1.16) mit  $i^{|\boldsymbol{k}|} \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k}}$ , so ergibt sich nach partieller Integration

$$(\nabla^{\boldsymbol{k}} f)^\wedge = i^{|\boldsymbol{k}|} \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{k}} f^\wedge.$$

Die Tatsache, dass die Bildung von Ableitungen durch die Fouriertransformation in die viel einfachere Operation der Multiplikation mit Polynomen übergeht, wird im Folgenden den praktischen Wert der Fouriertransformation ausmachen.

Der Grund für die Wahl von  $\mathcal{S}_n$  ist, dass dieser Raum durch die Fouriertransformation in sich selbst übergeführt wird:



**Lemma 1.7** Sei  $f \in \mathcal{S}_n$ . Dann gilt  $f^\wedge \in \mathcal{S}_n$ .

**Beweis:** Mit Hilfe der obigen Eigenschaften der Fouriertransformation berechnen wir

$$|\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}_1} \nabla^{\mathbf{k}_2} f^\wedge| = |\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}_1} (\mathbf{x}^{\mathbf{k}_2} f)^\wedge| = |(\nabla^{\mathbf{k}_1} (\mathbf{x}^{\mathbf{k}_2} f))^\wedge|.$$

Wegen  $f \in \mathcal{S}_n$  gilt  $\nabla^{\mathbf{k}_1} (\mathbf{x}^{\mathbf{k}_2} f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , und damit folgt aus (1.17)  $f^\wedge \in \mathcal{S}_n$ . QED

Als Beispiel betrachten wir die Funktion  $\Phi(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2/2} \in \mathcal{S}_n$ , die eindeutige Lösung von

$$\nabla \Phi + \mathbf{x} \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 1.$$

Wendet man die Fouriertransformation auf die Differentialgleichung an, so erhält man mit den obigen Rechenregeln

$$\boldsymbol{\mu} \Phi^\wedge + \nabla \Phi^\wedge = 0,$$

d.h.  $\Phi^\wedge$  löst dieselbe Differentialgleichung wie  $\Phi$ . Um  $\Phi^\wedge$  vollständig zu bestimmen, genügt (siehe (1.8)):

$$\Phi^\wedge(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (2\pi)^{n/2}.$$

Daher gilt

$$\Phi^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = (2\pi)^{n/2} e^{-|\boldsymbol{\mu}|^2/2}. \tag{1.18}$$

Oft kann ein Problem für eine unbekannte Funktion auf ein einfacheres Problem für ihre Fouriertransformierte zurückgeführt werden. Das hilft nur dann weiter, wenn die Funktion aus ihrer Fouriertransformierten rekonstruiert werden kann. Das ist unser nächstes Ziel. Dazu benötigen wir zunächst die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) g^\wedge(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Nun setzen wir  $g(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}/\lambda)$ ,  $\lambda > 0$  (daraus folgt  $g^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = \lambda^n \Phi^\wedge(\lambda \boldsymbol{\mu})$ ) und erhalten (nach der Transformation  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/\lambda$  im Integral auf der linken Seite)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}/\lambda) \Phi^\wedge(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}/\lambda) d\mathbf{x}.$$

Der Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  gibt

$$f(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}.$$

Nun verwenden wir für festes  $\boldsymbol{x}$  die Funktion  $h(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ , für die gilt  $h^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = f^\wedge(\boldsymbol{\mu})e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}}$ . Anwendung der obigen Formel für  $h$  ergibt die gesuchte *Inversionsformel*

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\boldsymbol{\mu})e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\mu}.$$

Wir wollen die Formel

$$(f * g)^\wedge = f^\wedge g^\wedge \tag{1.19}$$

herleiten, die einen Zusammenhang zwischen Fouriertransformation und Faltung herstellt. Sei  $h^\wedge = f^\wedge g^\wedge$ . Dann folgt aus der Inversionsformel

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\boldsymbol{\mu})g^\wedge(\boldsymbol{\mu})e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\mu} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})e^{-i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} g^\wedge(\boldsymbol{\mu})e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\mu} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi}) \left( (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g^\wedge(\boldsymbol{\mu})e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\mu} \right) d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Schließlich soll gezeigt werden, dass mit der Fouriertransformation auch für weniger glatte und weniger schnell abklingende Funktionen gearbeitet werden kann. Dazu berechnen wir zunächst für  $f, g \in \mathcal{S}_n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\overline{g^\wedge(\boldsymbol{\mu})} e^{-i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\mu} d\boldsymbol{x} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\wedge(\boldsymbol{\mu})\overline{g^\wedge(\boldsymbol{\mu})} d\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Das ist die *Parsevalsche Gleichung*. Mit  $g = f$  ergibt sich

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2} \|f^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Eine unmittelbare Konsequenz aus der Dichtheit von  $\mathcal{S}_n$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist das folgende Resultat:

**Satz 1.10 (Plancherel)** *Die Fouriertransformation besitzt eine eindeutige Fortsetzung als bijektive, stetige Abbildung von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  nach  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

## 1.6 Aufgaben

Wir geben eine präzise Definition des Begriffes 'sachgemäß gestellt' für lineare Probleme. Man beachte, dass dabei nur die Inhomogenitäten als Daten im Sinne der Einleitung angesehen werden.

**Definition 1.12** Sei  $A : D(A) \subset B_1 \rightarrow B_2$  eine lineare Abbildung, wobei  $(B_i, \|\cdot\|_i)$ ,  $i = 1, 2$ , normierte Vektorräume sind. Das Problem "Für gegebenes  $f \in B_2$  bestimme man  $u \in D(A)$ , sodass  $A(u) = f$  gilt", heißt sachgemäß gestellt, wenn  $A$  bijektiv und  $A^{-1}$  stetig ist, d.h. wenn das Problem eine eindeutige Lösung besitzt und eine von  $f$  unabhängige Konstante  $C$  existiert, sodass

$$\|u\|_1 \leq C\|f\|_2.$$

**Aufgabe 1.1** Man präzisiere die Aufgabenstellungen der Beispiele a) 1.1 und b) 1.2 im Sinn der obigen Definition und zeige sachgemäße Gestelltheit, wobei als Inhomogenitäten in den Differentialgleichungen von der Zeit abhängige Funktionen zugelassen sind.

**Aufgabe 1.2** Man motiviere, dass  $f(x) = x^{-1/2}$  als Element von  $L^1((0, 1))$  interpretiert werden kann, indem man eine Cauchyfolge in  $(C^\infty([0, 1]), \|\cdot\|_{L^1((0, 1))})$  angibt, die punktweise gegen  $f$  konvergiert.

**Aufgabe 1.3** Für die Kurve mit der Gleichung  $y = x^2$  im  $\mathbb{R}^2$  gebe man eine Koordinatentransformation auf normale und tangentielle Koordinaten in der Form  $(x, y) = \varphi(\xi)$  an. Weiters finde man  $\xi_1 \neq \xi_2$ , sodass  $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$ . Ergibt sich daraus ein Widerspruch zu Lemma 1.3?

**Aufgabe 1.4** Sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ . Weiters sei  $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$ . Man zeige:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = \delta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Aufgabe 1.5** Sei  $\mathbf{k}$  ein Multiindex. Man berechne  $\nabla^{\mathbf{k}} \delta$ .

**Aufgabe 1.6** Die Funktion  $1/x$  ist nicht aus  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Daher definieren wir die Distribution  $HW(1/x)$  durch den Cauchyschen Hauptwert

$$\left\langle HW\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = HW \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

Man zeige, dass im distributionellen Sinn  $(\ln|x|)' = HW(1/x)$  gilt.

**Aufgabe 1.7** Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gelte  $|c_n| \leq M|n|^k$  für ein  $M > 0$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ . Man zeige: Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

konvergiert in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  und ist gliedweise differenzierbar.

**Aufgabe 1.8** Man bestimme die formal adjungierten Operatoren zu

1.  $L(u) = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u$ ,
2.  $L(u) = \nabla \cdot (k(x)\nabla u) - c(x)u$ ,
3.  $L(u) = \Delta u + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u$ ,
4.  $L(u) = xu'' + u' - 2x^2u$ .

**Aufgabe 1.9** Sei  $K \in \mathcal{D}(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \xi > 0\})$  und

$$L(\varphi)(x) = \int_0^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Man bestimme den adjungierten Operator.

**Aufgabe 1.10** Seien  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $(\bar{x}(t), \bar{v}(t))$  eine Lösung von

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}, \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = F(\bar{x}).$$

Weiters sei  $f = \delta(x - \bar{x}(t), v - \bar{v}(t)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ , d.h.

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\bar{x}(t), \bar{v}(t), t) dt, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Man zeige, dass  $f$  eine distributionelle Lösung der Liouvillegleichung (siehe Aufgabe 3.9) ist. Wie kann diese Lösung physikalisch interpretiert werden?

**Aufgabe 1.11** Man berechne eine Fundamentallösung mit Pol in  $\xi$  von

$$L(u) = u'' - q^2u, \quad q \geq 0.$$

**Aufgabe 1.12** Für  $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$  berechne man die Fouriertransformierten von

$$f_\varepsilon(x) = (2\pi\varepsilon)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\varepsilon}\right) \quad \text{und} \quad g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon) & |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$ , und stelle Überlegungen über die Bedeutung des Grenzwertes  $\varepsilon \rightarrow 0$  an.



## Chapter 2

# Modellierung

### 2.1 Reagierende Strömungen

In einem Gas oder einer Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit am Ort  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  durch  $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$  gegeben ist, sei eine Substanz gelöst, die durch eine chemische Reaktion erzeugt oder vernichtet werden kann. Die Dichte der Substanz am Ort  $\boldsymbol{x}$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnen wir mit  $u(\boldsymbol{x}, t)$ . Die Reaktionsrate sei von der lokalen Dichte abhängig, d.h. die pro Volumens- und Zeiteinheit erzeugte bzw. vernichtete Masse ist gegeben durch eine Funktion  $r(u)$ .

Unser Ziel ist es, eine Differentialgleichung herzuleiten, die die Veränderung der Dichte  $u$  beschreibt. Dazu betrachten wir ein beschränktes Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ . Die Masse der zum Zeitpunkt  $t$  in  $\Omega$  enthaltenen Substanz ist gegeben durch

$$\int_{\Omega} u(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x}.$$

Es gilt: Die Änderung dieser Masse erfolgt durch Transport der Substanz durch den Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  einerseits und durch die chemische Reaktion andererseits. Um den Transport durch den Rand zu berechnen, bemerken wir zunächst, dass die pro Zeiteinheit durch ein infinitesimales Oberflächenelement  $dF$  transportierte Masse gegeben ist durch  $u \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} dF$ , wobei  $\boldsymbol{\nu}$  ein Einheitsnormalvektor auf  $dF$  ist. Die Masse, die pro Zeiteinheit das Gebiet  $\Omega$  durch den Rand verlässt, berechnet man daher mit Hilfe des

Oberflächenintegrals

$$\int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} dF.$$

Die obige Formel enthält implizit die Annahme, dass der Rand glatt genug ist, um den Normalvektor sinnvoll definieren zu können (z.B.  $\partial\Omega$  ist  $C^1$ ).

Die Massenbilanz impliziert nun die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} dF = \int_{\Omega} r(u) d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Nun verwenden wir den Divergenzsatz, um das Randintegral in ein Volumintegral umzuwandeln:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{v}) - r(u) \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Nimmt man an, dass der Integrand eine stetige Funktion ist, und berücksichtigt man, dass das Gebiet  $\Omega$  beliebig gewählt werden kann, dann muss die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot \mathbf{v} = r(u) \quad (2.2)$$

gelten. Das ist eine quasilineare Gleichung erster Ordnung im  $\mathbb{R}^4$  (3 Ortsdimensionen + Zeit) für die unbekannte Funktion  $u(\mathbf{x}, t)$ .

Ein typisches Beispiel für Zusatzbedingungen sind die Anfangsbedingungen

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.3)$$

## 2.2 Wärmeleitung

### 2.2.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten ein inhomogenes Medium, das in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  liegt. Die Temperatur am Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnen wir mit  $u(\mathbf{x}, t)$ . Sei  $R$  ein Teilgebiet von  $\Omega$  mit dem Rand  $\partial R$ . Wir verwenden eine Wärmeenergiebilanz:

$$\begin{aligned} & \text{Wärme, die in } R \text{ erzeugt wird} = \\ & \text{Wärmezuwachs in } R + \text{Wärme, die } R \text{ durch } \partial R \text{ verlässt} \end{aligned}$$

Die Wärmeenergie in  $R$  zum Zeitpunkt  $t$  ist gegeben durch das Integral

$$\int_R C u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

wobei  $C$  für die *spezifische Wärme* steht.  $C$  ist ein materialabhängiger Parameter, der auch von  $\mathbf{x}$  abhängen kann. Er gibt die Energiemenge an, die notwendig ist, um ein Einheitsvolumen um eine Temperatureinheit zu erwärmen. Der Wärmezuwachs pro Zeiteinheit in  $R$  ist also

$$\int_R C \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Um die Wärme zu berechnen, die  $R$  verlässt, verwenden wir das Gesetz von Fourier: *Die Wärme, die durch ein infinitesimales Oberflächenelement mit (Einheits-)Normalvektor  $\boldsymbol{\nu}$  und Fläche  $dF$  pro Zeiteinheit fließt, ist*

$$-k \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} dF = -k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dF,$$

wobei die *thermische Leitfähigkeit*  $k$  von  $\mathbf{x}$  abhängen kann. Der Vektor  $-k \nabla u$  wird als Wärmefluss bezeichnet. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Wärme in Richtung fallender Temperatur fließt. Die Wärme, die  $R$  durch  $\partial R$  pro Zeiteinheit verlässt, ist also durch

$$-\int_{\partial R} k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dF$$

gegeben. Auf dieses Integral lässt sich der Divergenzsatz anwenden und man erhält

$$-\int_{\partial R} k \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} dF = -\int_R \nabla \cdot (k \nabla u) d\mathbf{x}.$$

Nun haben wir die beiden Terme auf der rechten Seite der Wärmebilanz errechnet. Mit der Rate  $F_R(t)$ , mit der pro Zeiteinheit in  $R$  Wärme erzeugt wird, gilt daher

$$F_R(t) = \int_R [C u_t - \nabla \cdot (k \nabla u)] d\mathbf{x}.$$

Wenn wir 'singuläre' Wärmequellen (die auf Punkte oder Flächen konzentriert sind) ausschließen, können wir  $F_R(t)$  mit Hilfe einer Dichtefunktion  $f(\mathbf{x}, t)$  darstellen,

$$F_R(t) = \int_R f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$



wobei  $f$  auch von der lokalen Temperatur  $u$  abhängen kann. Wir erhalten also die Gleichung

$$\int_R \left( C \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla u) - f \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Da  $R$  ein beliebiges Teilgebiet von  $\Omega$  ist, folgt daraus unter der Annahme, dass der Integrand eine stetige Funktion von  $\mathbf{x}$  ist, die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{C} \nabla \cdot (k \nabla u) + \frac{f}{C}.$$

Im Spezialfall eines homogenen Mediums ( $C, k = \text{konstant}$ ) erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u + \frac{f}{C}.$$

Die Konstante  $a = \frac{k}{C}$  heißt *thermische Diffusivität*. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine quasilineare Gleichung zweiter Ordnung in vier unabhängigen Veränderlichen (Zeit und drei Ortsvariablen).

Für viele praktische Probleme ist eine *Reduktion der Ortsdimension* möglich. Besteht Grund zur Annahme, dass die Temperatur in einer (Platte) bzw. zwei (Stab) Richtungen annähernd konstant ist, dann genügt es, einen Operator in zwei bzw. einer unabhängigen Veränderlichen zu betrachten.

Von großem Interesse sind im allgemeinen *stationäre Zustände* eines Systems, d.h. Temperatur- und Dichteverteilungen, die von der Zeit unabhängig sind. Die Forderung  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  in der Wärmeleitungsgleichung gibt die Gleichung

$$\nabla \cdot (k \nabla u) + f = 0. \tag{2.4}$$

### 2.2.2 Zusatzbedingungen

Die Wärmeleitungsgleichung allein reicht noch nicht aus, um die Temperaturverteilung vollständig zu bestimmen. Dazu muss noch die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorgegeben werden, und es muss die Interaktion des Mediums mit seiner Umgebung beschrieben werden. An  $t = 0$  stellen wir die *Anfangsbedingung*

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

wobei  $u_0$  eine gegebene Funktion ist.

Die Interaktion mit der Umwelt wird durch die *Randbedingungen* am Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  festgelegt. Wir betrachten drei Arten von Randbedingungen:

- *Dirichletbedingung* oder Randbedingung 1.Art:

$$u = f_1 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Temperatur auf dem Rand wird festgehalten.

- *Neumannbedingung* oder Randbedingung 2.Art:

$$-k \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Der Wärmefluss, der  $\Omega$  verlässt, wird festgehalten. Häufig wird (als Idealisierung) ein *isolierender* Rand angenommen, der durch eine homogene Neumannbedingung, d.h.  $f_2 = 0$ , beschrieben wird.

- *Robinbedingung* oder Randbedingung 3.Art:

$$-k \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha u + f_3 \quad \text{auf } \partial\Omega, \text{ mit } \alpha > 0.$$

Für  $f_3 = -\alpha \bar{u}$  ist diese Bedingung das Newtonsche Abkühlungsgesetz. Der Wärmefluss, der  $\Omega$  verlässt, ist proportional zur Differenz zwischen der Temperatur am Rand und jener der Umgebung.

Die Daten  $f_i$  können neben der Position am Rand auch von der Zeit abhängen.

Die Wärmeleitungsgleichung zusammen mit Anfangs- und Randbedingungen bildet ein sogenanntes *Anfangs-Randwertproblem* (ARWP). Für die stationäre Gleichung (2.4) genügt es, Randbedingungen (mit von der Zeit unabhängigen Daten) zu stellen.

In Anwendungen treten oft gemischte Randwertprobleme auf, bei denen auf verschiedenen Abschnitten von  $\partial\Omega$  verschiedene Arten von Randbedingungen gegeben sind.

Die Wärmeleitungsgleichung wird auch als *Diffusionsmodell* verwendet. In diesem Fall wird statt Wärmeenergie Masse transportiert,  $u$  hat die Bedeutung der Massendichte ( $C = 1$ ) und die Modellierung des Massenflusses durch den Ausdruck  $-k\nabla u$  heißt *Ficksches Diffusionsgesetz* mit der *Diffusivität*  $k$ .

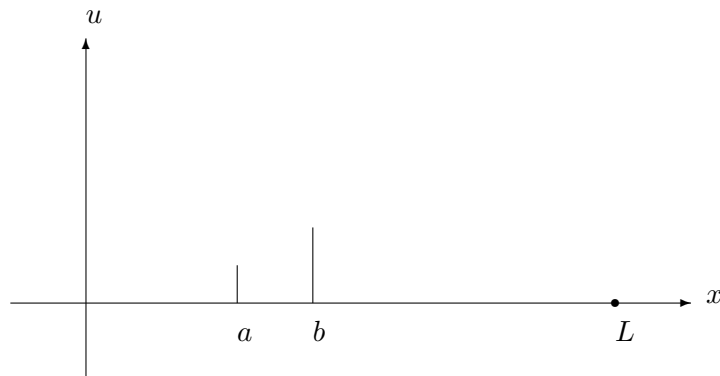


Figure 2.1: Die schwingende Saite

### 2.3 Die schwingende Saite

Wir betrachten das Problem der Schwingungen einer Saite, die zwischen zwei festen Punkten gespannt wird. Um das Problem zu vereinfachen, machen wir eine Reihe von Annahmen. Zunächst beschränken wir uns auf *Schwingungen in einer Ebene*. In dieser Ebene führen wir ein kartesisches Koordinatensystem so ein, dass der Ursprung in einem Endpunkt der Saite liegt und die  $x$ -Achse durch den anderen Endpunkt verläuft. Die zweite Achse bezeichnen wir mit  $u$ . Der Abstand zwischen den Endpunkten sei  $L$ .

Eine weitere Annahme ist, dass sich Teilchen der Saite nur in  $u$ -Richtung bewegen, d.h. dass ihre  $x$ -Koordinate von der Zeit unabhängig ist. Wir beschränken uns also auf *transversale Schwingungen*. Die  $u$ -Koordinate des Teilchens mit der  $x$ -Koordinate  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnen wir mit  $u(x, t)$ .

Betrachten wir einen Punkt  $(x, u(x, t))$  auf der Saite. Dann übt der Teil auf der einen Seite des Punktes auf den Teil auf der anderen Seite eine gewisse Kraft aus. Da Saiten hauptsächlich einer Dehnung Widerstand entgegensetzen, idealisieren wir auf den Zustand einer *idealen Saite*, d.h. wir nehmen an, dass die Richtung der oben erwähnten Kraft tangential zur Saite ist. Die Größe dieser Kraft heißt Spannung der Saite und wird mit  $T(x, t)$  bezeichnet. Weiters beschränken wir uns auf *homogene Saiten*, für die die Masse des Abschnittes zwischen  $x = a$  und  $x = b$  durch  $\varrho_0(b - a)$  gegeben ist, wobei die Konstante  $\varrho_0$  die Dichte angibt. Um die Bewegungsgleichung für die Saite herzuleiten, verwenden wir das folgende Prinzip der Mechanik:

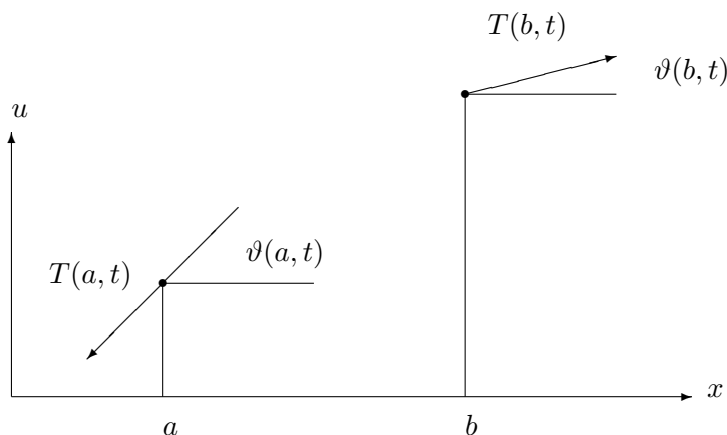


Figure 2.2: Die Komponenten der Spannungskräfte

Die Kräfte, die auf die Teilchen eines Systems wirken, teilt man in zwei Gruppen: Die *inneren Kräfte* werden von Teilchen des Systems aufeinander ausgeübt. Alle anderen Kräfte werden als *äußere Kräfte* bezeichnet. Um die Bewegung des Schwerpunktes des Systems zu bestimmen, genügt es, die Masse des Systems im Schwerpunkt zu konzentrieren und die Summe der äußeren Kräfte darauf wirken zu lassen.

Dieses Prinzip soll auf den Abschnitt der Saite zwischen  $x = a$  und  $x = b$  angewendet werden. Der Schwerpunkt hat die Koordinaten

$$S \left( \frac{a+b}{2}, \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x,t) dx \right).$$

Natürlich bewegt er sich wie die Teilchen nur parallel zur  $u$ -Achse. Die äußeren Kräfte, die auf den Abschnitt wirken, beinhalten Beiträge der Spannung an  $x = a$  und  $x = b$ . Wir nehmen an, dass sonst keine äußeren Kräfte (Gravitation, Reibung, ...) auf die Saite wirken.

Da sich der Schwerpunkt nur parallel zur  $u$ -Achse bewegt, berechnen wir die Komponenten der Spannungskräfte in positive  $u$ -Richtung. Wir erhalten

$$T(b,t) \sin \vartheta(b,t) \quad \text{bzw.} \quad -T(a,t) \sin \vartheta(a,t), \quad (2.5)$$

wobei  $\vartheta(x,t)$  der Winkel ist, den die Saite mit der  $x$ -Achse einschließt. Gemäß dem zweiten Newtonschen Gesetz setzen wir die Summe der Kräfte

(2.5)

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \vartheta) dx$$

gleich dem Produkt aus der Masse  $\rho_0(b-a)$  des Abschnittes und der Beschleunigung des Schwerpunktes in  $u$ -Richtung

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Da  $a$  und  $b$  beliebig gewählt werden können, muss die Differentialgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \vartheta)$$

gelten. Offensichtlich gilt  $\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \vartheta$ , woraus

$$\sin \vartheta = \frac{\partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}}$$

folgt. Die Differentialgleichung erhält die Form

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T \partial u / \partial x}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}} \right).$$

Bevor wir uns noch Gedanken darüber machen, wie  $T$  von  $u$  abhängt, stellen wir fest, dass die Differentialgleichung nichtlinear ist. Analog zur Behandlung der Pendelgleichung in Abschnitt 1 beschränken wir uns auf kleine Auslenkungen. In der stationären Lage  $u(x, t) \equiv 0$  ist die Spannung in der Saite gleich einer Konstanten  $T_0$ . Betrachten wir also eine Situation mit kleinen Auslenkungen, dann können wir die nichtlinearen Terme  $T$  und  $\sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2}$  durch  $T_0$  bzw. 1 ersetzen, und die Differentialgleichung reduziert sich auf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit der Konstanten  $c = \sqrt{T_0 / \rho_0}$ . Diese Gleichung beschreibt also die *kleinen ebenen transversalen Schwingungen einer homogenen idealen Saite* und heißt *eindimensionale Wellengleichung*. Aus der Tatsache, dass die Enden der Saite festgehalten werden, folgen die Randbedingungen

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{für } t > 0.$$

Um die Bewegung der Saite eindeutig bestimmen zu können, geben wir Anfangsbedingungen an, indem wir die Position und die Geschwindigkeit jedes Teilchens zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorschreiben:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{für } 0 < x < L.$$

Wir haben also wie im Fall des Wärmeleitungsproblems ein Anfangs-Randwertproblem zu lösen.

Die höherdimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \quad \text{für } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

kann für  $n = 2$  als Modell für die *Schwingungen einer Membran* und für  $n = 3$  als *Grundgleichung der Akustik* für die Ausbreitung von Schallwellen gesehen werden. Auf analoge Art und Weise wie im eindimensionalen Fall kann man auch hier Anfangs-Randwertprobleme definieren.



## Chapter 3

# Das Cauchyproblem

### 3.1 Der Satz von Cauchy-Kowalewskaja

In der folgenden Definition wird der Begriff des Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen verallgemeinert.

**Definition 3.1** Sei  $\Gamma$  eine  $C^1$ -Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  und  $\nu : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Einheitsnormalvektor auf  $\Gamma$ . Weiters seien die Funktionen  $\Phi_0, \dots, \Phi_{p-1} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Das Problem, eine Lösung  $u$  einer Differentialgleichung  $p$ -ter Ordnung zu finden, die den Zusatzbedingungen

$$\frac{\partial^m u}{\partial \nu^m} = \Phi_m \quad \text{auf } \Gamma, \quad m = 0, \dots, p-1,$$

genügt, heißt Cauchyproblem. Die Funktionen  $\Phi_0, \dots, \Phi_{p-1}$  heißen Cauchydaten.

#### Beispiel 3.1

Wir betrachten die lineare (homogene) Differentialgleichung zweiter Ordnung im  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Vorgegeben seien Cauchydaten auf der  $x$ -Achse:

$$u(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \Phi_1(x).$$

Wir nehmen an,  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  seien analytische Funktionen, und lösen das Problem mit der Potenzreihenmethode. Unter der Annahme,



dass  $u$  beliebig oft differenzierbar ist, können alle partiellen Ableitungen von  $u$  auf  $\Gamma$  rekursiv berechnet werden:

$$\nabla^{(k,l)}u = \nabla^{(k,l-2)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^{(k,l-2)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nabla^{(k+2,l-2)}u$$

Rekursive Anwendung dieser Relation reduziert die Berechnung von partiellen Ableitungen auf die Berechnung von  $\nabla^{(k,0)}u$  bzw.  $\nabla^{(k,1)}u$ . Wir erhalten schließlich

$$\nabla^{(k,l)}u(x,0) = \begin{cases} \Phi_0^{(k+l)}(x) & \text{für } l \text{ gerade} \\ \Phi_1^{(k+l-1)}(x) & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases}$$

Mit einer Taylorentwicklung nach  $y$  ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nabla^{(0,k)}u(x,0)}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_0^{(2k)}(x)}{2k!} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_1^{(2k)}(x)}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\ &= \frac{1}{2} (\Phi_0(x+y) + \Phi_0(x-y)) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \Phi_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die letzte Gleichung zeigt man durch Taylorentwicklung der rechten Seite um  $y = 0$ . Diese Darstellung der Lösung werden wir später auf einfachere Art ermitteln. Man beachte, dass sie auch für Daten  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$ , die nicht unbedingt analytisch sein müssen, gültig ist. Insbesondere genügt es zum Beispiel zu verlangen, dass  $\Phi_0$  zweimal und  $\Phi_1$  einmal stetig differenzierbar sind.

### Beispiel 3.2

Wir betrachten wiederum eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Für  $\Gamma$  wählen wir wieder die  $x$ -Achse, und die Cauchydaten sind wieder

$$u(x,0) = \Phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \Phi_1(x).$$

Differenzieren wir die zweite Bedingung nach  $x$ , so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,0) = \Phi_1'(x).$$

Daraus folgt, dass Funktionen, die die Cauchydaten annehmen, im allgemeinen die Differentialgleichung nicht erfüllen können. Im Falle, dass die Cauchydaten mit der Differentialgleichung kompatibel sind, d.h.  $\Phi_1'(x) = 0$ , existiert zwar eine Lösung; diese ist jedoch nicht eindeutig bestimmt:

$$u(x, y) = \Phi_0(x) + \Phi_1 y + f(y)$$

ist dann für jede beliebige differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f(0) = f'(0) = 0$  eine Lösung.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Cauchyprobleme mit analytischen Daten, d.h. dass der Differentialoperator  $L$  durch eine analytische Funktion bestimmt ist und dass die Hyperfläche  $\Gamma$  und die Cauchydaten analytisch sind. Die aus  $\Gamma$  zusammen mit den Cauchydaten gebildete  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{n+p}$  bezeichnen wir im Folgenden mit  $S$ .

**Definition 3.2** *Kann der Wert von  $L(u)$  an einem Punkt  $\mathbf{x} \in \Gamma$  aus den Cauchydaten berechnet werden, dann heißt die Mannigfaltigkeit  $S$  charakteristisch (für  $L$ ) am Punkt  $\mathbf{x}$ . Wenn  $S$  an jedem Punkt charakteristisch ist, heißt  $S$  Charakteristik der Differentialgleichung  $L(u) = 0$ .*

*Für lineare Differentialoperatoren ist die Frage, ob  $S$  charakteristisch ist, von den Cauchydaten unabhängig. In diesem Fall wird  $\Gamma$  als (nicht) charakteristisch bezeichnet.*

**Satz 3.1**  *$S$  ist in einem Punkt  $\mathbf{x} \in \Gamma$  genau dann charakteristisch für den quasilinearen Differentialoperator  $L$ , wenn*

$$L_p(\boldsymbol{\nu}; u) = 0 \tag{3.2}$$

*an der Stelle  $\mathbf{x}$  gilt, wobei  $\boldsymbol{\nu}$  ein Normalvektor an  $\Gamma$  im Punkt  $\mathbf{x}$  ist.*

**Bemerkung:** *Man beachte, dass die Bedingung (3.2) unabhängig von der Wahl des Normalvektors ist.*

**Beweis:** Wir verwenden in einer Umgebung von  $\mathbf{x}$  die in Lemma 1.3 hergeleitete Koordinatentransformation. Dann können aus den Cauchydaten alle partiellen Ableitungen

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}^{\mathbf{k}} u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), \quad k_1 \leq p-1$$

errechnet werden. Hier bezeichnen wir den Gradienten nach  $\xi$  mit  $\nabla_{\xi}$ . Führen wir die Koordinatentransformation im Differentialoperator durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} L(u) &= \sum_{|\mathbf{k}|=p} a_{\mathbf{k}}(u) \nabla^{\mathbf{k}} u + f(u) \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=p} a_{\mathbf{k}}(u) \frac{\partial^p u}{\partial \xi_1^p} (\nabla \xi_1)^{\mathbf{k}} + g(u) = \frac{\partial^p u}{\partial \xi_1^p} L_p(\nabla \xi_1; u) + g(u), \end{aligned}$$

wobei  $g(u)$  wegen der obigen Überlegung an  $\mathbf{x}$  aus den Cauchydaten berechnet werden kann. Die Ableitung  $\partial^p u / \partial \xi_1^p$  lässt sich aus den Cauchydaten nicht ermitteln. Der Wert von  $L(u)$  kann also genau dann bestimmt werden, wenn

$$L_p(\nabla \xi_1, u) = 0$$

an der Stelle  $\mathbf{x}$  gilt. Damit ist der Satz bewiesen, weil laut Lemma 1.3  $\nabla \xi_1$  normal auf  $\Gamma$  steht. QED

**Bemerkung:** *Der Beweis zeigt, dass  $S$  genau dann nicht charakteristisch ist, wenn die Differentialgleichung nach der Normalableitung  $p$ -ter Ordnung aufgelöst werden kann. Die Forderung, dass  $S$  nicht charakteristisch ist, entspricht der Bedingung (B) in Abschnitt 1.1.*

### Beispiel 3.3

Für die oben behandelten Beispiele gilt

1.  $L_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu^2$  für  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,

2.  $L_2(\lambda, \mu) = \lambda\mu$  für  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

Der Vektor  $\boldsymbol{\nu} = (0, 1)$  ist normal auf die  $x$ -Achse, und es gilt

1.  $L_2(\boldsymbol{\nu}) = -1$ ,

2.  $L_2(\boldsymbol{\nu}) = 0$ .

Die  $x$ -Achse ist also nirgends charakteristisch für  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

Sie ist eine charakteristische Kurve für  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

Mit Hilfe der Potenzreihenmethode lässt sich der folgende Satz über die Lösbarkeit des Cauchyproblems zeigen:

**Satz 3.2 (Cauchy-Kowalewskaja)** *Der quasilineare Differentialoperator  $L(u)$  sei durch eine analytische Funktion bestimmt. Weiters sei  $S$  eine analytische Mannigfaltigkeit, die an keinem Punkt  $\mathbf{x} \in \Gamma$  charakteristisch ist. Dann hat das Cauchyproblem für die Gleichung  $L(u) = 0$  in einer Umgebung von  $\Gamma$  eine eindeutige analytische Lösung.*

## 3.2 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

### Das Cauchyproblem im $\mathbb{R}^2$

Die allgemeine quasilineare Gleichung erster Ordnung im  $\mathbb{R}^2$  lautet

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \quad (3.3)$$

Ein Cauchyproblem erhält man mit der zusätzlichen Forderung

$$u = \tilde{u} \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.4)$$

wobei  $\Gamma$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$  ist. Sei die Mannigfaltigkeit  $S$  (eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$ ) parametrisiert durch  $\{(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t)) : t \in I\}$ .

Wir geben zunächst eine geometrische Interpretation der Differentialgleichung (3.3). Die Tangentialebene an die Fläche  $u = u(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0, u_0)$  hat die Gleichung

$$u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Der Normalvektor auf die Fläche ist also  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right)^T$ . Die Gleichung (3.3) kann man auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.h. der Vektor  $(a, b, c)^T$  liegt in der Tangentialebene an  $u = u(x, y)$ . Daraus folgt, dass wir die Differentialgleichung lösen können, indem wir eine Fläche

aus Raumkurven aufbauen, die durch Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= a(x, y, u), \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= b(x, y, u), \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= c(x, y, u)\end{aligned}\tag{3.5}$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen entstehen. Die Bedingung (3.4) wird erfüllt, indem wir diese Raumkurven von der Kurve  $S$  ausgehen lassen. Das bedeutet, dass für die Fläche  $u = u(x, y)$  eine Parameterdarstellung mit den Parametern  $s$  und  $t$  gewählt wird, die durch die Gleichungen (3.5) und die Zusatzbedingungen

$$x(0, t) = \tilde{x}(t), \quad y(0, t) = \tilde{y}(t), \quad u(0, t) = \tilde{u}(t),\tag{3.6}$$

bestimmt ist. Für festes  $t$  ist (3.5), (3.6) ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Lösung dieses Problems liefert  $u$  als Funktion von  $s$  und  $t$ . Die Funktionaldeterminante der Abbildung  $(s, t) \mapsto (x, y)$ , ausgewertet auf  $\Gamma$ , ist

$$\begin{vmatrix} \partial x / \partial s & \partial x / \partial t \\ \partial y / \partial s & \partial y / \partial t \end{vmatrix}_{\Gamma} = a \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - b \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}.$$

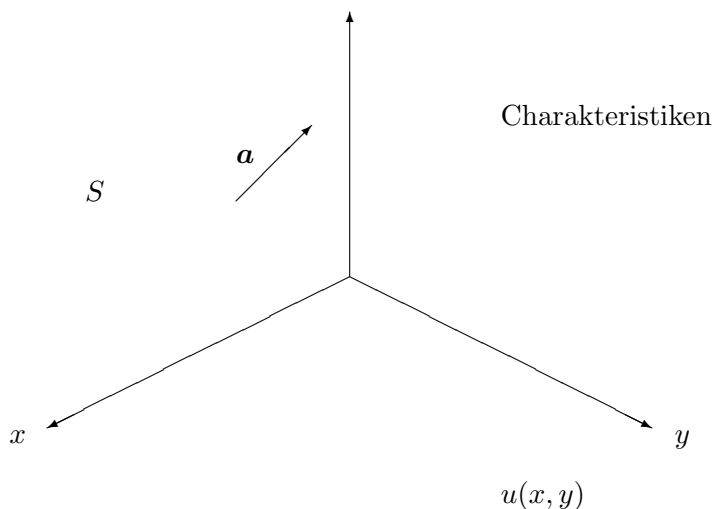
Da der Hauptteil des Differentialoperators in (3.3) durch  $L_1(\lambda, \mu) = a\lambda + b\mu$  gegeben ist und  $(\partial \tilde{y} / \partial t, -\partial \tilde{x} / \partial t)^T$  ein Normalvektor auf  $\Gamma$  ist, ist leicht zu sehen, dass die obige Funktionaldeterminante genau dann verschwindet, wenn  $S$  charakteristisch ist. Wir verwenden daher die Annahme

$$a \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - b \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{auf } S.\tag{3.7}$$

In diesem Fall ist die Abbildung  $(s, t) \mapsto (x, y)$  in einer Umgebung von  $\Gamma$  eine Koordinatentransformation, und  $u$  kann als Funktion von  $x$  und  $y$  geschrieben werden, womit das Cauchyproblem gelöst ist.

Man beachte, dass die letzte Gleichung in (3.5) als transformierte Version der ursprünglichen Differentialgleichung (3.3) betrachtet werden kann:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c.$$

Figure 3.1: Charakteristiken im  $\mathbb{R}^3$ .

Das Cauchyproblem kann also auf die Lösung eines AWP für gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Man sieht leicht, dass die für festes  $t$  erhaltenen Raumkurven Charakteristiken der Differentialgleichung sind. Das beschriebene Lösungsverfahren heißt daher *Methode der Charakteristiken*. Unter Verwendung des Satzes von Picard für gewöhnliche Differentialgleichungen sieht man, dass zur Anwendung der Methode der Charakteristiken stetige Differenzierbarkeit von  $S$ ,  $a$ ,  $b$  und  $c$  hinreichend sind. Wir erhalten also folgende Verbesserung des Satzes von Cauchy-Kowalewskaja:

**Satz 3.3** *Sei  $S$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und  $a$ ,  $b$  und  $c$  in einer Umgebung von  $S$  stetig differenzierbar. Weiters gelte (3.7). Dann hat das Problem (3.3), (3.4) in einer Umgebung von  $\Gamma$  eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung.*

Das ist ein wesentlicher Unterschied zur Potenzreihenmethode, bei der Analytizität aller Daten Voraussetzung war. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann man mit der Abschwächung der Glattheitsforderungen an die Daten sogar noch viel weiter gehen.

#### Beispiel 3.4

Wir betrachten eine räumlich eindimensionale Version der Gleichung (2.2) mit konstanter Geschwindigkeit und verschwindendem Reaktionsterm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Anwendung der Charakteristikenmethode zeigt, dass alle klassischen Lösungen die Form  $u(x, t) = f(x - vt)$  mit einer  $C^1$ -Funktion  $f$  haben. Die Forderung an  $f$  kann allerdings wesentlich abgeschwächt werden, wenn die Differentialgleichung im schwachen Sinn interpretiert wird. Für  $L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x}$  gilt offensichtlich  $L^* = -L$ . Schwache Lösungen von  $L(u) = 0$  müssen daher die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^2} uL(\varphi)d(x, t) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

erfüllen. Betrachten wir nun eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ , die durch eine Folge von glatten Funktionen  $f_n(x - vt)$ ,  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ , approximiert werden kann, dann ist  $u$  (durch Grenzübergang in der obigen Gleichung) distributionelle Lösung. Als Beispiel gibt jedes  $f \in L^1_{loc}$  mit  $u = f(x - vt)$  eine schwache Lösung.

### Das Cauchyproblem im $\mathbb{R}^n$

Das Cauchyproblem lautet nun

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n; u) \frac{\partial u}{\partial x_i} &= c(x_1, \dots, x_n), \\ u &= \tilde{u} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Vorgangweise ist analog. Sei  $\Gamma$  parametrisiert durch  $\tilde{x}(t_2, \dots, t_n)$ . Dann ist  $S$  nirgends charakteristisch, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.9}$$

gilt. Wie vorher definieren wir eine Koordinatentransformation

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (s, t_2, \dots, t_n)$$

durch die  $(n - 1)$ -dimensionale Schar von Anfangswertproblemen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial s} &= a_i, & i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= c, \\ \mathbf{x}(0, t_2, \dots, t_n) &= \tilde{\mathbf{x}}(t_2, \dots, t_n), & u(0, t_2, \dots, t_n) = \tilde{u}(t_2, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Damit wird wie im zweidimensionalen Fall die Lösung als  $(n - 1)$ -dimensionale Schar von Charakteristiken dargestellt. Es gilt das analoge Resultat:

**Satz 3.4** *Sei  $S$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit und  $a_i, i = 1, \dots, n$  und  $c$  in einer Umgebung von  $S$  stetig differenzierbar. Weiters gelte (3.9). Dann hat das Problem (3.8) in einer Umgebung von  $\Gamma$  eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung.*

### 3.3 Klassifikation quasilinearer Gleichungen zweiter Ordnung

#### Gleichungen in zwei unabhängigen Variablen

Wir betrachten die allgemeine quasilineare Gleichung zweiter Ordnung:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0.$$

Hier können  $a, b, c$  und  $f$  von  $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  abhängen. Der Hauptteil des Differentialoperators ist

$$L_2(\lambda, \mu; u) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2.$$

Sei  $(\nu_1, \nu_2)$  der Normalvektor auf eine Kurve  $\Gamma$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Dann ist die Mannigfaltigkeit  $S$  (siehe Abschnitt 1) charakteristisch in  $\mathbf{x}$ , wenn

$$L_2(\nu_1, \nu_2; u) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Es gibt drei Fälle:

- $b^2 - ac < 0$  : Es gibt keine Kurve, die im Punkt  $\mathbf{x}$  charakteristisch ist. Die Gleichung heißt *elliptisch*.



- $b^2 - ac > 0$  : Es gibt zwei charakteristische Richtungen im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die Gleichung heißt *hyperbolisch*.
- $b^2 - ac = 0$  : Es gibt nur eine charakteristische Richtung im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die Gleichung heißt *parabolisch*.

**Beispiel 3.5**

Die Laplacegleichung  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ist die einfachste elliptische Gleichung. Sie beschreibt stationäre Temperaturverteilungen in einem zweidimensionalen, homogenen, quellenfreien Medium (siehe Abschnitt 2.2).

Obwohl es keine Charakteristiken gibt, ist das Cauchyproblem nicht sachgemäß gestellt, wie das folgende Beispiel zeigt: Das Cauchyproblem

$$\Delta u = 0, \quad u(x, 0) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0,$$

hat die Lösung

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon}{2} \left( e^{y/\varepsilon} + e^{-y/\varepsilon} \right) \sin \frac{x}{\varepsilon}.$$

Die Lösung hängt offensichtlich für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nicht stetig von den Cauchydaten ab. Abschnitt 2.2 lässt uns erwarten, dass Randbedingungen die geeigneten Zusatzbedingungen für elliptische Gleichungen sind.

**Beispiel 3.6**

Die Wellengleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  ist die einfachste hyperbolische Gleichung. Sie beschreibt kleine Schwingungen einer Saite. Das Cauchyproblem ist im allgemeinen sachgemäß gestellt (siehe Abschnitt 3.1).

**Beispiel 3.7**

Die Wärmeleitungsgleichung  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  für ein eindimensionales homogenes Medium ist die einfachste parabolische Gleichung. Eine typische Zusatzbedingung ist die Anfangsbedingung  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Man beachte, dass dadurch kein Cauchyproblem gegeben ist, weil die Normalableitung nicht vorgegeben wird. Außerdem ist die  $x$ -Achse

eine Charakteristik. Das Anfangswertproblem ist also durch die Theorie von Abschnitt 1 nicht abgedeckt; trotzdem ist es sachgemäß gestellt.

### Gleichungen in mehreren unabhängigen Variablen

Während für Gleichungen in 2 Veränderlichen eine vollständige Klassifikation gegeben wurde, beschränken wir uns hier auf drei Typen von Gleichungen, die in den Anwendungen am häufigsten auftreten.

Der Hauptteil des allgemeinen quasilinearen Operators zweiter Ordnung

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f,$$

kann als quadratische Form mit einer symmetrischen Matrix  $A$  geschrieben werden:

$$L_2(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T A \mathbf{z}, \quad A = (a_{ij}).$$

Ist  $A$  positiv definit, d.h. es gibt keine charakteristischen Richtungen, dann heißt die Gleichung *elliptisch*. Stationäre Temperaturverteilungen werden durch elliptische Gleichungen beschrieben (siehe Abschnitt 2.2,  $A = kI$ ).

Eine Gleichung der Form

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{für } u = u(t, x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $L(u)$  ein elliptischer Differentialoperator in den unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist, heißt *hyperbolisch*. Ein Beispiel für eine hyperbolische Gleichung ist die Gleichung für die Schwingungen einer Membran (Abschnitt 2.3).

Eine Gleichung der Form

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{für } u = u(t, x_1, \dots, x_n),$$

mit elliptischem  $L(u)$  heißt *parabolisch*. Eine Anwendung für parabolische Gleichungen sind instationäre Temperaturverteilungen.

### 3.4 Aufgaben

**Aufgabe 3.1** Man beweise die letzte Gleichung in (3.1) und zeige, dass die rechte Seite auch dann eine Lösung des Cauchyproblems ist, wenn  $\Phi_0$  nur zweimal und  $\Phi_1$  nur einmal stetig differenzierbar sind.

**Aufgabe 3.2** Man führe in der Gleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  die Koordinatentransformation

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

durch und ermittle die allgemeine Lösung der Gleichung durch Integration.

**Aufgabe 3.3** Mit Hilfe der Charakteristikenmethode löse man das Cauchyproblem für die Differentialgleichung  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$  mit  $\Gamma = \{(x, y) : x + y = 0\}$  und  $u = x$  auf  $\Gamma$ . Man gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an und illustriere die erhaltenen Resultate mit Hilfe einer Skizze.

**Aufgabe 3.4** Die Gleichung

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a$  und  $b$  kann durch eine lineare Koordinatentransformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung transformiert werden. Man beweise diese Aussage mit Hilfe der Charakteristikenmethode, berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$  und zeige, dass das Cauchyproblem mit  $\Gamma = \{(x, y) : x - 2y = 3\}$  und  $u = 1$  auf  $\Gamma$ , keine Lösung hat. Wie müssten die Cauchydaten modifiziert werden, damit es eine Lösung gibt? Ist die Lösung dann eindeutig?

**Aufgabe 3.5** Für die Differentialgleichung aus Aufgabe 3.3 betrachte man das Cauchyproblem mit  $\Gamma = \{(x, y) : x = y^2\}$  und  $u = 1$  auf  $\Gamma$ . Ist Satz 3.3 anwendbar? Man modifiziere die Aufgabenstellung, um das Problem lösbar zu machen und diskutiere die Lösung anhand einer Skizze.

**Aufgabe 3.6** Für die Differentialgleichung  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = y$  löse man das Cauchyproblem mit  $\Gamma = \{(x, y) : y = 1\}$  und  $u = x$  auf  $\Gamma$ . Man gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an und illustriere die erhaltenen Resultate mit Hilfe einer Skizze.

**Aufgabe 3.7** Gegeben sei das Cauchyproblem

$$\begin{aligned}\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(u) \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) &= \varphi(y), & y \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

mit  $\alpha, \beta, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$  und  $\alpha(\varphi(y)) \neq 0, y \in \mathbb{R}$ . Man zeige, dass die Lösung  $u(x, y)$  der impliziten Gleichung

$$u = \varphi \left( y - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)} x \right)$$

genügt, und dass diese lokal um die  $y$ -Achse nach  $u$  aufgelöst werden kann.

**Aufgabe 3.8** Man wende das Resultat von Aufgabe 3.7 auf das Anfangswertproblem für die *Burgersgleichung* an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Man berechne die Lösung für  $u_0(x) = x$  und  $u_0(x) = -x$ , bestimme ihren maximalen Definitionsbereich und diskutiere das Resultat anhand der geometrischen Eigenschaften von Charakteristiken.

**Aufgabe 3.9** Wir betrachten ein Ensemble von Teilchen der Masse  $m$ , die sich entlang einer Geraden bewegen können. Jedes Teilchen wird zum Zeitpunkt  $t$  durch seine Position  $x$  und Geschwindigkeit  $v$ , d.h. durch einen Vektor  $(x, v)$  im Phasenraum  $\mathbb{R}^2$  beschrieben. Sei  $f(x, v, t)$  die Teilchendichte im Phasenraum zum Zeitpunkt  $t$ , dann beschreibt die *Liouvillegleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{m} F(x) \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

die Bewegung des Ensembles, wenn die Teilchen durch eine ortsabhängige Kraft  $F$  beschleunigt werden. Man löse das Anfangswertproblem  $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$  für die Liouvillegleichung für  $F(x) = -m\omega^2 x$  (*harmonischer Oszillator*). Man vergleiche die Differentialgleichungen für die Charakteristiken mit dem zweiten Newtonschen Gesetz.

**Aufgabe 3.10** Man zeige, dass jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen mit konstanten Koeffizienten auf eine der folgenden Standardformen transformiert werden kann:

1.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f(x, y)$  ,
2.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f(x, y)$  ,
3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$  ,
4.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = f(x, y)$  ,

wobei  $\gamma$  einen der Werte 1, 0 oder  $-1$  hat.

Anleitung: a) Mit Hilfe einer Rotation der Ebene kann die gemischte Ableitung eliminiert werden.

b) Elimination von weiteren Termen mit Hilfe einer Transformation der abhängigen Variablen:  $u = e^{\alpha x + \beta y} v$ .

c) Skalierung des Betrages der verbleibenden Koeffizienten auf 1 durch eine Transformation der Form  $\xi = c_1 x$ ,  $\eta = c_2 y$ .

## Chapter 4

# Elliptische Gleichungen

### 4.1 Der Laplaceoperator

#### 4.1.1 Die Fundamentallösung. Greensche Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Lösungen der *Poissongleichung*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (4.1)$$

mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , bzw. mit der homogenen Version, der *Laplacegleichung*  $\Delta u = 0$ . Klassische Lösungen der Laplacegleichung werden *harmonische Funktionen* genannt.

Von besonderem Interesse werden Lösungen des *klassischen Dirichlet-problems* für  $f \in C(\bar{\Omega})$  sein, das sind Funktionen  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , die die Differentialgleichung (4.1) und die Dirichlet-Randbedingungen

$$u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.2)$$

für stetiges  $u_D$  erfüllen.

Wir geben zunächst die Greensche Formel für den Laplaceoperator an. Man sieht leicht, dass  $L$  formal selbstadjungiert ist und dass der Randoperator  $B$  gegeben ist durch  $B(u, v) = v\nabla u - u\nabla v$ . Daher gilt

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF. \quad (4.3)$$

Nun soll eine Fundamentallösung berechnet werden. Da der Laplaceoperator konstante Koeffizienten besitzt, genügt es, eine Fundamentallösung

mit Pol in 0 zu finden. Diese soll so bestimmt werden, dass sie weg von 0 mit einer harmonischen Funktion übereinstimmt.

Definieren wir  $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus \overline{K_\varepsilon}$ , so können wir die Bedingung (1.15) ersetzen durch

$$\varphi(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} U \Delta \varphi \, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (4.4)$$

Die Greensche Formel im Gebiet  $\Omega_\varepsilon$  liefert

$$\varphi(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \Delta U \, d\mathbf{x} + \int_{\partial K_\varepsilon} \left( U \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \varphi \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF \right] \quad (4.5)$$

Das erste Integral verschwindet wegen der Annahme, dass  $U$  weg vom Ursprung harmonisch ist. Wir machen die weitere Einschränkung, dass wir eine Fundamentallösung suchen, die nur von  $r = |\mathbf{x}|$  abhängt. Eine notwendige Bedingung leiten wir her, indem wir die obige Gleichung für Testfunktionen  $\varphi$  betrachten, die in einer Umgebung des Ursprungs konstant sind:

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{dU}{dr} dF = S_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-1} \frac{dU}{dr}(\varepsilon). \quad (4.6)$$

Das zeigt, dass die Ableitung von  $U$  am Ursprung einen Pol besitzen muss. Transformieren wir nun die Laplacegleichung auf sphärische Koordinaten  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $\omega = \mathbf{x}/r$  und berücksichtigen dabei, dass  $U$  nur von  $r$  abhängt, so ergibt sich

$$\frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \frac{dU}{dr} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung, die (4.6) erfüllt, ist

$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r & \text{für } n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)S_n} r^{2-n} & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (4.8)$$

**Satz 4.1** *Durch (4.8) ist eine Fundamentallösung des Laplaceoperators gegeben.*

**Beweis:** Man sieht leicht, dass die durch (4.8) definierte Funktion in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  ist und damit eine reguläre Distribution bestimmt. Folglich ist (4.4) wirklich äquivalent zu (1.12). Es bleibt nur zu zeigen, dass (4.5) auch

für Testfunktionen, die nicht in einer Umgebung des Ursprungs konstant sind, gültig ist. Es gilt

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \left( U \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \varphi \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF = \int_{\partial K_\varepsilon} \varphi \frac{dU}{dr} dF - U(\varepsilon) \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dF. \quad (4.9)$$

Die Abschätzung

$$\left| U(\varepsilon) \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dF \right| \leq U(\varepsilon) \varepsilon^{n-1} S_n \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(\mathbf{x})| \quad (4.10)$$

zeigt, dass das zweite Integral auf der rechten Seite von (4.9) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  verschwindet. Im ersten Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung an:

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \varphi \frac{dU}{dr} dF = \varphi(\boldsymbol{\xi}_\varepsilon) \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{dU}{dr} dF \quad (4.11)$$

mit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \boldsymbol{\xi}_\varepsilon = 0$ . Das erste Integral konvergiert daher für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $\varphi(0)$ , und der Beweis ist vollständig. QED

Das *Newtonsche Potential*

$$(U * f)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (4.12)$$

ist für alle Funktionen  $f$  definiert, für die das Integral auf der rechten Seite existiert. Aus Satz 1.9 folgt, dass für  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  das Newtonsche Potential eine distributionelle Lösung der Poissongleichung (4.1) ist. Aus der alternativen Darstellung

$$(U * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} U(|\boldsymbol{\xi}|) f(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (4.13)$$

sieht man leicht, dass in diesem Fall  $U * f \in C^\infty(\overline{\Omega})$  gilt und das Newtonsche Potential daher eine klassische Lösung ist. Eine Abschwächung der Glattheitsforderungen an  $f$  ist möglich. Der Beweis eines entsprechenden Resultates würde allerdings den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Für die Funktionen  $u(\boldsymbol{\xi})$  und  $U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)$  können wir die Greensche Formel wegen der Singularität von  $U$  an  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$  nicht verwenden. Ähnlich wie oben definieren wir für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$  und für  $\mathbf{x} \in \Omega$  das Gebiet  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(\mathbf{x})}$ . Auf  $\Omega_\varepsilon$  liefert die Greensche Formel

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U \Delta u d\boldsymbol{\xi} = \int_{\partial \Omega} \left( U \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF + \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} \left( U \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF. \quad (4.14)$$



Behandeln wir das Integral über den Rand der Kugel analog zum obigen Beweis, dann liefert der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Formel

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF + \int_{\Omega} U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \Delta u \, d\xi \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (4.15)$$

Für eine beliebige harmonische Funktion  $h \in C^2(\bar{\Omega})$  folgt aus der Greenschen Formel

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\nu}} - h \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) dF + \int_{\Omega} h \Delta u \, d\xi. \quad (4.16)$$

Nun schreiben wir  $G = U + h$  und addieren die Gleichungen (4.15) und (4.16). Weiters nehmen wir an, dass  $h$  so gewählt ist, dass  $G$  auf  $\partial\Omega$  verschwindet. Dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}} dF + \int_{\Omega} G \Delta u \, d\xi \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (4.17)$$

Die Funktion  $G$  ist eine Fundamentallösung, die zusätzlich homogene Dirichlet-Randbedingungen erfüllt. Sie wird *Greensche Funktion* (der ersten Art) für  $\Omega$  genannt. Kennt man eine solche Greensche Funktion, dann hat man mit der obigen Gleichung eine explizite Formel für  $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösungen des klassischen Dirichletproblems für die Poissongleichung. Man beachte, dass im allgemeinen nicht für beliebige Daten  $f \in C(\bar{\Omega})$  und  $u_D \in C(\partial\Omega)$  durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u_D \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}} dF + \int_{\Omega} G f \, d\xi \quad (4.18)$$

eine Lösung des klassischen Dirichletproblems gegeben sein muss.

### Beispiel 4.1

Bei Problemen mit einfacher Geometrie kann die Greensche Funktion mit Hilfe der *Spiegelungsmethode* ermittelt werden. Diese wird anhand des folgenden Beispiels erläutert: Wir betrachten das Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (4.19)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

und verwenden die Fundamentallösung

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.21)$$

Die Idee ist, für  $h$  die Fundamentallösung mit einem Pol außerhalb des betrachteten Gebietes zu verwenden. Konkret bestimmen wir diesen Pol durch Spiegelung am Rand des Gebietes. Von der Fundamentallösung mit Pol  $(\xi, \eta)$ ,  $\eta > 0$  ziehen wir die mit dem an der  $x$ -Achse gespiegelten Pol  $(\xi, -\eta)$  ab:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left( \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right)$$

Offensichtlich hat  $G$  im Gebiet  $y > 0$  nur den Pol  $(\xi, \eta)$ , ist daher eine Fundamentallösung. Weiters erfüllt es die homogene Randbedingung  $G(x, 0, \xi, \eta) = 0$ . Damit können wir die Lösung des Problems schreiben als

$$\begin{aligned} u(x, y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, 0) g(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \end{aligned} \quad (4.22)$$

Diese Beziehung heißt *Poissonsche Integralformel für die Halbebene*.

#### 4.1.2 Die Poissonsche Integralformel für Kugeln

Zur Bestimmung der Greenschen Funktion für Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  kann eine Variation der Spiegelungsmethode verwendet werden. Sei konkret  $\Omega = K_R$ ; dann bezeichnen wir für  $\mathbf{x} \in K_R$  mit

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x} \quad (4.23)$$

den an  $\partial K_R$  'gespiegelten' Punkt. Die Greensche Funktion für  $K_R$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - U\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{R} |\mathbf{x} - \bar{\boldsymbol{\xi}}|\right) & \text{für } \boldsymbol{\xi} \neq 0 \\ U(|\mathbf{x}|) - U(R) & \text{für } \boldsymbol{\xi} = 0 \end{cases} \\ &= U(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - U\left(\sqrt{(|\mathbf{x}||\boldsymbol{\xi}|/R)^2 + R^2 - 2\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die folgenden Eigenschaften sind leicht zu beweisen:

**Lemma 4.1** Für die durch (4.24) definierte Funktion  $G$  gilt

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \quad G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \text{für } \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \overline{K}_R. \quad (4.25)$$

**Beweis:** Die Symmetrieeigenschaft ist offensichtlich. Die zweite Eigenschaft folgt daraus, dass  $U$  eine monoton wachsende Funktion von  $r$  ist und dass

$$|\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2 \leq \left( \frac{|\mathbf{x}| |\boldsymbol{\xi}|}{R} \right)^2 + R^2 \quad \text{für } |\mathbf{x}|, |\boldsymbol{\xi}| \leq R \quad (4.26)$$

gilt.

QED

Die Symmetrieeigenschaft hat folgende physikalische Interpretation: Die durch eine an der Stelle  $\boldsymbol{\xi}$  befindliche Wärmequelle verursachte Temperatur an der Stelle  $\mathbf{x}$  ist gleich der durch eine an der Stelle  $\mathbf{x}$  befindliche Wärmequelle verursachte Temperatur an der Stelle  $\boldsymbol{\xi}$ . Die zweite Eigenschaft bedeutet, dass die durch eine Senke verursachte Temperatur überall unter der Randtemperatur  $G = 0$  liegt.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass für  $\boldsymbol{\xi} \in \partial K_R$  für die Normalableitung von  $G$

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial G}{\partial |\boldsymbol{\xi}|} = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{S_n R} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-n} \geq 0 \quad (4.27)$$

gilt. Für harmonische Funktionen  $u \in C^2(\overline{K}_R)$  gilt daher die *Poissonsche Integralformel für Kugeln*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{S_n R} \int_{\partial K_R} \frac{u(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n} dF. \quad (4.28)$$

In diesem Zusammenhang wird die durch (4.27) definierte Funktion  $K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  auch *Poissonscher Kern* genannt. Eine direkte Folgerung aus der Poissonschen Integralformel ist das folgende Resultat:

**Satz 4.2** Eine in einer offenen Menge harmonische Funktion ist dort beliebig oft differenzierbar.

**Beweis:** Da der Poissonsche Kern beliebig oft differenzierbar ist, gilt der Satz wegen der Poissonschen Integralformel für Kugeln. Jeder Punkt in einer beliebigen offenen Menge ist Mittelpunkt einer in der offenen Menge liegenden Kugelumgebung, für die die Poissonsche Integralformel angewendet werden kann.

QED

Die Poissonsche Integralformel liefert eine klassische Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung in einer Kugel.

**Satz 4.3** Sei  $u_D \in C(\partial K_R)$ . Dann definiert

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{S_n R} \int_{\partial K_R} \frac{u_D(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n} dF & \text{für } \mathbf{x} \in K_R, \\ u_D(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in \partial K_R, \end{cases} \quad (4.29)$$

eine harmonische Funktion  $u \in C^\infty(K_R) \cap C(\overline{K}_R)$ .

**Beweis:** Alles, was nach den bisherigen Resultaten zu zeigen bleibt, ist die Stetigkeit an Randpunkten. Dazu verwenden wir zunächst die Poissonsche Integralformel mit  $u = 1$  um für den Poissonschen Kern die Identität

$$\int_{\partial K_R} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dF = 1 \quad (4.30)$$

herzuleiten. Sei nun  $\mathbf{x}_0 \in \partial K_R$  und  $\varepsilon > 0$ . Klarerweise gibt es ein  $M > 0$  mit  $|u_D| \leq M$  auf  $\partial K_R$ . Weiters wählen wir  $\delta > 0$ , sodass  $|u_D(\boldsymbol{\xi}) - u_D(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon/2$  für  $|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0| < \delta$ . Für  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta/2$  gilt dann

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{\partial K_R} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) (u_D(\boldsymbol{\xi}) - u_D(\mathbf{x}_0)) dF \right| \\ &\leq \int_{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0| \leq \delta} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |u_D(\boldsymbol{\xi}) - u_D(\mathbf{x}_0)| dF \\ &\quad + \int_{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0| > \delta} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) |u_D(\boldsymbol{\xi}) - u_D(\mathbf{x}_0)| dF \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M(R^2 - |\mathbf{x}|^2)R^{n-2}}{(\delta/2)^n}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Hier wurde verwendet, dass aus  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta/2$  und  $|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_0| > \delta$  die Ungleichung  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| > \delta/2$  folgt. Für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  gilt natürlich  $|\mathbf{x}| \rightarrow R$ , und daher gilt offensichtlich  $|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$  für  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$  klein genug. QED

### 4.1.3 Das Maximumprinzip

Wir betrachten stationäre Temperaturverteilungen in einem quellenfreien endlichen Medium, wobei die Temperatur auf dem Rand festgehalten wird. Dann ist auf Grund von physikalischen Überlegungen folgende Aussage plausibel: Die Temperatur im Inneren kann an keinem Punkt größer (kleiner) sein als die maximale (minimale) Temperatur auf dem Rand. Lässt man nichtnegative Wärmequellen im Inneren des Mediums zu, dann kann die maximale Temperatur im Inneren auftreten. Von der minimalen Temperatur werden wir jedoch immer noch erwarten, dass sie auf dem Rand auftritt.

Es stellt sich die Frage, ob sich diese Aussagen mathematisch verifizieren lassen.

### Beispiel 4.2

Die Lösung des stationären Wärmeleitungsproblems in einer homogenen, quellenfreien Kugel ist durch die Poissonsche Integralformel (4.29) gegeben.

Nehmen wir nun an, die Dirichletdaten können nach oben und unten durch

$$m \leq u_D(\boldsymbol{\xi}) \leq M \quad \text{für } \boldsymbol{\xi} \in \partial K_R \quad (4.32)$$

abgeschätzt werden. Wir multiplizieren diese Relation mit dem Poissonschen Kern  $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$  und integrieren über  $\partial K_R$ . Dann folgt aus der Eigenschaft (4.30) und der Nichtnegativität des Poissonschen Kernes die Abschätzung

$$m \leq u \leq M \quad \text{in } K_R. \quad (4.33)$$

Das ist das erwünschte Resultat.

Zum Beweis des Maximumprinzips für den Laplaceoperator benötigen wir ein Hilfsresultat, den *Mittelwertsatz*:

**Satz 4.4** Für  $u \in C^2(\Omega)$  gelte  $\Delta u = 0$  ( $\geq 0$ ,  $\leq 0$ ) in  $\Omega$ . Dann gilt für jede Kugel  $K_R = K_R(\boldsymbol{x}_0)$  mit  $\bar{K}_R \subset \Omega$

$$u(\boldsymbol{x}_0) = (\leq, \geq) \frac{1}{S_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R} u \, dF. \quad (4.34)$$

**Beweis:** Seien  $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$  und  $\omega = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)/r$  sphärische Koordinaten mit Mittelpunkt  $\boldsymbol{x}_0$ . Dann gilt für  $0 < \varrho \leq R$

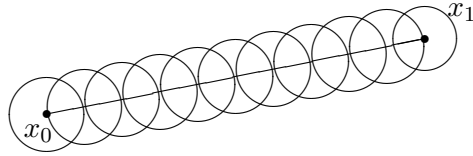
$$0 = (\leq, \geq) \int_{K_\varrho} \Delta u \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial K_\varrho} \frac{\partial u}{\partial r} \, dF = \varrho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(\boldsymbol{x}_0 + \varrho\omega) \, dF.$$

Dividiert man diese Relation durch  $\varrho^{n-1}$  und integriert man von 0 bis  $R$ , so erhält man

$$0 = (\leq, \geq) \int_{|\omega|=1} \left( u(\boldsymbol{x}_0 + R\omega) - u(\boldsymbol{x}_0) \right) \, dF = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial K_R} u \, dF - S_n u(\boldsymbol{x}_0).$$

Das ist das gewünschte Resultat.

QED

$\Omega$ Figure 4.1: Das Maximumprinzip für  $\Delta u \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

**Bemerkung:** Das Resultat mit dem Gleichheitszeichen folgt auch direkt aus der Poissonschen Integralformel, ausgewertet am Kugelmittelpunkt.

Nun formulieren wir das *starke Maximumprinzip* (*Minimumprinzip*) für den Laplaceoperator:

**Satz 4.5** Für  $u \in C^2(\Omega)$  gelte  $\Delta u \geq 0$  ( $\leq 0$ ) in  $\Omega$ . Weiters existiere ein  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  mit  $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\Omega} u$  ( $\min_{\Omega} u$ ). Dann ist  $u$  konstant.

**Beweis:** Es gelte

$$u \leq M \quad (\geq M) \quad \text{in } \Omega, \quad u(\mathbf{x}_0) = M.$$

Wir haben zu zeigen, dass  $u$  an jedem Punkt  $\mathbf{x}_1 \in \Omega$  den Wert  $M$  annimmt. Betrachten wir eine Kugel in  $\Omega$ , an deren Mittelpunkt  $u$  den Wert  $M$  annimmt. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz, dass  $u$  auch auf dem Rand der Kugel gleich  $M$  sein muss. Verbinden wir nun die Punkte  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_1$  durch eine Kurve, die in  $\Omega$  verläuft. Dann kann man ein  $R$  angeben, so dass jede Kugel mit Radius  $R$  und Mittelpunkt auf der Kurve ganz in  $\Omega$  liegt. Nun wählen wir Punkte auf der Kurve, die beginnend von  $\mathbf{x}_0$  den Abstand  $R$  voneinander haben. Auf diese Art erreichen wir in endlich vielen Schritten den Punkt  $\mathbf{x}_1$ , wobei der Abstand zwischen  $\mathbf{x}_1$  und dem Punkt davor eventuell kleiner als  $R$  ist. Mit Hilfe der obigen Aussage können wir schließen, dass  $u$  auf allen so gewählten Punkten einschließlich  $\mathbf{x}_1$  den Wert  $M$  annimmt. QED

Ein Korollar dieses Satzes ist das *schwache Maximumprinzip* (*Minimumprinzip*):

**Satz 4.6** Für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$  und für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  sei  $\Delta u \geq 0$  ( $\leq 0$ ). Dann gilt

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u), \quad (4.35)$$

und daher für harmonische  $u$

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(\mathbf{x}) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.36)$$

Eine direkte Konsequenz daraus ist ein Eindeutigkeitsresultat für das klassische Dirichletproblem für die Poissongleichung:

**Satz 4.7** Für  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  sei  $\Delta u = \Delta v$  in  $\Omega$  und  $u = v$  auf  $\partial\Omega$ . Dann gilt  $u = v$  in  $\Omega$ .

#### 4.1.4 Eine Anwendung der Fouriertransformation

Dieser Abschnitt enthält eine alternative Herleitung der Poissonschen Integralformel für die Halbebene. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wir nehmen an,  $g$  könne mit Hilfe der Fourier-Transformierten dargestellt werden, und suchen eine Lösung, für die das auch gilt.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\wedge}(\mu, y) e^{i\mu x} d\mu$$

mit

$$u^{\wedge}(\mu, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i\mu x} dx.$$

Die Funktion  $u^{\wedge}$  ist in diesem Fall die eindimensionale Fourier-Transformierte bezüglich  $x$ . Zweimaliges Differenzieren nach  $y$  gibt

$$\frac{\partial^2 u^{\wedge}}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{\wedge} = - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{\wedge} = \mu^2 u^{\wedge}.$$

Fordern wir die Beschränktheit von  $u^{\wedge}$  und die Randbedingung  $u^{\wedge}(\mu, 0) = g^{\wedge}(\mu)$ , so folgt

$$u^{\wedge}(\mu, y) = g^{\wedge}(\mu) e^{-|\mu|y}$$

## 4.2. DAS MAXIMUMPRINZIP FÜR ELLIPTISCHE OPERATOREN 71

Die Lösung  $u$  erhält man durch Faltung von  $g$  mit der Funktion, deren Fouriertransformierte  $e^{-|\mu|y}$  ist. Diese berechnen wir mit Hilfe der Inversionsformel

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\mu|y} e^{-i\mu x} d\mu &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{\mu(y+ix)} d\mu + \int_0^{\infty} e^{\mu(-y+ix)} d\mu \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{\mu(y+ix)}}{y+ix} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{\mu(-y+ix)}}{-y+ix} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{y+ix} + \frac{1}{y-ix} \right) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass  $y$  positiv ist. Die Lösung ist also

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

## 4.2 Das Maximumprinzip für elliptische Operatoren

### 4.2.1 Das schwache Maximumprinzip

Wir betrachten lineare Differentialoperatoren der Form

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.37)$$

mit Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ , die in  $\Omega$  beschränkt sind. Wir nehmen an,  $L$  wäre *gleichmäßig elliptisch* in  $\Omega$ , d.h. es existiert  $\lambda > 0$  mit

$$\mathbf{z}^T A(\mathbf{x}) \mathbf{z} \geq \lambda |\mathbf{z}|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{mit } A(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{n \times n}. \quad (4.38)$$

Das folgende schwache Maximumprinzip ist eine Verallgemeinerung von Satz 4.6.

**Satz 4.8** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $c = 0$  in  $\Omega$ . Für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  gelte

$$L(u) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{in } \Omega. \quad (4.39)$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left( \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right). \quad (4.40)$$

Für den Beweis benötigen wir ein Hilfsresultat:



**Lemma 4.2** Sei  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  positiv definit und  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  negativ semidefinit. Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} \leq 0. \quad (4.41)$$

**Beweis:** Zunächst bemerken wir, dass

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} = (AB^T)_{ii} = (AB)_{ii}, \quad (4.42)$$

und daher  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} = \text{sp}(AB)$  gilt. Wegen der positiven Definitheit von  $A$  existiert eine orthogonale Transformationsmatrix  $S$  mit  $SAS^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $\lambda_i > 0$ . Da die Spur einer Matrix invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen ist, folgt

$$\text{sp}(AB) = \text{sp}(SAS^{-1}SBS^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i, \quad (4.43)$$

wobei  $\beta_i$  das  $i$ -te Diagonalelement von  $SBS^{-1}$  ist. Wegen der negativen Semidefinitheit von  $SBS^{-1}$  gilt  $\beta_i \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . QED

**Beweis:(des Satzes)** Man sieht leicht, dass die stärkere Voraussetzung  $L(u) > 0$  ein starkes Maximumprinzip impliziert, d.h.  $u$  kann in diesem Fall kein Maximum in  $\Omega$  annehmen. An einem solchen Punkt  $\mathbf{x}_0$  gilt nämlich  $\nabla u(\mathbf{x}_0) = 0$  und die Hessematrix  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right)_{n \times n}$  ist negativ semidefinit. Wegen des Lemmas gilt daher

$$L(u)(\mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \leq 0, \quad (4.44)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Voraussetzungen an den Differentialoperator implizieren  $a_{11} \geq \lambda$  und  $|b_1| \leq b_0 > 0$ . Daher gilt für  $\gamma$  groß genug

$$L(e^{\gamma x_1}) = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \geq (\gamma \lambda - b_0)\gamma e^{\gamma x_1} > 0. \quad (4.45)$$

Für  $L(u) \geq 0$  und für  $\varepsilon > 0$  können wir damit aus  $L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial \Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) \quad (4.46)$$

folgern. Der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert die Aussage des Satzes. QED

Das entsprechende Resultat für nichtnegative  $c$  ist ein Korollar des letzten Satzes:

**Satz 4.9** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $c \geq 0$  in  $\Omega$ . Für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  gelte

$$L(u) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{in } \Omega. \quad (4.47)$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} u = \max(0, \sup_{\partial\Omega} u) \quad \left( \inf_{\Omega} u = \min(0, \inf_{\partial\Omega} u) \right). \quad (4.48)$$

**Beweis:** Wir betrachten den Fall  $L(u) \geq 0$ . Die Aussage des Satzes ist nur dann nicht trivial, wenn die Menge

$$\Omega_+ = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) > 0\} \quad (4.49)$$

nicht leer ist. Da in  $\Omega_+$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq cu \geq 0 \quad (4.50)$$

gilt, folgt aus dem vorhergehenden Satz, dass  $u$  seinen maximalen Wert auf  $\partial\Omega_+$  annimmt. Da sich  $\partial\Omega_+$  zusammensetzt aus Randpunkten von  $\Omega$  und aus Punkten, an denen  $u$  verschwindet, ist der Beweis des Satzes beendet. QED

### 4.2.2 Das starke Maximumprinzip

Obwohl für die meisten Anwendungen das schwache Maximumprinzip ausreicht, ist das starke Maximumprinzip auch ein wichtiges Werkzeug. Zu seinem Beweis verwenden wir ein Hilfsresultat über das Verhalten am Rand. Wir sagen, das Gebiet  $\Omega$  erfüllt an  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  eine *innere Kugelbedingung*, wenn es eine offene Kugel  $K \subset \Omega$  gibt mit  $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ .

**Lemma 4.3** Sei  $c = 0$  und  $L(u) \geq 0$  in  $\Omega$ . Für  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  sei  $u$  stetig an  $\mathbf{x}_0$  und  $u(\mathbf{x}_0) > u(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Weiters erfülle  $\Omega$  an  $\mathbf{x}_0$  eine innere Kugelbedingung, und der nach außen gerichtete Einheitsnormalvektor  $\nu$  auf den Rand existiere an  $\mathbf{x}_0$ . Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}_0) > 0. \quad (4.51)$$

Dieselbe Aussage gilt für  $c \geq 0$  unter der zusätzlichen Annahme  $u(\mathbf{x}_0) \geq 0$ .

**Beweis:** Da  $\Omega$  an  $\mathbf{x}_0$  eine innere Kugelbedingung erfüllt, gibt es eine Kugel  $K_R(\mathbf{y}) \subset \Omega$  mit  $\mathbf{x}_0 \in \partial K_R(\mathbf{y})$ . Wir definieren die Hilfsfunktion

$$v(\mathbf{x}) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2} \quad (4.52)$$

mit  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  und dem positiven Parameter  $\alpha$ . Für  $c \geq 0$  berechnen wir

$$\begin{aligned} L(v) &= 4\alpha^2 e^{-\alpha r^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha e^{-\alpha r^2} \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ &\quad - 2\alpha e^{-\alpha r^2} \sum_{i=1}^n b_i(x_i - y_i) - cv \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \left[ 4\alpha^2 \lambda r^2 - 2\alpha \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} + |\mathbf{b}|r \right) - c \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Für positives  $\varrho < R$  betrachten wir den Kreisring  $A = K_R(\mathbf{y}) \setminus K_\varrho(\mathbf{y})$ . Die obige Abschätzung zeigt, dass  $\alpha$  groß genug gewählt werden kann, dass  $L(v) \geq 0$  in  $A$  gilt. Wegen  $u < u(\mathbf{x}_0)$  auf  $\partial K_\varrho(\mathbf{y})$  können wir  $\varepsilon > 0$  so wählen, dass  $u - u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon v \leq 0$  auf  $\partial K_\varrho(\mathbf{y})$  gilt. Diese Ungleichung gilt auch auf  $\partial K_R(\mathbf{y})$ , weil  $v$  dort verschwindet. Damit haben wir  $L(u - u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon v) \geq cu(\mathbf{x}_0) \geq 0$  in  $A$ , und  $u - u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon v \leq 0$  auf  $\partial A$ . Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt  $u - u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon v \leq 0$  in  $A$ . Für die Normalableitung gilt daher

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{x}_0) = 2\varepsilon \alpha R e^{-\alpha R^2} > 0. \quad (4.54)$$

QED

Wir sind nun in der Lage, das starke Maximumprinzip nach Hopf (1927) zu beweisen.

**Satz 4.10** *Sei  $c = 0$  und  $L(u) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) in  $\Omega$ . Nimmt  $u$  seinen maximalen (minimalen) Wert in  $\Omega$  an, dann ist es konstant. Für  $c \geq 0$  gilt die Aussage nur für ein nichtnegatives Maximum (nichtpositives Minimum).*

**Beweis:** Angenommen,  $u$  wäre nicht konstant und nähme sein Maximum  $M$  in  $\Omega$  an. Dann enthält der Rand der Menge  $\Omega_- = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) < M\}$  Punkte in  $\Omega$ . Sei  $\mathbf{x}_0$  ein Punkt in  $\Omega_-$ , der näher bei  $\partial\Omega_-$  als bei  $\partial\Omega$  liegt. Sei  $K \subset \Omega_-$  die größte Kugel mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}_0$ . Dann gibt es einen Punkt  $\mathbf{y} \in \partial K$  mit  $u(\mathbf{y}) = M$ , während  $u < M$  in  $K$  gilt. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt  $\nabla u(\mathbf{y}) \neq 0$ , was unmöglich für das Maximum  $\mathbf{y}$  ist. QED

### 4.2.3 Anwendungen

Wir betrachten das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} L(u) &= f(\mathbf{x}) && \text{in } \Omega, \\ u &= u_D && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Mit Hilfe des Maximumprinzips können wir sogenannte *a-priori-Abschätzungen* angeben. Das bedeutet, dass wir nicht die Existenz von Lösungen beweisen, aber für eventuell existierende Lösungen stetige Abhängigkeit von den Daten  $f$  und  $u_D$ . Daraus wird dann auch die Eindeutigkeit der Lösung folgen.

**Satz 4.11** *Sei  $c \geq 0$  in dem beschränkten Gebiet  $\Omega$  und  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  sei eine Lösung von (4.55). Dann gibt es eine positive Konstante  $C$ , sodass*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u_D| + C \sup_{\Omega} |f|. \quad (4.56)$$

**Beweis:** Wegen der Beschränktheit von  $\Omega$  können wir annehmen, dass  $\Omega$  in einem durch  $0 < x_1 < d$  bestimmten Parallelstreifen liegt. Wir betrachten die Funktion

$$v = \sup_{\partial\Omega} |u_D| + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} |f| \geq 0$$

mit einer positiven, noch zu bestimmenden Konstanten  $\alpha$ . Es gilt

$$\begin{aligned} L(v) &= -(\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1) e^{\alpha x_1} \sup_{\Omega} |f| - cv \\ &\leq -\alpha(\alpha\lambda - b_0) \sup_{\Omega} |f| \leq -\sup_{\Omega} |f| \end{aligned} \quad (4.57)$$

für  $\alpha$  groß genug, wobei  $b_0 = \sup_{\Omega} |b_1|$  gesetzt wurde. Daraus folgt

$$L(u - v) \geq f + \sup_{\Omega} |f| \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.58)$$

und  $u - v \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ . Das schwache Maximumprinzip impliziert  $u \leq v$  in  $\Omega$ . Analog zeigt man  $u \geq -v$  in  $\Omega$  und damit (4.56) mit  $C = e^{\alpha d} - 1$ . QED

Eine Anwendung dieses Satzes auf die Differenz zweier Lösungen desselben Dirichletproblems liefert das folgende Eindeutigkeitsresultat:

**Satz 4.12** *Sei  $c \geq 0$  in dem beschränkten Gebiet  $\Omega$  und für  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  gelte  $L(u) = L(v)$  in  $\Omega$  und  $u = v$  auf  $\partial\Omega$ . Dann folgt  $u = v$  in  $\Omega$ .*

### 4.3 Schwache Lösungen des Dirichletproblems

Im Folgenden werden wir unsere Forderungen an eine Lösung des Dirichletproblems abschwächen. Das wird uns erlauben, Existenz von Lösungen für eine größere Gruppe von Problemen zu zeigen.

#### 4.3.1 Ein Beispiel

Betrachten wir das Dirichletproblem

$$\begin{aligned}\Delta u - u + f &= 0 && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer Funktion  $v$ , die wie  $u$  auf dem Rand verschwindet, und integrieren über  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} (\Delta u - u + f) v \, d\mathbf{x} = 0\tag{4.60}$$

Partielle Integration ergibt die folgende alternative Formulierung des Problems: Gesucht ist ein  $u$  mit  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \text{ mit } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.\tag{4.61}$$

Diese Formulierung legt den Versuch nahe, den Rieszischen Darstellungssatz anzuwenden. Wir definieren

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, d\mathbf{x}\tag{4.62}$$

$$F(v) := \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}\tag{4.63}$$

Der entscheidende Punkt ist die Frage: Wie wählen wir den Hilbertraum  $\mathcal{H}$ ? Es ist überraschend, dass in der Formulierung des Problems keine zweiten Ableitungen auftreten. Wir werden also in  $\mathcal{H}$  auch Funktionen zulassen, die nur Ableitungen erster Ordnung besitzen. Weiters wollen wir die Randbedingungen in dem Raum berücksichtigen. Als Versuch wählen wir  $\mathcal{H} = C_0^1(\Omega)$ . Nun haben wir verschiedene Dinge zu zeigen:

1.  $\mathcal{H}$  ist ein Vektorraum. Das ist leicht zu sehen.

2.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist ein inneres Produkt auf  $\mathcal{H}$  (auch leicht).
3.  $F$  ist ein lineares stetiges Funktional: Linearität ist klar. Für Stetigkeit ist zu zeigen, dass es eine positive Konstante  $c$  gibt, sodass

$$|F(v)| \leq c \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (4.64)$$

Wir verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das innere Produkt in  $L^2(\Omega)$ :

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{H}} \quad (4.65)$$

Damit haben wir gezeigt:

$$F \in \mathcal{H}' \quad \text{und} \quad \|F\|_{\mathcal{H}'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.66)$$

4.  $\mathcal{H}$  ist vollständig. Diese Aussage stimmt leider nicht. Wir konnten nur zeigen, dass  $\mathcal{H}$  ein Prähilbertraum ist. Das soll uns jedoch nicht abhalten, den eingeschlagenen Weg fortzusetzen. Wir erzeugen einen Hilbertraum durch Vervollständigung von  $C_0^1(\Omega)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . Da offensichtlich jede Folge in  $C_0^1(\Omega)$ , die bezüglich  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  eine Cauchyfolge ist, in  $L^2(\Omega)$  konvergiert, kann der vervollständigte Raum als Teilraum von  $L^2(\Omega)$  interpretiert werden. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt, dass das Problem in diesem Raum eine eindeutige Lösung hat, für die gilt

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) \, d\mathbf{x}} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.67)$$

### 4.3.2 Sobolevräume

Mit der folgenden Definition wird der Begriff des *Sobolevraumes* eingeführt. In diesem Abschnitt sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet.

**Definition 4.1** *Auf dem Vektorraum  $C^\infty(\overline{\Omega})$  definieren wir das innere Produkt*

$$\langle u, v \rangle_m := \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} \int_{\Omega} \nabla^{\mathbf{k}} u \, \nabla^{\mathbf{k}} v \, d\mathbf{x}. \quad (4.68)$$

Die induzierte Norm bezeichnen wir mit

$$\|u\|_m := \sqrt{\langle u, u \rangle_m}. \quad (4.69)$$

Die Vervollständigung von  $C^\infty(\bar{\Omega})$  bezüglich  $\|\cdot\|_m$  ist der Sobolevraum  $H^m(\Omega)$ . Den Abschluss von  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $H^m(\Omega)$  bezeichnen wir mit  $H_0^m(\Omega)$ .

**Bemerkung:** Für das Beispiel im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass für jedes  $f \in L^2(\Omega)$  eine eindeutige Lösung in  $H_0^1(\Omega)$  existiert. Offensichtlich kann jedes Element von  $H^m(\Omega)$  mit einem Element von  $L^2(\Omega)$  identifiziert werden.

Wir werden einige Resultate aus der Theorie der Sobolevräume benötigen. Die Beweise würden den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Man findet sie zum Beispiel in *R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975*. Für diese Resultate ist es notwendig, ein gewisses Maß an Glattheit des Randes  $\partial\Omega$  zu fordern. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass  $\partial\Omega$  Lipschitzstetig ist. Unter dieser Annahme kann der Vektorraum  $H^m(\Omega)$  auch auf andere Art eingeführt werden: Er besteht aus allen Elementen von  $L^2(\Omega)$ , deren distributionelle Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  auch in  $L^2(\Omega)$  sind. Es ist leicht zu sehen, dass durch diese Definition ein Raum bestimmt wird, in dem  $H^m(\Omega)$  enthalten ist. Die wesentliche Aussage besteht nun darin, dass  $C^\infty(\bar{\Omega})$  für Lipschitzstetigen Rand auch in dem größeren Raum dicht ist. Es gibt Beispiele, die zeigen, dass diese Aussage ohne Glattheitsforderung an  $\partial\Omega$  nicht gilt.

Die nächste Aussage bezieht sich auf die Räume  $H_0^m(\Omega)$ . Man kann zeigen, dass unter den Elementen von  $C^m(\bar{\Omega})$  genau die in  $H_0^m(\Omega)$  liegen, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung  $m - 1$  auf  $\partial\Omega$  verschwinden. Man sagt daher,  $H_0^m(\Omega)$  ist die Menge der Elemente von  $H^m(\Omega)$ , die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung  $m - 1$  auf  $\partial\Omega$  im *schwachen Sinn verschwinden*. Insbesondere gilt  $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Wir werden eine sogenannte Poincaré-Abschätzung benötigen. Als Beispiel dafür betrachten wir eine Funktion  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Wegen der Beschränktheit von  $\Omega$  können wir annehmen, dass  $\Omega$  in dem durch  $0 < x_1 < d$  bestimmten Parallelstreifen liegt. Denken wir uns  $u$  außerhalb von  $\Omega$  durch 0 fortgesetzt, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi, \quad (4.70)$$

und daher

$$\sup_{\Omega} |u| \leq d \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \leq d \sup_{\Omega} |\nabla u|. \quad (4.71)$$

Funktionen, die auf dem Rand verschwinden, können mit Hilfe ihrer Ableitung abgeschätzt werden.

**Lemma 4.4** *Für jedes beschränkte Gebiet  $\Omega$  gibt es eine positive Konstante  $C$ , sodass  $\|u\|_0 \leq C \|\nabla u\|_0$  für alle  $u \in H_0^1(\Omega)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen das Resultat zuerst für Funktionen in  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Quadrieren wir (4.70) und verwenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, so folgt

$$u^2 \leq \left( \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| d\xi \right)^2 \leq d \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 d\xi. \quad (4.72)$$

Integration dieser Ungleichung über  $\Omega$  gibt

$$\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} \leq d^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 d\mathbf{x} \leq d^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.73)$$

Das Resultat gilt daher mit  $C = d$  für  $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Da  $\mathcal{D}(\Omega)$  dicht in  $H_0^1(\Omega)$  liegt, kann jedes  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  durch eine Folge  $\{u_n\}$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  approximiert werden. Das gewünschte Resultat erhält man, indem man in der obigen Ungleichung für  $u_n$  den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durchführt. QED

Der folgende Satz, der ein Spezialfall des *Sobolevschen Einbettungssatzes* ist, stellt eine Beziehung zwischen Sobolevräumen und Räumen von stetig differenzierbaren Funktionen her.

**Satz 4.13** *Sei  $\partial\Omega$  Lipschitzstetig, und es gelte*

$$k - \frac{n}{2} > m \geq 0. \quad (4.74)$$

*Dann gilt*

$$H^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega}), \quad (4.75)$$

*und es gibt eine Konstante  $C > 0$ , sodass*

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_k \quad \forall u \in H^k(\Omega). \quad (4.76)$$



**Beweis:** (nur für  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $m = 0$ )

Der Raum  $H^k(\mathbb{R}^n)$  wird durch Vervollständigung von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  erzeugt. Deswegen genügt es, die Normungleichung für Testfunktionen zu beweisen. Mit  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und der Fouriertransformierten  $u^\wedge$  gilt

$$\|u\|_k^2 = (2\pi)^{-n} \sum_{|\mathbf{l}| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{l}})^2 |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})|^2 d\boldsymbol{\mu}.$$

Nun verwenden wir den Multinomialsatz (siehe Beispiel 1.4) in der Abschätzung

$$1 + |\boldsymbol{\mu}|^{2k} = 1 + \sum_{|\mathbf{l}|=k} \binom{k}{\mathbf{l}} (\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{l}})^2 \leq k! \sum_{|\mathbf{l}| \leq k} (\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{l}})^2,$$

aus der die Existenz einer Konstanten  $c_k > 0$  folgt, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\boldsymbol{\mu}|^{2k}) |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})|^2 d\boldsymbol{\mu} \leq c_k \|u\|_k^2. \quad (4.77)$$

Mit Hilfe der Inversionsformel für die Fouriertransformation und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung können wir jetzt eine Abschätzung für  $u$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  finden:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |u(\mathbf{x})| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| d\boldsymbol{\mu} \leq c \|u\|_k \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{1 + |\boldsymbol{\mu}|^{2k}} \right)^{1/2}.$$

Man rechnet leicht nach, dass das letzte Integral genau dann konvergiert, wenn  $k - n/2 > 0$ , wie hier angenommen. Nun zur Stetigkeit:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| \left| e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} - e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{y}} \right| d\boldsymbol{\mu} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| \left| e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - 1 \right| d\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor im Integral verwenden wir

$$\left| e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - 1 \right|^2 = 2(1 - \cos(\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \leq \begin{cases} R^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 & \text{für } |\boldsymbol{\mu}| < R, \\ 4 & \text{für } |\boldsymbol{\mu}| > R, \end{cases}$$

für beliebig gewähltes  $R > 0$ . Für die erste Abschätzung verwendet man das quadratische Taylorpolynom des Cosinus und die Tatsache, dass die Taylorreihe alternierend ist. Damit ergibt sich

$$\int_{|\boldsymbol{\mu}| < R} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| \left| e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - 1 \right| d\boldsymbol{\mu} \leq R |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \int_{\mathbb{R}^n} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| d\boldsymbol{\mu} \leq R |\mathbf{x} - \mathbf{y}| c \|u\|_k$$

analog zur Abschätzung der  $L^\infty$ -Norm. Auch für den zweiten Teil gehen wir ähnlich vor:

$$\int_{|\boldsymbol{\mu}|>R} |u^\wedge(\boldsymbol{\mu})| \left| e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - 1 \right| d\boldsymbol{\mu} \leq c \|u\|_k \left( \int_{|\boldsymbol{\mu}|>R} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{|\boldsymbol{\mu}|^{2k}} \right)^{1/2} = c \|u\|_k R^{n/2-k}$$

Zusammenfassend folgt

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq c \|u\|_k \left( R|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + R^{n/2-k} \right),$$

für alle  $R > 0$ . Die optimale Wahl  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1/(k-n/2+1)}$  vervollständigt den Beweis:

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq c \|u\|_k |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{\frac{k-n/2}{k-n/2+1}}.$$

QED

**Bemerkung:** 1) Strenggenommen bedeutet die Mengeninklusion, dass jedes Element von  $H^k(\Omega)$  als Distribution interpretiert durch eine Funktion in  $C^m(\overline{\Omega})$  repräsentiert werden kann. Auch die Abschätzung der  $C^m$ -Norm gilt für diesen Repräsentanten. Man sagt,  $H^k(\Omega)$  ist in  $C^m(\overline{\Omega})$  stetig eingebettet, weil die soeben beschriebene Abbildung von  $H^k(\Omega)$  nach  $C^m(\overline{\Omega})$  stetig ist.

2) Im Fall  $\Omega = \mathbb{R}^n$  haben wir sogar gezeigt, dass Funktionen in  $H^k(\mathbb{R}^n)$  mit  $k > n/2$  hölderstetig sind mit Exponent  $\frac{k-n/2}{k-n/2+1}$ . Das stimmt auch für beschränkte Gebiete. Der Beweis ist allerdings viel aufwendiger.

### Beispiel 4.3

Die Funktion von zwei Veränderlichen

$$u(x, y) = \ln \left( \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (4.78)$$

ist Element von  $H^1(K_{1/2})$  und am Ursprung unbeschränkt. Das zeigt, dass in der Forderung  $k - n/2 > m$  des Satzes  $>$  nicht durch  $\geq$  ersetzt werden kann.

Der nächste Satz ist ein Resultat über *kompakte Einbettungen*. Ein Beispiel dafür folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli: Jede beschränkte Menge in  $C^{m+1}(\overline{\Omega})$  ist präkompakt in  $C^m(\overline{\Omega})$ .

**Satz 4.14** Sei  $m > k \geq 0$ . Dann sind beschränkte Mengen in  $H^m(\Omega)$  präkompakt in  $H^k(\Omega)$ .

### 4.3.3 Bilinearformen. Das Lax-Milgram Lemma

Um Lösbarkeit des Dirichletproblems für allgemeine elliptische Gleichungen zu zeigen, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Rieszischen Darstellungssatzes.

Eine bilineare Abbildung  $a : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetige Bilinearform* auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , wenn  $K > 0$  existiert, sodass

$$|a(u, v)| \leq K \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}.$$

Eine stetige Bilinearform heißt *koerziv*, wenn  $\kappa > 0$  existiert, sodass

$$a(u, u) \geq \kappa \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{H}. \quad (4.79)$$

**Lemma 4.5 (Lax-Milgram)** *Sei  $a(u, v)$  eine koerzive, stetige Bilinearform auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , und sei  $F \in \mathcal{H}'$ . Dann gibt es genau ein  $u \in \mathcal{H}$ , sodass*

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (4.80)$$

und es gilt  $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}'}$ .

**Beweis:** Aus dem Rieszischen Darstellungssatz und der Bilinearität von  $a$  folgt, dass es eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  gibt mit

$$a(u, v) = \langle T(u), v \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{H}. \quad (4.81)$$

Wegen der Stetigkeit von  $a$  gilt

$$\|T(u)\|_{\mathcal{H}} \leq K \|u\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.82)$$

Die Abbildung  $T$  ist stetig. Weiters schätzen wir mit Hilfe der Koerzivität ab:

$$\kappa \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a(u, u) = \langle T(u), u \rangle \leq \|T(u)\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.83)$$

woraus

$$\kappa \|u\|_{\mathcal{H}} \leq \|T(u)\|_{\mathcal{H}} \quad (4.84)$$

folgt. Diese Abschätzung impliziert, dass  $T$  injektiv und die inverse Abbildung beschränkt ist:  $\|T^{-1}(u)\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa^{-1} \|u\|_{\mathcal{H}}$ .

Um zu zeigen, dass  $T$  surjektiv ist, beweisen wir zunächst, dass  $T(\mathcal{H})$  abgeschlossen ist. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = v$ . Dann folgt aus (4.84), dass  $\{u_n\}$

eine Cauchyfolge ist. Wir bezeichnen ihren Grenzwert mit  $u_0$ . Wegen der Stetigkeit von  $T$  konvergiert aber  $T(u_n)$  gegen  $T(u_0)$ , was  $T(u_0) = v$  und damit die Abgeschlossenheit von  $T(\mathcal{H})$  impliziert.

Nehmen wir nun an, es gelte  $T(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$ . Dann gibt es wegen der Abgeschlossenheit von  $T(\mathcal{H})$  ein nichttriviales Element  $z$  von  $T(\mathcal{H})^\perp$ , d.h.  $\langle T(u), z \rangle = 0$  für alle  $u \in \mathcal{H}$ . Setzen wir in dieser Gleichung  $u = z$ , dann folgt aus der Koerzivität von  $a$

$$0 = \langle T(z), z \rangle = a(z, z) \geq \kappa \|z\|^2, \quad (4.85)$$

und damit der Widerspruch  $z = 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $T^{-1}$  ein stetiger linearer Operator auf  $\mathcal{H}$  ist.

Sei  $g$  das aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes eindeutig bestimmte Element von  $\mathcal{H}$ , für das  $F(v) = \langle g, v \rangle$  für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt. Dann ist  $u = T^{-1}(g)$  die gesuchte Lösung. Die Abschätzung

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa^{-1} \|g\|_{\mathcal{H}} = \kappa^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}'} \quad (4.86)$$

vervollständigt den Beweis. QED

#### 4.3.4 Existenz schwacher Lösungen

Wir betrachten Dirichletprobleme für elliptische Differentialgleichungen mit dem Hauptteil in *Divergenzform*:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A(\mathbf{x})\nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u - c(\mathbf{x})u + f(\mathbf{x}) &= 0 && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= u_D && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Die Koeffizienten seien integrierbar und beschränkt in  $\Omega$ . Insbesondere gelte  $|\mathbf{b}(\mathbf{x})| \leq b_0$  und  $c(\mathbf{x}) \geq c_0$ . Die Differentialgleichung sei gleichmäßig elliptisch in  $\Omega$ , d.h. es gelte (4.38). Wir gehen vor wie im letzten Abschnitt. Die Differentialgleichung wird mit einer Funktion  $v$  multipliziert, die auf  $\partial\Omega$  verschwindet, und über  $\Omega$  integriert. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega} (\nabla v^T A \nabla u - v \mathbf{b} \cdot \nabla u + cuv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (4.88)$$

Für die Dirichletdaten nehmen wir an, dass sie eine Fortsetzung  $u_D$  auf das Innere von  $\Omega$  zulassen, die in  $H^1(\Omega)$  ist. Die Beantwortung der Frage, wann das möglich ist, würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen.

Definieren wir nun die Bilinearform  $a$  und das Funktional  $F$  durch

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v^T A \nabla u - v \mathbf{b} \cdot \nabla u + cuv) \, d\mathbf{x}, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad (4.89)$$

dann lautet die *schwache Formulierung des Dirichletproblems*: Gesucht ist ein  $u \in H^1(\Omega)$  (*schwache Lösung*), sodass  $a(u, v) = F(v)$  für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  und  $u - u_D \in H_0^1(\Omega)$  gilt.

Das folgende Resultat ist eine Anwendung des Lax-Milgram-Lemmas.

**Satz 4.15** *Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und es gelte  $\mathbf{b} = 0$ ,  $c \geq 0$  oder  $4\lambda c_0 > b_0^2$ . Dann besitzt das Dirichletproblem eine eindeutige schwache Lösung  $u \in H^1(\Omega)$ , und es gibt eine Konstante  $C > 0$ , sodass*

$$\|u\|_1 \leq C(\|u_D\|_1 + \|f\|_0). \quad (4.90)$$

**Beweis:** Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigt man leicht die Stetigkeit von  $a$ . Diese folgt aus der Beschränktheit der Koeffizienten des Differentialoperators: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} |\nabla v^T A \nabla u| &\leq C_1 |\nabla u| |\nabla v|, \\ |v \mathbf{b} \cdot \nabla u| &\leq C_2 |\nabla u| |v|, \\ |cuv| &\leq C_3 |u| |v|, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq C_1 \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 + C_2 \|\nabla u\|_0 \|v\|_0 + C_3 \|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq K \|u\|_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$

mit  $K = C_1 + C_2 + C_3$ .

Nun substituieren wir  $w = u - u_D$  und setzen  $G(v) = F(v) - a(u_D, v)$ . Dann folgt die Stetigkeit von  $G$  aus der Stetigkeit von  $a$ , d.h.  $G \in (H_0^1(\Omega))'$ . Wir haben das Problem zurückgeführt auf den Fall homogener Randbedingungen und suchen  $w \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(w, v) = G(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Um das Lax-Milgram-Lemma anwenden zu können, haben wir die Koerzivität von  $a$  zu zeigen. Aus den Beschränktheitsannahmen für die Koeffizienten folgt

$$a(u, u) \geq \int_{\Omega} (\lambda |\nabla u|^2 - b_0 |u| |\nabla u| + c_0 u^2) \, d\mathbf{x}. \quad (4.91)$$

Für die weitere Abschätzung verwenden wir die Ungleichung

$$|u| |\nabla u| \leq \frac{\delta}{2} u^2 + \frac{1}{2\delta} |\nabla u|^2, \quad (4.92)$$

die für beliebige  $\delta > 0$  gültig ist. Es folgt

$$a(u, u) \geq \int_{\Omega} \left[ \left( \lambda - \frac{b_0}{2\delta} \right) |\nabla u|^2 + \left( c_0 - \frac{\delta b_0}{2} \right) u^2 \right] d\mathbf{x}. \quad (4.93)$$

Für  $\mathbf{b} = 0$ ,  $c \geq 0$  kann man  $b_0 = c_0 = 0$  setzen. Im anderen Fall  $4\lambda c_0 > b_0^2$  wählen wir  $\delta = 2c_0/b_0$ . In beiden Fällen folgt offensichtlich

$$a(u, u) \geq C_4 \|\nabla u\|_0^2 \quad (4.94)$$

mit einer positiven Konstanten  $C_4$ . Nun verwenden wir die Poincaré-Abschätzung für Funktionen in  $H_0^1(\Omega)$ :

$$\|\nabla u\|_0^2 \geq \frac{1}{2} \left( \|\nabla u\|_0^2 + \frac{1}{C^2} \|u\|_0^2 \right) \geq \frac{1}{2} \min \left( 1, \frac{1}{C^2} \right) \|u\|_1^2 \quad (4.95)$$

Kombination der letzten beiden Abschätzungen zeigt die Koerzivität von  $a$  mit einer positiven Koerzivitätskonstanten  $\kappa$ . Damit kann das Lax-Milgram-Lemma auf das Problem für  $w$  angewendet werden. Es folgt die eindeutige Lösbarkeit und die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &\leq \|u_D\|_1 + \|w\|_1 \leq \|u_D\|_1 + \frac{1}{\kappa} \|G\|_{H_0^1(\Omega)'} \\ &\leq \|u_D\|_1 + \frac{1}{\kappa} \|F\|_{H_0^1(\Omega)'} + \frac{K}{\kappa} \|u_D\|_1 \leq \left( 1 + \frac{K}{\kappa} \right) \|u_D\|_1 + \frac{1}{\kappa} \|f\|_0. \end{aligned}$$

QED

### 4.3.5 Regularität

In diesem Abschnitt werden hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen Lösungen des Dirichletproblems glatter sind, als es aus dem Lax-Milgram-Lemma folgt. Die Beweise der angeführten Resultate würden den Rahmen dieser Vorlesung sprengen und werden daher weggelassen. Man findet sie z.B. in *D. Gilbarg und N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, 1977*. Der erste Satz ist eine Aussage über die Existenz von schwachen Ableitungen im Inneren des Gebietes  $\Omega$ .

**Satz 4.16** *Zusätzlich zu den Annahmen des vorhergehenden Satzes sei  $A \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ ,  $\mathbf{b}, c \in C^k(\overline{\Omega})$  und  $f \in H^k(\Omega)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Weiters sei  $\Omega'$  ein Teilgebiet von  $\Omega$  mit  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ . Dann gilt für die schwache Lösung  $u$  des Dirichletproblems  $u \in H^{k+2}(\Omega')$  und*

$$\|u\|'_{k+2} \leq C(\|u_D\|_1 + \|f\|_k), \quad (4.96)$$

wobei  $\|u\|'_{k+2}$  die Norm in  $H^{k+2}(\Omega')$  ist.

Für genügend glatte Koeffizienten hat das Lösen einer elliptischen Gleichung regularisierende Wirkung. Die Lösung ist um zwei Differenzierbarkeitsordnungen glatter als die Inhomogenität. Bemerkenswert ist, dass die Glattheit des Randes bzw. der Randdaten keinen Einfluss auf die Glattheit der Lösung im Inneren hat. Man beachte den Unterschied zu hyperbolischen Gleichungen (Beispiel 1.4).

Unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Glattheit des Randes  $\partial\Omega$  und der Dirichletdaten lässt sich die Aussage über die Glattheit der Lösung bis zum Rand fortsetzen.

**Satz 4.17** *Zusätzlich zu den Annahmen des vorigen Satzes sei  $u_D \in H^{k+2}(\Omega)$  und  $\partial\Omega$  eine  $C^{k+2}$ -Mannigfaltigkeit. Dann gilt  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  und*

$$\|u\|_{k+2} \leq C(\|u_D\|_{k+2} + \|f\|_k). \quad (4.97)$$

#### Beispiel 4.4

- Eine Kombination des Resultates über Ableitungen im Inneren mit dem Sobolevschen Einbettungssatz zeigt, dass Lösungen der Laplacegleichung an jedem inneren Punkt beliebig oft differenzierbar sind.
- Wir betrachten das Dirichletproblem für die Laplacegleichung im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$ . Ist der Rand  $C^2$  und sind die Dirichletdaten in  $H^2(\Omega)$ , dann folgt aus den obigen Resultaten, dass die schwache Lösung ebenfalls in  $H^2(\Omega)$  ist. Aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes ist sie daher in  $C(\overline{\Omega})$  und damit eine Lösung des klassischen Dirichletproblems.

#### 4.3.6 Ein Variationsprinzip. Finite Elemente

Wir betrachten das Dirichletproblem (4.87) für den Fall  $\mathbf{b} = 0$ ,  $c \geq 0$ . Offensichtlich ist dann die Bilinearform  $a$  stetig, koerziv und *symmetrisch*,

d.h. es gilt  $a(u, v) = a(v, u)$ . Das bedeutet, dass  $a(u, v)$  ein inneres Produkt in  $H_0^1(\Omega)$  ist, das die zur  $H_0^1(\Omega)$ -Norm äquivalente Norm  $\|\cdot\|_a = \sqrt{a(u, u)}$  induziert. Im Folgenden wird für diesen Fall ein alternativer Zugang zur Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Dirichletproblems präsentiert.

Wir betrachten das durch

$$E(v) = a(v, v) - 2F(v) \quad (4.98)$$

definierte Funktional auf  $H_0^1(\Omega)$ . Dieses hat zwei wichtige Eigenschaften. Erstens ist es nach unten beschränkt:

$$E(v) \geq \kappa \|v\|_1^2 - 2C \|v\|_1 = \kappa \left( \|v\|_1 - \frac{C}{\kappa} \right)^2 - \frac{C^2}{\kappa} \geq -\frac{C^2}{\kappa} \quad (4.99)$$

Zweitens ist es *streng konvex*: Für  $v_1 \neq v_2$  und  $0 < t < 1$  gilt

$$E((1-t)v_1 + tv_2) < (1-t)E(v_1) + tE(v_2), \quad (4.100)$$

was aus der leicht zu überprüfenden Gleichung

$$E((1-t)v_1 + tv_2) = (1-t)E(v_1) + tE(v_2) - t(1-t)a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \quad (4.101)$$

folgt.

**Satz 4.18** *Es gelten die obigen Annahmen und  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gibt es genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit*

$$E(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v). \quad (4.102)$$

**Beweis:** Da  $E(v)$  nach unten beschränkt ist, existiert  $\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) = E_0$ . Sei  $\{u_n\}$  eine Folge in  $H_0^1(\Omega)$ , für die  $E(u_n)$  gegen  $E_0$  konvergiert. Aus der Konvexität von  $E$  folgt, dass für  $m, n$  groß genug mit  $E(u_m)$  und  $E(u_n)$  auch  $E((u_m + u_n)/2)$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung von  $E_0$  liegt. Die Gleichung (4.101) mit  $t = 1/2$  impliziert

$$a(u_m - u_n, u_m - u_n) = 2(E(u_m) + E(u_n)) - 4E\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right), \quad (4.103)$$

woraus mit Hilfe der obigen Überlegungen und der Koerzivität von  $a$  folgt, dass  $\{u_n\}$  eine Cauchyfolge und daher konvergent ist. Da  $E$  offensichtlich



stetig ist, erfüllt der Grenzwert  $u$  die Gleichung  $E(u) = E_0$ . Die Existenz des Minimums ist damit gezeigt.

Nehmen wir nun an, es existieren  $u_1 \neq u_2$  mit  $E(u_1) = E(u_2) = E_0$ . Dann folgt aus der strengen Konvexität von  $E$  der Widerspruch

$$E\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{E(u_1) + E(u_2)}{2} = E_0. \quad (4.104)$$

QED

Wie berechnet man nun das Minimum? Dazu betrachten wir für beliebiges  $v \in H_0^1(\Omega)$  die reelle Funktion

$$e(t) = E(u + vt) = E(u) + 2t(a(u, v) - F(v)) + t^2 a(v, v). \quad (4.105)$$

Offensichtlich ist die notwendige Bedingung  $e'(0) = 0$  für ein Minimum an  $u$  gerade die schwache Formulierung des Dirichletproblems mit homogenen Randdaten:

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.106)$$

Die Gleichung (4.105) zeigt, dass damit wirklich ein Minimum berechnet wird. Der obige Satz kann daher auch als Existenz- und Eindeigkeitsresultat für das Dirichletproblem interpretiert werden. Er kann auch verwendet werden, um den Rieszischen Darstellungssatz zu beweisen.

Den Ausdruck  $2(a(u, v) - F(v))$  nennt man die *Variation* des Funktionals  $E$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $v$ . Das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Bestimmung von stationären Punkten von auf Funktionenräumen definierten Funktionalen beschäftigt, heißt *Variationsrechnung*. In diesem Zusammenhang heißt die Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (A \nabla u) - cu + f = 0 \quad (4.107)$$

die *Euler-Lagrange-Gleichung* des Funktionals  $E$ .

Das Variationsprinzip motiviert die Konstruktion von numerischen Verfahren, deren Analyse in Standardsituationen relativ einfach ist. Sei  $M$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H_0^1(\Omega)$ . Dann besteht die *Raleigh-Ritz-Methode* darin, eine Approximation  $m \in M$  für  $u$  durch Lösung des Problems  $E(m) = \min_{v \in M} E(v)$  bzw.

$$a(m, v) = F(v) \quad \forall v \in M \quad (4.108)$$

zu bestimmen. Auch für dieses Problem impliziert der obige Satz eindeutige Lösbarkeit. Durch Bildung der Differenz der Gleichungen (4.106) und (4.108) folgt

$$a(u - m, v) = 0 \quad \forall v \in M. \quad (4.109)$$

Der Fehler  $u - m$  bei der Raleigh-Ritz-Methode steht also orthogonal auf  $M$  bezüglich des durch  $a$  definierten inneren Produktes. Damit können wir  $u$  schreiben als

$$u = m + m^\perp \quad m \in M, m^\perp \in M^\perp, \quad (4.110)$$

und  $m$  ist die *orthogonale Projektion* von  $u$  auf  $M$  (bezüglich des inneren Produktes  $a$ ). Für beliebiges  $v \in M$  gilt

$$\begin{aligned} a(u - v, u - v) &= a(m + m^\perp - v, m + m^\perp - v) & (4.111) \\ &= a(m - v, m - v) + a(m^\perp, m^\perp) \geq a(m^\perp, m^\perp). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Raleigh-Ritz-Approximation die bestmögliche Approximation in  $M$  ist:

$$\|u - m\|_a = \min_{v \in M} \|u - v\|_a \quad (4.112)$$

Um die Raleigh-Ritz-Methode in einem numerischen Verfahren zu verwenden, muss  $M$  endlichdimensional gewählt werden. Sei  $N = \dim(M)$  und  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  eine Basis von  $M$ . Dann kann  $m \in M$  in der Form

$$m = \sum_{j=1}^N m_j \varphi_j \quad (4.113)$$

dargestellt werden, und mit  $v = \varphi_i, i = 1, \dots, N$  erhalten wir für die  $m_j$  das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) m_j = F(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.114)$$

Aus der Koerzivität von  $a$  folgt, dass die Koeffizientenmatrix positiv definit ist. Für die Wahl des Unterraumes  $M$  und seiner Basis sind nun zwei Kriterien von besonderer Bedeutung:

1. Das Gleichungssystem für die  $m_j$  soll möglichst leicht zu lösen sein.
2. Informationen über die Näherungslösung  $m$  sollen möglichst leicht aus den  $m_j$  abzulesen sein.

Bezüglich (1) wäre eine Orthogonalbasis (bezüglich  $a$ ) die optimale Wahl. Die Koeffizientenmatrix ist in diesem Fall eine Diagonalmatrix (im Fall einer Orthonormalbasis sogar die Einheitsmatrix). Ein Beispiel für eine derartige Approximation sind die Partialsummen von Fourierreihen. Die Bestimmung von solchen Orthogonalbasen (z.B. mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren) ist im allgemeinen jedoch viel zu rechenintensiv, um praktisch zu sein. Der Hauptnachteil ist, dass für jedes Problem, d.h. für jede Bilinearform  $a$  eine neue Basis bestimmt werden müsste.

Das Verfahren der *Finiten Elemente* verwendet für  $M$  Räume von Funktionen, die auf Teilbereichen von  $\Omega$  mit Polynomen übereinstimmen. Als Beispiel im  $\mathbb{R}^2$  betrachten wir *stückweise lineare Elemente auf Dreiecken*. Das Gebiet  $\Omega$  wird also in Dreiecke zerlegt (unter der Annahme, dass der Rand  $\partial\Omega$  ein Polygon ist). Der Unterraum  $M$  wird dann von Funktionen gebildet, die auf  $\bar{\Omega}$  stetig und im Inneren der Dreiecke linear sind. Lässt man außerdem nur Funktionen zu, die auf  $\partial\Omega$  verschwinden, dann ist  $M$  wirklich ein Unterraum von  $H_0^1(\Omega)$  (was leicht zu zeigen ist). Eine Funktion in  $M$  ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte an den *Knoten*  $\mathbf{x}^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  im Inneren von  $\Omega$ , das sind die Eckpunkte der Dreiecke. Durch die Anzahl  $N$  der inneren Knoten ist die Dimension von  $M$  gegeben. Als Basisfunktion wählen wir Funktionen  $\varphi_i \in M$ , die gegeben sind durch

$$\varphi_i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.115)$$

Jede Funktion  $m \in M$  kann mit Hilfe der  $\varphi_i$  dargestellt werden, und es gilt

$$m(\mathbf{x}^i) = m_i, \quad (4.116)$$

d.h. die Koeffizienten sind die Funktionswerte an den Knoten. Die Forderung (2) ist also optimal erfüllt. Zum Punkt (1) ist zu sagen, dass der Koeffizient  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  nur dann ungleich Null ist, wenn  $\mathbf{x}^i$  und  $\mathbf{x}^j$  benachbarte Knoten sind. Daraus folgt, dass die Koeffizientenmatrix im allgemeinen *dünn besetzt* ist, was die Lösung des Gleichungssystems wesentlich erleichtert.

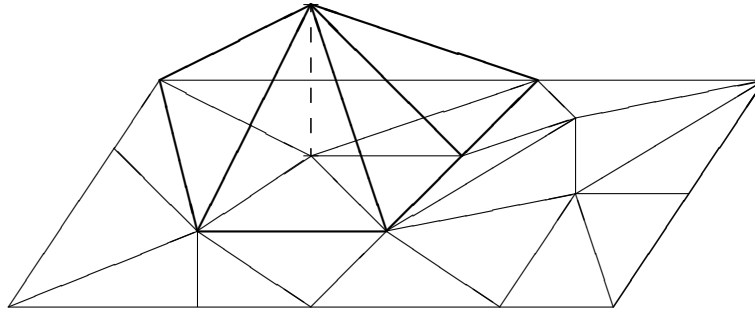


Figure 4.2: Finite Elemente Methode

Wie gut ist nun die ermittelte Näherungslösung? Wir haben schon gesehen, dass sich diese Frage auf die Frage “Wie gut können Funktionen in  $H_0^1(\Omega)$  durch Funktionen aus  $M$  approximiert werden?” reduziert.

Sei  $h$  die längste Dreiecksseite in der Zerlegung von  $\Omega$ . Wir betrachten Familien von Räumen  $\{M^h, h \rightarrow 0\}$ . Die entsprechenden Näherungslösungen nennen wir  $m^h$ . Wir bezeichnen das durch die Familie  $\{M^h\}$  bestimmte numerische Verfahren als *konvergent*, wenn gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} m^h = u, \quad (4.117)$$

wobei noch zu definieren wäre, in welchem Sinn der Grenzübergang gemeint ist. Tatsächlich kann man für unser Verfahren zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - m^h\|_1 = 0. \quad (4.118)$$

Im Beweis wird verwendet, dass jede Funktion in  $H_0^1(\Omega)$  beliebig gut durch Funktionen aus  $C_0^1(\Omega)$  approximiert werden kann. Funktionen aus  $C_0^1(\Omega)$  können durch Funktionen aus  $M^h$  approximiert werden, wenn  $h$  klein genug ist. Dieses Konvergenzresultat sagt jedoch nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit bzw. *Konvergenzordnung* aus. Resultate über die Konvergenzordnung erhält man nur, wenn die Lösung glatter ist, als es Funktionen in  $H_0^1(\Omega)$  üblicherweise sind. Ein typisches Beispiel für ein solches Resultat ist die Abschätzung

$$\|u - m^h\|_1 \leq Ch\|u\|_2, \quad (4.119)$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Man kann also zeigen, dass das Verfahren für Lösungen aus  $H^2(\Omega)$  die Konvergenzordnung 1 hat. Ein

gewisses Maß an Glattheit ist notwendig, damit das Dirichletproblem mit vertretbarem Aufwand numerisch gelöst werden kann. Beweise der beiden Konvergenzresultate findet man in *G. Strang und G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, 1973.*

## 4.4 Aufgaben

**Aufgabe 4.1** Sei  $g \in C(\mathbb{R})$  beschränkt. Man zeige, dass durch die Poissonsche Integralformel für die obere Halbebene eine klassische Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung in der oberen Halbebene gegeben ist.

**Aufgabe 4.2** Sei  $F : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar als Funktion des ersten und stetig als Funktion des zweiten Arguments. Weiters sei  $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x) \geq 0$  für alle  $(u, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ .

a) Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und des Maximumprinzips, dass das Problem

$$\Delta u = F(u, x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

maximal eine klassische Lösung haben kann.

b) Sei zusätzlich  $F(\varphi(x), x) = 0$  für alle  $x \in \Omega$ . Man zeige, dass für jede klassische Lösung die Abschätzung

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max \left\{ \sup_{\Omega} |\varphi|, \sup_{\partial\Omega} |u_D| \right\}$$

gilt.

**Aufgabe 4.3** Man berechne die schwache Lösung des Problems

$$(a(x)u')' - u = x \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1/2, \\ 4 & \text{für } x > 1/2. \end{cases}$$

**Aufgabe 4.4** Man löse das Problem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, d), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, d) = u_d(x),$$

mit Hilfe der Fouriertransformation, soweit wie möglich explizit.

**Aufgabe 4.5** a) Man ermittle die schwache Formulierung des Problems

$$u'' - u = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

b) Sei  $M_h$  ( $h = 1/N$ ) die Menge der Funktionen aus  $C([0, 1])$ , die auf den Intervallen  $\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , mit Polynomen ersten Grades übereinstimmen und an  $x = 0$  und  $x = 1$  verschwinden. Man bestimme eine Basis von  $M_h$  und das bei Anwendung der Methode der finiten Elemente auf das obige Problem zu lösende Gleichungssystem.

c) Was kann über die Konvergenz des numerischen Verfahrens ausgesagt werden?

d) In den ermittelten Gleichungen verwende man die Trapezregel, um die Integrale auszuwerten, in denen die Inhomogenität  $f$  auftritt.



## Chapter 5

# Parabolische Gleichungen

### 5.1 Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt wird die Fouriertransformation benützt, um das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  zu lösen. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{in } \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

und interessieren uns für Lösungen, die für jedes  $t$  durch ihre Fourier-Transformierte bezüglich  $\mathbf{x}$  dargestellt werden können. Auch für die Anfangsdaten setzen wir das voraus. Angenommen  $u$  hat eine Darstellung der Form

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u^\wedge(\boldsymbol{\mu}, t) e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\mu}$$

mit

$$u^\wedge(\boldsymbol{\mu}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial u^\wedge}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = -|\boldsymbol{\mu}|^2 \int_{\mathbb{R}^n} u e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Es löst also  $u^\wedge$  eine gewöhnliche Differentialgleichung. Als Anfangsbedingung erhält man

$$u^\wedge(\boldsymbol{\mu}, 0) = u_0^\wedge(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$



Damit ist die Lösung des Problems

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{\mu}|^2 t} \hat{u}_0(\boldsymbol{\mu}) e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\mu}.$$

Die Fourier-Transformierte von  $u$  ist also das Produkt zweier Funktionen, und wir können die Formel (1.19) verwenden. Wenn wir die Funktion  $e^{-|\boldsymbol{\mu}|^2 t}$  als Fourier-Transformierte einer Funktion  $w(\mathbf{x}, t)$  auffassen, ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch  $u = w * u_0$ . Die Funktion  $w$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{\mu}|^2 t} e^{i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\mu} = (2\pi\sqrt{2t})^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{\nu}|^2/2} e^{i\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}/\sqrt{2t}} d\boldsymbol{\nu} \\ &= (4\pi t)^{-n/2} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} ((2\pi)^{n/2} e^{-|\boldsymbol{\nu}|^2/2}) e^{i\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}/\sqrt{2t}} d\boldsymbol{\nu} \\ &= (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right). \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung haben wir (1.18) verwendet. Damit haben wir für  $u$  die Darstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}{4t}\right) u_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Für den Wärmeleitungsoperator  $\partial/\partial t - \Delta$  spielt diese Darstellung eine ähnliche Rolle wie die Poissonschen Integralformeln des vorigen Kapitels für den Laplaceoperator. Ähnlich wie dort zeigt man auch hier, dass für stetiges, beschränktes  $u_0$  die Formel eine in  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  beliebig oft differenzierbare, an  $t = 0$  stetige Lösung des Anfangswertproblems liefert.

## 5.2 Das Maximumprinzip für parabolische Operatoren

### 5.2.1 Wärmeleitung

Wenn wir das Problem der Wärmeleitung in einem quellenfreien endlichen Medium betrachten, dann führen physikalische Überlegungen zu der Aussage: Die Temperatur kann an keiner Stelle und zu keinem Zeitpunkt größer (kleiner) sein als die maximale (minimale) Temperatur auf dem Rand bzw.

zum Anfangszeitpunkt. Diese Aussage entspricht dem schwachen Maximumprinzip für den stationären (d.h. elliptischen) Fall. Um die dem starken Maximumprinzip entsprechende Aussage formulieren zu können, betrachten wir zunächst ein Gedankenexperiment: Man nehme eine konstante Anfangstemperatur an und Randwerte, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  ebenfalls gleich dieser Konstanten sind und dannach kleiner werden. Dann ist die Temperaturverteilung bis zum Zeitpunkt  $t_0$  auch konstant, und die Konstante ist gleichzeitig der maximale Wert, der angenommen wird. Wir werden beweisen, dass nach dem Zeitpunkt  $t_0$  diese maximale Temperatur im Inneren nicht mehr angenommen werden kann und dass die beschriebene Situation überhaupt die einzige ist, in der die maximale Temperatur nach dem Anfangszeitpunkt im Inneren angenommen wird.

### 5.2.2 Das Maximumprinzip

Wir betrachten lineare parabolische Operatoren der Form

$$L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{für } (\mathbf{x}, t) \in G = \Omega \times (0, T), \quad (5.1)$$

wobei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  ist. Der Ortsoperator  $L$  habe die Form

$$L(u) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(\mathbf{x}, t)u. \quad (5.2)$$

Die Koeffizienten seien beschränkt,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  gleichmäßig positiv definit ( $\mathbf{z}^T A \mathbf{z} \geq \lambda |\mathbf{z}|^2$ ) und  $c \geq 0$  in  $G$ .

Wir beweisen zunächst das *schwache Maximumprinzip*, obwohl es auch als Korollar des danach bewiesenen starken Maximumprinzips hergeleitet werden könnte.

**Satz 5.1** Für  $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  gelte  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  in  $G$ . Dann folgt

$$\sup_G u \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega \times \{0\}} u, \sup_{\partial \Omega \times (0, T)} u \right\}. \quad (5.3)$$

**Beweis:** Gelte zunächst die strengere Annahme  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$  in  $G$ . Angenommen, es gibt ein  $x_0 \in \Omega$  und ein  $t_0 \in (0, T]$ , sodass

$$u(x_0, t_0) = M := \sup_G u.$$

Ist  $M < 0$ , dann ist die Aussage des Satzes erfüllt. Sei daher  $M \geq 0$ . Offensichtlich gilt an der Stelle  $(x_0, t_0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \quad \nabla u = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} \text{ negativ semidefinit,}$$

woraus der Widerspruch  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$  an  $(x_0, t_0)$  folgt. Das Supremum kann also nur für  $t = 0$  oder  $x \in \partial\Omega$  angenommen werden.

Sein nun  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  in  $G$ . Die Funktion  $v(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$  mit  $\varepsilon > 0$  erfüllt dann  $L(v) - \frac{\partial v}{\partial t} > 0$  und nimmt daher ihr Maximum für  $t = 0$  oder für  $x \in \partial\Omega$  an, wenn es nichtnegativ ist, woraus

$$\sup_G u \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega \times \{0\}} u, \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} (u - \varepsilon t) \right\} + \varepsilon T, \quad (5.4)$$

folgt, was mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  den Beweis abschließt. QED

Um das starke Maximumprinzip zeigen zu können, benötigen wir einige Hilfsresultate.

**Lemma 5.1** *Sei  $u \in C^2(G)$  und  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  in  $G$ . Weiters gelte  $u \leq M$  in  $G$  mit  $M \geq 0$ . Sei  $K = K_R(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$  eine offene Kugel in  $G$ , sodass  $u < M$  in  $K$  und  $u(\mathbf{x}_1, t_1) = M$  mit  $(\mathbf{x}_1, t_1) \in \partial K$ . Dann gilt  $\mathbf{x}_1 = \bar{\mathbf{x}}$ .*

**Beweis:** Wir nehmen an  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  wäre der einzige Punkt auf  $\partial K$  mit  $u = M$ . Das ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil wir sonst statt  $K$  eine kleinere Kugel betrachten könnten, deren Rand mit  $\partial K$  nur den Punkt  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  gemeinsam hat. Angenommen es gelte  $\mathbf{x}_1 \neq \bar{\mathbf{x}}$ . Dann konstruieren wir eine Kugel  $K_1 = K_{R_1}(\mathbf{x}_1, t_1)$ , wobei wir den Radius so wählen, dass  $K_1 \subset G$  und

$$R_1 < |\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}|$$

gelten. Der Rand von  $K_1$  wird durch  $\partial K$  in zwei Teile  $S_1 = \partial K_1 \cap \bar{K}$  und  $S_2$  geteilt. Es gilt:  $u < M$  auf  $S_1$  und  $u \leq M$  auf  $S_2$ . Wir definieren die Hilfsfunktion

$$v(\mathbf{x}, t) = e^{-\alpha|\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}|^2 - \alpha(t-\bar{t})^2} - e^{-\alpha R^2}$$

mit  $\alpha$  positiv. Dann verschwindet  $v$  auf  $\partial K$ , ist positiv in  $K$  und negativ außerhalb von  $K$ . Den Parameter  $\alpha$  versuchen wir so zu bestimmen, dass

5.2. DAS MAXIMUMPRINZIP FÜR PARABOLISCHE OPERATOREN 99

$L(v) - \frac{\partial v}{\partial t} > 0$  in  $\bar{K}_1$  gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} L(v) - \frac{\partial v}{\partial t} &= \left[ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2\alpha \sum_{i=1}^n b_i(x_i - \bar{x}_i) \right. \\ &\quad \left. - c - 2\alpha(t - \bar{t}) \right] e^{-\alpha|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2 - \alpha(t - \bar{t})^2} + ce^{-\alpha R^2} \\ &\geq \left[ 4\alpha^2 \lambda |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2 - 2\alpha(\text{sp}(A) + b_0|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| + t - \bar{t}) - c \right] e^{-\alpha|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2 - \alpha(t - \bar{t})^2} \\ &> 0 \quad \text{in } K_1 \end{aligned}$$

für  $\alpha$  groß genug, weil die Koeffizienten und  $K_1$  beschränkt sind und

$$|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}| \geq |\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}| - R_1 \quad \text{in } K_1$$

gilt. Für die Funktion

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon v(\mathbf{x}, t)$$

mit  $\varepsilon > 0$  gilt  $L(w) - \frac{\partial w}{\partial t} > 0$  in  $K_1$ . Wir wählen  $\varepsilon$  klein genug, dass

$$w < M \quad \text{auf } S_1$$

gilt. Weiters folgt

$$w < M \quad \text{auf } S_2,$$

weil  $u \leq M$  und  $v < 0$  dort gilt. Da  $v$  auf  $\partial K$  verschwindet, gilt

$$w(\mathbf{x}_1, t_1) = M.$$

$w$  müsste also in  $K_1$  ein positives Maximum annehmen. Das ist aber unmöglich, weil  $w$  in  $K_1$  die strikte Differentialungleichung erfüllt. Das zeigt man wie im elliptischen Fall mit Hilfe von Lemma 7.1. QED

**Lemma 5.2** Für  $u \in C^2(G)$  gelte  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  in  $G$  und  $u \leq M$  in  $G$  mit  $M \geq 0$ . Weiters existiere  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in G$  mit  $u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$ . Dann gilt  $u(\mathbf{x}, t_0) = M$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Beweis:** Angenommen, es existiere ein  $\mathbf{x}_1 \in \Omega$  mit  $u(\mathbf{x}_1, t_0) < M$ . Dann sei  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(s)$  eine durch die Bogenlänge  $s$  parametrisierte glatte Kurve in  $\Omega$ , die

$\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_1$  verbindet, wobei  $\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{x}}(L)$ ,  $u(\tilde{\mathbf{x}}(0), t_0) = M$  und  $u(\tilde{\mathbf{x}}(s), t_0) < M$  für  $0 < s \leq L$  gelte, d.h.  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$  sei der  $\mathbf{x}_1$  nächstgelegene Punkt auf der Kurve, an dem  $u$  den Wert  $M$  annimmt.

Auf dieser Kurve definieren wir die stetige Funktion  $d(s)$  als Abstand von  $(\tilde{\mathbf{x}}(s), t_0)$  zum nächsten Punkt in  $G$ , wo  $u$  den Wert  $M$  annimmt. Aus dem vorigen Lemma folgt

$$u(\tilde{\mathbf{x}}(s), t_0 + d(s)) = M \quad \text{oder} \quad u(\tilde{\mathbf{x}}(s), t_0 - d(s)) = M.$$

Sei nun  $\gamma(s, \delta) = |\tilde{\mathbf{x}}(s + \delta) - \tilde{\mathbf{x}}(s)|$ . Da  $s$  die Bogenlänge ist, folgt  $\gamma(s, \delta) \leq \delta$ . Daraus folgt unmittelbar

$$d(s + \delta) \leq \sqrt{d(s)^2 + \gamma(s, \delta)^2} \leq \sqrt{d(s)^2 + \delta^2} \leq d(s) + \frac{\delta^2}{2d(s)}.$$

Andererseits muss die erste Ungleichung auch gelten, wenn man  $s$  und  $s + \delta$  vertauscht. Daraus folgt

$$d(s + \delta) \geq \sqrt{d(s)^2 - \gamma(s, \delta)^2} \geq \sqrt{d(s)^2 - \delta^2}.$$

Nun wählen wir ein positives  $\delta < d(s)$  und unterteilen das offene Intervall  $(s, s + \delta)$  in  $n$  gleiche Teile. Dann folgt aus den obigen Ungleichungen für  $j = 0, 1, \dots, n - 1$

$$d\left(s + \frac{j+1}{n}\delta\right) - d\left(s + \frac{j}{n}\delta\right) \leq \frac{\delta^2}{2n^2 d\left(s + \frac{j}{n}\delta\right)} \leq \frac{\delta^2}{2n^2 \sqrt{d(s)^2 - \delta^2}}.$$

Summation von  $j = 0$  bis  $n - 1$  gibt

$$d(s + \delta) - d(s) \leq \frac{\delta^2}{2n \sqrt{d(s)^2 - \delta^2}}.$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  folgt daraus

$$d(s + \delta) \leq d(s).$$

Damit ist  $d(s)$  eine monoton fallende Funktion. Mit demselben Argument, wobei wir  $\delta$  durch  $-\delta$  ersetzen, zeigen wir, dass  $d(s)$  monoton wächst. Daher ist  $d(s)$  konstant im Intervall  $(0, L)$ . Aus  $d(0) = 0$  folgt also  $d(L) = 0$ , und damit  $u(\mathbf{x}_1, t_0) = M$ . QED

## 5.2. DAS MAXIMUMPRINZIP FÜR PARABOLISCHE OPERATOREN 101

**Lemma 5.3** Für  $u \in C^2(G)$  gelte  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  in  $G$  und  $u(\mathbf{x}, t) < M$  für  $0 \leq t_0 < t < t_1 \leq T$  mit  $M \geq 0$ . Dann gilt  $u(\mathbf{x}, t_1) < M$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Beweis:** Sei  $u(\mathbf{x}_1, t_1) = M$ . Wir wählen den Kreis  $K = K_R(\mathbf{x}_1, t_1)$  so, dass  $t > t_0$  in  $\bar{K}$  gilt. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$v(\mathbf{x}, t) = e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^2 - \alpha(t-t_1)} - 1.$$

Die positive Konstante  $\alpha$  wählen wir groß genug, dass

$$L(v) - \frac{\partial v}{\partial t} \geq [4\lambda|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^2 - 2\text{sp}(A) - 2b_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| - c + \alpha]e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^2 - \alpha(t-t_1)} > 0$$

gilt. Die Funktion  $v$  verschwindet auf dem Paraboloid  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^2 + \alpha(t - t_1) = 0$ . Vor dem Paraboloid (zeitlich gesehen) ist  $v$  positiv, danach negativ. Wir betrachten den Bereich  $D$ , der von  $S_1$  (dem Abschnitt von  $\partial K$  vor dem Paraboloid) und  $S_2$  (dem Abschnitt des Paraboloids in  $K$ ) begrenzt wird. In der Funktion

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon v(\mathbf{x}, t)$$

wählen wir  $\varepsilon$  klein genug, sodass

$$\begin{aligned} L(w) - \frac{\partial w}{\partial t} &> 0 && \text{in } D, \\ w &< M && \text{auf } S_1, \\ w &\leq M && \text{auf } S_2 \end{aligned}$$

gilt. Wegen der ersten Eigenschaft kann  $w$  kein Maximum im Inneren von  $D$  annehmen. Das Maximum  $M$  wird also nur an  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  angenommen. Es muss daher

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{x}_1, t_1) \geq 0$$

gelten. Aus  $\frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}_1, t_1) = -\alpha < 0$  folgt damit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}_1, t_1) > 0.$$

Da  $u$  an  $(\mathbf{x}_1, t_1)$  ein Maximum annimmt, gilt  $\nabla u(\mathbf{x}_1, t_1) = 0$  und die Matrix  $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_1, t_1)\right)_{n \times n}$  ist negativ semidefinit. Wegen Lemma 7.1 folgt daraus der Widerspruch  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} < 0$ . QED

Mit Hilfe der bisher bewiesenen Resultate ist es nun leicht, das *starke Maximumprinzip für parabolische Operatoren* zu beweisen.

**Satz 5.2** Für  $u \in C^2(G)$  gelte  $L(u) - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$  und  $u \leq M$  in  $G$  mit  $M \geq 0$ . Dann folgt aus  $u(\mathbf{x}_0, t_0) = M$  mit  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$

$$u(\mathbf{x}, t) = M \quad \text{für } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, t_0]. \quad (5.5)$$

**Beweis:** Wir haben schon gezeigt, dass  $u(\mathbf{x}, t_0) = M$  für  $\mathbf{x} \in \Omega$  gilt. Angenommen, es gebe einen Punkt  $(\mathbf{x}_1, t_1) \in G$  mit  $t_1 < t_0$ , sodass  $u(\mathbf{x}_1, t_1) < M$ . Dann gilt  $u(\mathbf{x}, t_1) < M$  für  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Wir wählen  $t_2 \in (t_1, t_0]$  als

$$\min\{t \in (t_1, t_0] : u(\mathbf{x}, t) = M \text{ für ein } \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Dann gilt  $u(\mathbf{x}, t) < M$  für  $t \in (t_1, t_2)$ . Es folgt  $u(\mathbf{x}, t_2) < M$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ , was ein Widerspruch ist. QED

### 5.2.3 Anwendungen

Ähnlich dem stationären Fall ist es auch hier möglich, stetige Abhängigkeit von den Daten für die Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen zu zeigen. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= L(u) + f(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } G, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= u_D(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei das Gebiet  $\Omega$  als beschränkt angenommen wird.

**Satz 5.3** Sei  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  eine Lösung von (5.6). Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\sup_G |u| \leq \max \left\{ \sup_\Omega |u_0|, \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} |u_D| \right\} + C \sup_G |f|. \quad (5.7)$$

**Beweis:** Wir definieren die Vergleichsfunktion  $v$  durch

$$v = \max \left\{ \sup_\Omega |u_0|, \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} |u_D| \right\} + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_G |f|,$$

wobei wir wie im Beweis von Satz 7.4 annehmen, dass  $0 < x_1 < d$  in  $\Omega$  gilt, und dass  $\alpha$  groß genug gewählt ist, dass  $L(v) \leq -\sup_G |f|$  gilt. Wegen

$$L(u - v) - \frac{\partial(u - v)}{\partial t} \geq -f + \sup_G |f| \geq 0 \quad (5.8)$$

können wir das schwache Maximumprinzip auf  $u - v$  anwenden. Da  $u - v \leq 0$  für  $t = 0$  und auf  $\partial\Omega$  gilt, folgt

$$u \leq v \quad \text{in } G. \quad (5.9)$$

Analog zeigt man  $u \geq -v$  in  $G$  durch Anwendung des schwachen Maximumprinzips auf die Funktion  $-u - v$ . Daraus folgt die Aussage des Satzes mit  $C = e^{cd} - 1$ . QED

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips folgt aus dem Satz unmittelbar die Eindeutigkeit der Lösung.

Das Maximumprinzip kann auch verwendet werden, um für Anfangs-Randwertprobleme mit homogenen Randbedingungen und homogener Differentialgleichung exponentielles Abklingen von Lösungen zu beweisen.

**Satz 5.4** Sei  $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  eine Lösung von (5.6) mit  $f = 0$  und  $u_D = 0$ . Dann gilt

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq \sup_{\Omega} |u_0| \exp(-t \inf_G c) \quad \text{in } G. \quad (5.10)$$

**Beweis:** Wir nennen die rechte Seite der Abschätzung  $v$ . Dann gilt

$$L(u - v) - \frac{\partial(u - v)}{\partial t} = -L(v) + \frac{\partial v}{\partial t} = \left(c - \inf_G c\right) v \geq 0.$$

Außerdem gilt  $u - v \leq 0$  für  $t = 0$  und auf  $\partial\Omega$ . Wie im Beweis des vorhergehenden Satzes folgt  $u \leq v$  in  $G$  und — auf analoge Art —  $u \geq -v$  in  $G$ . QED

Existiert die Lösung für alle  $t > 0$  und ist  $\inf_{t \in (0, \infty)} c > 0$ , dann konvergiert die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell gegen 0.

## 5.3 Fouriersynthese für parabolische Gleichungen

### 5.3.1 Separation der Variablen

Als Beispiel betrachten wir ein Anfangs-Randwertproblem für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für } (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in (0, L). \end{aligned} \quad (5.11)$$



Als Versuch, irgendwelche Lösungen der Differentialgleichung zu berechnen, machen wir den (*Separation der Variablen* genannten) Ansatz  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ . Wir fordern, dass die Randbedingungen für  $u$  erfüllt sind, d.h.  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ . Einsetzen in die Differentialgleichung und Division durch  $\varphi\psi$  ergibt

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}.$$

Da die linke Seite eine Funktion von  $x$  und die rechte Seite eine Funktion von  $t$  ist, folgt aus der Gleichung, dass beide Seiten gleich derselben Konstanten  $\lambda$  sein müssen. Damit ergibt sich zur Bestimmung von  $\varphi$  das *Eigenwertproblem*

$$\varphi'' = \lambda\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0.$$

Nichttriviale Lösungen existieren nur für bestimmte Werte von  $\lambda$ , die sogenannten *Eigenwerte*. Entsprechende nichttriviale Lösungen  $\varphi$  heißen *Eigenfunktionen*. Im konkreten Fall gibt es abzählbar viele Eigenwerte:

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Da die Eigenwerte alle negativ sind, klingen die entsprechenden zeitabhängigen Anteile

$$\psi_k(t) = e^{\lambda_k t}$$

für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell ab.

Wir versuchen nun, die Lösung des Anfangs-Randwertproblems als Linearkombination der berechneten Produktlösungen zu bestimmen:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{\lambda_k t} \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (5.12)$$

Einsetzen in die Anfangsbedingung liefert

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Die  $u_{0k}$  müssen also als Fourierkoeffizienten in der Sinus-Fourierreihe von  $u_0$  gewählt werden:

$$u_{0k} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

Es ist leicht zu sehen, dass für jedes  $u_0 \in L^2((0, L))$  die Reihe (5.12) für jedes  $t \geq 0$  eine Funktion in  $L^2((0, L))$  repräsentiert. Weiters konvergiert die gliedweise partiell differenzierte Reihe für beliebige partielle Ableitungen für  $0 < t_0 \leq t$  gleichmäßig. Daraus folgt, dass für  $t > 0$  die Reihe eine beliebig oft partiell differenzierbare Lösung der Differentialgleichung darstellt. Man zeigt auch leicht, dass für  $t \rightarrow 0$  diese Lösung im Sinn von  $L^2((0, L))$  gegen  $u_0$  konvergiert.

Wir haben also eine Lösung konstruiert. Nun stellt sich noch die Frage nach deren Eindeutigkeit. Seien  $u_1$  und  $u_2$  Lösungen von (5.11). Die Differenz  $v = u_1 - u_2$  ist Lösung des Problems mit homogenen Anfangsdaten. Wir multiplizieren die Differentialgleichung für  $v$  mit  $v$  und integrieren über  $(0, L)$ . Partielle Integration auf der rechten Seite ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{v^2}{2} dx = - \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0,$$

also  $\frac{d}{dt} \|v\|_{L^2((0, L))}^2 \leq 0$ . Da  $v$  eine homogene Anfangsbedingung erfüllt, folgt  $v = 0$  für  $t > 0$  und damit die Eindeutigkeit der Lösung von (5.11).

Die Methode der Separation der Variablen kann auf allgemeinere Gleichungen der Form  $\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)$  angewendet werden, wenn man annimmt, dass die Koeffizienten des Ortsoperators  $L$  unabhängig von der Zeit sind. Der Separationsansatz führt auf ein Eigenwertproblem für  $L$ . Resultate über solche Eigenwertprobleme enthält der folgende Exkurs in die Funktionalanalysis.

### 5.3.2 Eigenwertprobleme für symmetrische, kompakte Operatoren

Wir betrachten zunächst das Problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Lu & \text{für } t > 0, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

für  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , wobei  $L$  eine  $m \times m$ -Matrix ist. Die oben verwendete Methode besteht darin, die Lösung nach einer Basis von Eigenvektoren von  $L$  zu entwickeln. Das ist möglich, wenn  $L$  diagonalisierbar ist. Um das zu garantieren, nehmen wir an,  $L$  wäre symmetrisch. Dann gilt: Die Eigenwerte von  $L$  sind reell, und es gibt eine Orthogonalbasis des  $\mathbb{R}^m$  aus Eigen-

vektoren. Sei nun  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  eine Basis aus Eigenvektoren und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die Eigenwerte von  $L$ . Dann schreiben wir  $u(t)$  in der Form

$$u(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \varphi_k.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Anfangsbedingung liefert  $u_k(t) = u_{0k} e^{\lambda_k t}$ , wobei  $u_{0k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , die Koeffizienten in der Darstellung von  $u_0$  sind. Aus der Orthogonalität der Basisvektoren folgt

$$u_{0k} = u_0 \cdot \varphi_k.$$

Damit hat das Problem die Lösung

$$u(t) = \sum_{k=1}^m e^{\lambda_k t} (u_0 \cdot \varphi_k) \varphi_k.$$

Einige der verwendeten Eigenschaften können direkt auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen werden.

**Definition 5.1** Sei  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und  $L : D(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator. Man bezeichnet  $L$  als symmetrisch, wenn

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \quad \forall u, v \in D(L)$$

gilt.

**Satz 5.5** Sei  $(\lambda, \varphi)$  mit  $\varphi \in D(L)$  ein Eigenwert-Eigenvektor-Paar zum symmetrischen Operator  $L$ , d.h.  $L(\varphi) = \lambda \varphi$ . Dann gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $L$  sind orthogonal.

**Beweis:** Es gilt

$$\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle L\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, L\varphi \rangle = \bar{\lambda} \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Daraus folgt  $\lambda = \bar{\lambda}$  und damit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Seien  $(\lambda, \varphi)$  und  $(\mu, \psi)$  Eigenwert-Eigenvektor-Paare mit  $\lambda \neq \mu$ . Dann gilt

$$\lambda \langle \varphi, \psi \rangle = \langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L\psi \rangle = \mu \langle \varphi, \psi \rangle.$$

Daraus folgt  $(\lambda - \mu) \langle \varphi, \psi \rangle = 0$  und damit die Orthogonalität der Eigenvektoren. QED

Auf die Frage, ob die Eigenvektoren eine Basis des Hilbertraumes bilden, kann in dieser Allgemeinheit keine positive Antwort gegeben werden. Dazu sind zusätzliche Voraussetzungen an den Operator notwendig.

**Definition 5.2** Der Operator  $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen abbildet.

**Bemerkung:** a) In endlichdimensionalen Räumen ist jeder lineare Operator beschränkt und damit auch kompakt, weil beschränkte Mengen präkompakt sind.

b) Jeder kompakte Operator ist beschränkt.

Für das Eigenwertproblem für symmetrische, kompakte Operatoren gilt der Entwicklungssatz:

**Satz 5.6** Sei  $K$  ein symmetrischer, kompakter Operator, für den Null kein Eigenwert ist. Dann hat  $K$  höchstens abzählbar viele Eigenwerte  $\mu_k$ ,  $k \in I$ , die alle endliche Vielfachheit haben. In der Aufzählung kommt jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend mehrfach vor. Gibt es unendlich viele Eigenwerte, dann bilden sie eine gegen 0 konvergente Folge. Weiters gibt es ein in  $\mathcal{H}$  vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren  $\varphi_k$ ,  $k \in I$ , und es gilt

$$Ku = \sum_{k \in I} \mu_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (5.14)$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir einige Hilfsresultate.

**Lemma 5.4** Die Menge der Eigenwerte eines symmetrischen, kompakten Operators kann nur 0 als Häufungspunkt haben.

**Beweis:** Sei  $\{\mu_n\}$  eine Folge von Eigenwerten, die gegen einen Wert  $\mu_0 \neq 0$  konvergiert. Seien  $\varphi_n$  die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Dann ist die Folge  $\{\varphi_n/\mu_n\}$  für  $n$  groß genug beschränkt. Ihr Bild unter dem Operator ist die Folge  $\{\varphi_n\}$ . Da der Operator kompakt ist, muss diese Folge eine konvergente Teilfolge besitzen, was aber auf Grund der Orthogonalität der  $\varphi_n$  ein Widerspruch ist:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle + \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle = 2$$

QED

**Lemma 5.5** *Für die Norm*

$$\|K\| := \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \|Ku\|_{\mathcal{H}}$$

*eines symmetrischen, kompakten Operators  $K$  gilt*

$$\|K\| = \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle Ku, u \rangle|.$$

**Beweis:** Für einen normierten Vektor  $u \in \mathcal{H}$  gilt  $|\langle Ku, u \rangle| \leq \|Ku\|_{\mathcal{H}} \leq \|K\|$ , und daher

$$\nu(K) := \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle Ku, u \rangle| \leq \|K\|.$$

Für beliebige  $x, y \in \mathcal{H}$  gilt

$$\begin{aligned} 2\langle Kx, y \rangle + 2\langle Ky, x \rangle &= \langle K(x+y), x+y \rangle - \langle K(x-y), x-y \rangle \\ &\leq \nu(K)(\|x+y\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x-y\|_{\mathcal{H}}^2) = 2\nu(K)(\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2), \end{aligned} \quad (5.15)$$

wobei die letzte Gleichung aus dem *Parallelogrammgesetz* folgt. Für einen normierten Vektor  $u \in \mathcal{H}$  nehmen wir an  $Ku \neq 0$  und setzen

$$x = u\sqrt{\|Ku\|_{\mathcal{H}}}, \quad y = \frac{Ku}{\sqrt{\|Ku\|_{\mathcal{H}}}}.$$

Einsetzen in (5.15) liefert  $4\|Ku\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4\nu(K)\|Ku\|_{\mathcal{H}}$  und daher  $\|Ku\|_{\mathcal{H}} \leq \nu(K)$ . Diese Ungleichung gilt natürlich auch für  $Ku = 0$ . Damit haben wir  $\|K\| \leq \nu(K)$  gezeigt, und der Beweis ist vollständig. QED

**Lemma 5.6** *Sei  $\{\varphi_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ein vollständiges Orthonormalsystem in  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $\{\alpha_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  eine Folge von reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$$

*genau dann, wenn die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$$

gegen ein  $u \in \mathcal{H}$  konvergiert. In diesem Fall gilt  $\alpha_k = \langle u, \varphi_k \rangle$  und die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

**Beweis:** Für die Partialsummen der betrachteten Reihen führen wir die Bezeichnungen

$$s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

ein. Dann gilt für  $m > n$

$$\|s_m - s_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=n+1}^m \alpha_k^2 = \sigma_m - \sigma_n,$$

woraus folgt, dass  $\{s_n\}$  genau dann eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$  ist, wenn  $\{\sigma_n\}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  ist. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen. Die weiteren Aussagen folgen direkt aus der Orthonormalität der  $\varphi_k$ . QED

**Beweis:** (des Satzes): Aus Lemma 10.2 folgt, dass es eine Folge  $\{u_n\}$  von normierten Vektoren und eine Zahl  $\mu_1$  mit  $|\mu_1| = \|K\|$  gibt, sodass  $\langle Ku_n, u_n \rangle$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\mu_1$  konvergiert. Aus

$$\|Ku_n - \mu_1 u_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|Ku_n\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\mu_1 \langle Ku_n, u_n \rangle + \mu_1^2 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\mu_1 (\mu_1 - \langle Ku_n, u_n \rangle)$$

folgt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ku_n - \mu_1 u_n) = 0. \quad (5.16)$$

Wegen der Kompaktheit von  $K$  hat die Folge  $\{Ku_n\}$  eine konvergente Teilfolge  $\{Ku_{n_k}\}$ . Wegen (5.16) konvergiert auch die Folge  $\{u_{n_k}\}$  gegen einen normierten Vektor  $\varphi_1$ , und es gilt  $K\varphi_1 = \mu_1 \varphi_1$ , d.h.  $\varphi_1$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\mu_1$ .

Nun gehen wir rekursiv vor. Angenommen, wir hätten paarweise orthogonale, normierte Eigenvektoren  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$  und die entsprechenden Eigenwerte  $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$  konstruiert. Dann bezeichnen wir das orthogonale Komplement der linearen Hülle von  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}\}$  mit  $\mathcal{H}_k$ . Offensichtlich ist  $\mathcal{H}_k$  ein Hilbertraum. Die Einschränkung des Operators  $K$  auf  $\mathcal{H}_k$  nennen wir  $K_k$ . Wegen  $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k-1}$  gilt  $\|K_k\| \leq \|K_{k-1}\|$ . Der Operator  $K_k$

ist symmetrisch und kompakt auf  $\mathcal{H}_k$ . Wir können daher wie oben ein Eigenwert-Eigenvektor-Paar  $(\mu_k, \varphi_k)$  mit  $|\mu_k| = \|K_k\|$  bestimmen. Auf diese Art konstruieren wir eine Folge  $\{\mu_k\}$  von Eigenwerten mit  $|\mu_k| \leq |\mu_{k-1}|$  und eine orthonormale Folge  $\{\varphi_k\}$  von zugehörigen Eigenvektoren.

Die Konstruktion bricht nach endlich vielen Schritten ab, wenn für ein  $k$   $\mathcal{H}_k = \{0\}$  gilt, d.h. wenn  $\mathcal{H}$  endlichdimensional ist. In diesem Fall sind die Aussagen des Satzes erfüllt. Sei also im Weiteren die oben konstruierte Folge unendlich. Dann folgt aus Lemma 10.1, dass die Folge der Eigenwerte gegen 0 konvergiert. Das impliziert auch die endliche Vielfachheit der Eigenwerte.

Betrachten wir nun die Vektoren

$$v_n = u - \sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \in \mathcal{H}_n.$$

Es gilt  $\|Kv_n\|_{\mathcal{H}} = \|K_n v_n\|_{\mathcal{H}} \leq |\mu_n| \|v_n\|_{\mathcal{H}}$  und

$$\|v_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle^2 \leq \|u\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.17)$$

Daraus folgt, dass  $Kv_n$  gegen 0 konvergiert und daher

$$Ku = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Kämen in der konstruierten Folge nicht alle Eigenwerte von  $K$  entsprechend ihrer Vielfachheit vor, dann gäbe es eine Eigenfunktion  $\varphi$ , die auf alle  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , normal steht. Dann folgt aber aus der obigen Gleichung  $K\varphi = 0$ , d.h. 0 ist ein Eigenwert von  $K$ , was im Widerspruch zu den Annahmen des Satzes steht.

Es bleibt noch, die Vollständigkeit des aus Eigenvektoren bestehenden Orthonoralsystems zu zeigen. Betrachten wir die oben definierte, Folge  $\{v_n\}$ . Aus der Abschätzung (5.17) folgt die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^n \langle u, \varphi_k \rangle^2 \leq \|u\|_{\mathcal{H}}^2,$$

woraus wegen Lemma 5.6 die Konvergenz von  $\{v_n\}$  folgt. Wegen der Stetigkeit von  $K$  gilt für den Grenzwert  $v$  die Gleichung  $Kv = 0$ . Da 0 kein Eigenwert von  $K$  ist, folgt  $v = 0$ , was gleichbedeutend ist mit

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

QED

### 5.3.3 Entwicklung nach Eigenfunktionen

Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (A \nabla u) - cu & \text{für } (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad u = u_0 \quad \text{für } t = 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit vom Ort  $\mathbf{x}$  abhängigen, beschränkten Koeffizienten  $A(\mathbf{x})$  und  $c(\mathbf{x}) \geq 0$ , wobei die Matrix  $A$  als gleichmäßig positiv definit in  $\Omega$  angenommen wird.

Ein Operator  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  wird definiert durch die Lösung eines stationären Problems:  $Kf \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(Kf, v) = -\langle f, v \rangle_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v^T A \nabla u + cuv) \, d\mathbf{x}$$

die durch den Ortsoperator induzierte symmetrische, koerzive Bilinearform ist.  $Kf$  ist die schwache Lösung des Dirichletproblems

$$\nabla \cdot (A \nabla u) - cu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Satz 4.15 impliziert eine Abschätzung der Form  $\|Kf\|_1 \leq C\|f\|_0$ . Der Operator  $K$  bildet also beschränkte Mengen in  $L^2(\Omega)$  auf beschränkte Mengen in  $H_0^1(\Omega)$  ab. Die kompakte Einbettung von  $H^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  (Satz 4.14) impliziert, dass der Operator  $K$  kompakt ist. Weiters gilt

$$\langle f, Kg \rangle_0 = -a(Kf, Kg) = -a(Kg, Kf) = \langle Kf, g \rangle_0, \quad (5.19)$$

d.h.  $K$  ist symmetrisch. Um den Entwicklungssatz auf  $K$  anwenden zu können, müssen wir noch die Injektivität von  $K$  zeigen. Aus  $Kf = 0$  und der Definition von  $Kf$  folgt  $\langle f, v \rangle_0 = 0$  für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  und damit  $f = 0$ , weil  $H_0^1(\Omega)$  dicht in  $L^2(\Omega)$  ist. Damit sind alle Voraussetzungen des Entwicklungssatzes verifiziert. Es gibt also ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem in  $L^2(\Omega)$ , das aus Eigenfunktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  von  $K$  besteht. Die zugehörigen Eigenwerte  $\mu_1, \mu_2, \dots$  bilden eine reelle Nullfolge.



Wegen (5.14) kann die Lösung des stationären Dirichletproblems dargestellt werden als

$$u = Kf = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle f, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k.$$

Da  $K$  injektiv ist, ist der inverse Operator  $L$  auf der Menge  $D(L) := K(L^2(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega)$  definiert. Setzt man in (5.19)  $Kf = u$  und  $Kg = v$ , so folgt

$$\langle Lu, v \rangle_0 = -a(u, v) = \langle u, Lv \rangle_0 \quad \forall u, v \in D(L).$$

Der Operator  $L$  ist daher eine Erweiterung des Differentialoperators

$$Lu = \nabla \cdot (A \nabla u) - cu$$

auf  $D(L)$ , und er ist symmetrisch. Aus den Regularitätsresultaten in Abschnitt 4.3.5 folgt  $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , wenn  $\partial\Omega$  eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit ist und für die Koeffizienten  $A \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $c \in C(\bar{\Omega})$  gilt.

Sei  $(\mu, \varphi)$  ein Eigenwert-Eigenvektor-Paar von  $K$ , dann impliziert die Gleichung  $K\varphi = \mu\varphi$ , dass  $\varphi \in D(L)$  gilt. Wenden wir  $L$  auf diese Gleichung an, erhalten wir  $L\varphi = \mu^{-1}\varphi$ , d.h.  $(\mu^{-1}, \varphi)$  ist ein Eigenwert-Eigenvektor-Paar von  $L$ . Umgekehrt zeigt man analog, dass jedes Eigenwert-Eigenvektor-Paar von  $L$  einem Eigenwert-Eigenvektor-Paar von  $K$  entspricht. Wir werden die Eigenwerte von  $L$  mit  $\lambda_k = \mu_k^{-1}$  bezeichnen. Nun setzen wir für  $f \in L^2(\Omega)$  in der Fourierentwicklung  $f = Lu$  mit  $u \in D(L)$ . Dann folgt für  $L$  eine zu (5.14) analoge Formel:

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k \quad \forall u \in D(L)$$

Die Rechnung

$$\lambda_k \|\varphi_k\|_0^2 = \langle L\varphi_k, \varphi_k \rangle_0 = -a(\varphi_k, \varphi_k) \leq -\kappa \|\varphi_k\|_1^2 \leq -\kappa \|\varphi_k\|_0^2$$

impliziert die Ungleichung  $\lambda_k \leq -\kappa$ , wobei  $\kappa$  die Koerzivitätskonstante der Bilinearform  $a$  ist. Die  $\lambda_k$  bilden also eine nach  $-\infty$  strebende, monoton fallende Folge von negativen Zahlen.

Aus Lemma 5.6 ergibt sich eine Charakterisierung von  $D(L)$  mit Hilfe der Fourierkoeffizienten: Es gilt  $u \in D(L)$  genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle u, \varphi_k \rangle_0^2$  konvergiert.

### 5.3. FOURIERSYNTHESE FÜR PARABOLISCHE GLEICHUNGEN 113

Damit sind wir in der Lage, das Anfangs-Randwertproblem (5.18) zu lösen:

**Satz 5.7** Sei  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Dann ist

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k$$

eine Lösung von (5.18) im folgenden Sinn: Es gilt  $u \in C([0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty), L^2(\Omega))$  und  $u(t) \in D(L)$  für alle  $t > 0$ . Weiters ist die Differentialgleichung  $\frac{du}{dt}(t) = L(u(t))$  für alle  $t > 0$  erfüllt.

**Bemerkung:** a) Aufgrund der Definition von  $u(t)$  ist die Anfangsbedingung offensichtlich erfüllt. Aus der Stetigkeit von  $u$  folgt, dass  $u(t)$  für  $t \rightarrow 0$  im Sinn von  $L^2(\Omega)$  gegen  $u_0$  konvergiert.

b) Wegen  $D(L) \subset H_0^1(\Omega)$  sind die Randbedingungen im schwachen Sinn erfüllt.

Im Beweis verwenden wir den folgenden Spezialfall des Lebesgueschen Satzes über die majorisierte Konvergenz:

**Lemma 5.7** Sei  $\alpha_k(h) \in \mathbb{R}$  für  $h > 0$  und  $k = 1, 2, \dots$ . Es gelte  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_k(h) = 0$  für alle  $k = 1, 2, \dots$  und  $|\alpha_k(h)| \leq \bar{\alpha}_k$  mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_k^2 < \infty$ . Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(h)^2 = 0.$$

**Beweis:** Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $K \in \mathbb{N}$  groß genug, dass

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \bar{\alpha}_k^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(h)^2 < \sum_{k=1}^K \alpha_k(h)^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $h$  klein genug wird die endliche Summe auf der rechten Seite kleiner als  $\varepsilon/2$ , womit das Lemma bewiesen ist. QED

**Beweis:** (des Satzes) Aus  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\|u_0\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0^2 < \infty.$$

Außerdem gilt wegen  $e^{\lambda_k t} \leq 1$ ,  $u(t) \in L^2(\Omega)$  und

$$\|u(t)\|_0 \leq \|u_0\|_0 \quad \text{für } t \geq 0.$$

Um die Stetigkeit von  $u$  zu zeigen, betrachten wir

$$\|u(t+h) - u(t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( e^{\lambda_k(t+h)} - e^{\lambda_k t} \right)^2 \langle u_0, \varphi_k \rangle_0^2.$$

Wegen  $\left| e^{\lambda_k(t+h)} - e^{\lambda_k t} \right| \leq 1$  können wir das obige Lemma anwenden, womit  $u \in C([0, \infty), L^2(\Omega))$  bewiesen ist.

Aus  $\lambda_k \leq 0$  folgt

$$\left| \lambda_k e^{\lambda_k t} \right| \leq \frac{1}{et}. \quad (5.20)$$

Damit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{2\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0^2 \leq (et)^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0^2 < \infty,$$

woraus  $u(t) \in D(L)$  für  $t > 0$  folgt. Für die Differenzierbarkeit von  $u$  und die Gültigkeit der Differentialgleichung müssen wir zeigen, dass

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - L(u) \right\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{e^{\lambda_k(t+h)} - e^{\lambda_k t}}{h} - \lambda_k e^{\lambda_k t} \right)^2 \langle u_0, \varphi_k \rangle_0^2$$

für  $h \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Aus (5.20) folgt die Abschätzung

$$\left| \frac{e^{\lambda_k(t+h)} - e^{\lambda_k t}}{h} - \lambda_k e^{\lambda_k t} \right| = \left| \lambda_k e^{\lambda_k t} \left( \frac{e^{\lambda_k h} - 1}{\lambda_k h} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{et},$$

die für  $t > 0$  die Anwendung des vorhergehenden Lemmas gestattet. Die Stetigkeit von  $\frac{\partial u}{\partial t}$  als Funktion von  $(0, \infty)$  nach  $L^2(\Omega)$  zeigt man auf ähnliche Art und Weise. QED

**Satz 5.8** Die Lösung von (5.18) im Sinn des vorhergehenden Satzes ist eindeutig.

**Beweis:** Die Differenz  $v = u_1 - u_2$  von zwei Lösungen von (5.18) ist Lösung desselben Problems mit homogener Anfangsbedingung. Multiplikation der Differentialgleichung für  $v$  mit  $v$  und Integration über  $\Omega$  gibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_0^2 = \left\langle v, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle_0 = \langle L(v), v \rangle_0 = -a(v, v) \leq 0,$$

woraus  $v(t) = 0$  für  $t \geq 0$  folgt.

QED

### 5.3.4 Stark stetige Halbgruppen

Die Anwendung der Exponentialfunktion auf beschränkte Operatoren  $L$  ist definiert durch

$$e^L := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}.$$

Aus der Beschränktheit von  $L$  folgt, dass die Reihe gegen einen beschränkten Operator konvergiert. Diese Definition ist natürlich auch für Matrizen anwendbar.

**Satz 5.9** Die Lösung des Anfangswertproblems (5.13) im  $\mathbb{R}^m$  ist gegeben durch

$$u(t) = e^{Lt} u_0.$$

**Beweis:** Sei  $E$  die orthogonale Matrix, die als Spalten die normierten Eigenvektoren  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , von  $L$  enthält. Dann gilt

$$E^T L E = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Weiters gilt  $L^k = E D^k E^T$ . Daraus folgt

$$e^{Lt} = E e^{Dt} E^T = E \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}) E^T,$$

und damit

$$e^{Lt} u_0 = E e^{Dt} \begin{pmatrix} u_0 \cdot \varphi_1 \\ \vdots \\ u_0 \cdot \varphi_m \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} u_0 \cdot \varphi_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} u_0 \cdot \varphi_m \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m e^{\lambda_k t} (u_0 \cdot \varphi_k) \varphi_k.$$

QED

Angesichts dieses Resultates drängt sich auch für die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (5.18) die Notation  $u(t) = e^{Lt}u_0$  auf. Man beachte, dass der Differentialoperator  $L$  unbeschränkt ist, und daher die Definition der Exponentialfunktion mit Hilfe der Taylorreihe nicht möglich ist.

Natürlich stellt sich die Frage, was die Abbildung von  $t$  auf  $e^{Lt}$  noch mit der Exponentialfunktion zu tun hat. Wir werden zeigen, dass diese Abbildung die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erfüllt.

**Definition 5.3** a) Eine Familie  $\{T(t), t \geq 0\}$  von beschränkten linearen Operatoren in einem Banachraum  $B$  heißt stark stetige Halbgruppe, wenn

- $T(s+t) = T(s)T(t) \quad \forall t, s \geq 0,$
- $T(0) = I,$
- $T(t)u$  ist für alle  $u \in B$  stetig als Funktion von  $[0, \infty)$  nach  $B$ .

Eine stark stetige Halbgruppe heißt Halbgruppe von Kontraktionen, wenn gilt

$$\|T(t)u\| \leq \|u\| \quad \forall t \geq 0, \forall u \in B.$$

b) Für eine stark stetige Halbgruppe  $T(t)$  sei

$$D(L) = \left\{ u \in B : \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \right\}$$

und

$$Lu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \quad \forall u \in D(L).$$

Dann heißt der lineare Operator  $L$  der infinitesimale Generator der Halbgruppe  $T(t)$ .

**Satz 5.10** Für den im vorigen Abschnitt definierten Operator  $L : D(L) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  ist durch

$$e^{Lt}u := \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k$$

eine stark stetige Halbgruppe  $e^{Lt}$  von Kontraktionen in  $L^2(\Omega)$  mit infinitesimalem Generator  $L$  gegeben.

**Beweis:** Die Kontraktionseigenschaft folgt direkt aus der Parsevalschen Gleichung und aus  $e^{\lambda_k t} \leq e^{\lambda_1 t}$ . Insbesondere gilt

$$\|e^{Lt}u\|_0 \leq e^{\lambda_1 t}\|u\|_0. \quad (5.21)$$

Damit ist klarerweise auch die Beschränktheit von  $e^{Lt}$  gezeigt. Die zweite und dritte Eigenschaft von stark stetigen Halbgruppen wurden schon bewiesen, und die erste Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned} e^{Lt}e^{Ls}u &= e^{Lt} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k s} \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k = \sum_{l=1}^{\infty} e^{\lambda_l t} \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k s} \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k, \varphi_l \right\rangle_0 \varphi_l = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} e^{\lambda_l(t+s)} \langle u, \varphi_l \rangle_0 \varphi_l = e^{L(t+s)}u. \end{aligned}$$

Dass  $L$  der Generator der Halbgruppe  $e^{Lt}$  ist, wurde schon im vorhergehenden Abschnitt bewiesen. QED

Das Konzept der stark stetigen Halbgruppen stellt einen allgemeineren Zugang zur Lösung von Anfangs-Randwertproblemen für parabolische Differentialgleichungen dar. Man kann für allgemeinere elliptische Operatoren als die hier betrachteten zeigen, dass sie stark stetige Halbgruppen generieren. Als weiterführende Literatur sei *A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983*, empfohlen.

### 5.3.5 Inhomogene Probleme

Wir betrachten das inhomogene Anfangs-Randwertproblem: Gesucht ist  $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1((0, T], L^2(\Omega))$  mit  $u \in D(L)$  für  $t > 0$  und

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= L(u) + f(t) \quad \text{für } t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Für die Daten nehmen wir  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in C([0, T], L^2(\Omega))$  an. Die Problemstellung bedeutet, dass wir uns auf homogene Randbedingungen beschränken. Inhomogene Randdaten können wie im Beweis von Satz 4.15 durch eine Transformation eliminiert werden.

Da die Lösung für jedes  $t \geq 0$  in  $L^2(\Omega)$  sein soll, können wir sie in der Form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k$$

mit  $u_k(t) = \langle u(t), \varphi_k \rangle_0$  schreiben, wobei die  $\varphi_k$  die Eigenfunktionen von  $L$  sind. Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$\frac{du_k}{dt} = \langle L(u) + f(t), \varphi_k \rangle_0 = \lambda_k u_k + f_k(t)$$

mit den Fourierkoeffizienten  $f_k(t) = \langle f(t), \varphi_k \rangle_0$  von  $f(t)$ . Die Fourierkoeffizienten der Lösung erfüllen eine gewöhnliche Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung gibt

$$u_k(0) = \langle u_0, \varphi_k \rangle_0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems erhält man mit Variation der Konstanten:

$$u_k(t) = e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0 + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} f_k(s) ds.$$

Für die Lösung von (5.22) ergibt sich damit die Darstellung

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} \langle f(s), \varphi_k \rangle_0 ds \varphi_k,$$

woraus durch Vertauschung von Summation und Integration

$$u(t) = e^{Lt} u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds \quad (5.23)$$

folgt. Diese Vertauschung ist erlaubt, weil die Reihe für  $e^{L(t-s)} f(s)$  auf dem Intervall  $[0, t]$  gleichmäßig konvergiert.

Für den Fall einer von der Zeit unabhängigen Inhomogenität  $f$  ist die Lösung des Anfangswertproblems für  $u_k$  gegeben durch

$$u_k(t) = -\frac{f_k}{\lambda_k} + e^{\lambda_k t} \left( \langle u_0, \varphi_k \rangle_0 + \frac{f_k}{\lambda_k} \right).$$

Entsprechend lässt sich die Lösung von (5.22) schreiben als

$$u(t) = -Kf + e^{Lt}(u_0 + Kf),$$

wobei  $K$  der oben definierte Lösungsoperator für das stationäre Problem ist. Die Lösung ist also geschrieben als Summe aus einem *stationären* und einem *transienten* Anteil.

Aus der Darstellung der Lösung lässt sich leicht stetige Abhängigkeit von den Daten zeigen:

**Lemma 5.8** *Für die Lösung (5.23) von (5.22) gilt*

$$\|u(t)\|_0 \leq \|u_0\|_0 + \frac{1}{|\lambda_1|} \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_0$$

**Beweis:** Wir verwenden die Abschätzung (5.21) und zeigen

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_0 &\leq \|e^{Lt}u_0\|_0 + \int_0^t \|e^{L(t-s)}f(s)\|_0 ds \\ &\leq \|u_0\|_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} ds \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_0 \leq \|u_0\|_0 + \frac{1}{|\lambda_1|} \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_0. \end{aligned}$$

QED

### 5.3.6 Regularität

**Satz 5.11** *Für die Lösung  $u(t) = e^{Lt}u_0$  des homogenen Anfangs-Randwertproblems (5.18) gilt  $u \in C^\infty((0, \infty), L^2(\Omega))$  und  $u(t) \in D(L^m)$  für  $t > 0$  und für alle  $m \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis:** (Skizze) Der Beweis ist nicht schwer. Man zeigt, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^m e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  und für  $t > 0$  konvergiert, und dass sie gleich  $d^m u / dt^m = L^m u$  ist. QED

Zusammen mit den Regularitätsergebnissen für elliptische Gleichungen folgt aus diesem Satz Glattheit der Lösung als Funktion des Ortes, wenn  $\partial\Omega$  und die Koeffizienten in  $L$  glatt sind. Erwähnenswert ist, dass keine Glattheitsannahmen für die Anfangsdaten notwendig sind. Trotzdem ist die Lösung für jeden positiven Zeitpunkt glatt.



### 5.3.7 Verhalten für $t \rightarrow \infty$

In diesem Abschnitt beschäftigt uns die Frage, ob Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen für  $t \rightarrow \infty$  gegen eine Grenzfunktion konvergieren bzw. wie schnell sie das tun.

Die Abschätzung (5.21) zeigt, dass die Lösung  $u(t) = e^{Lt}u_0$  des homogenen Anfangs-Randwertproblems für  $t \rightarrow \infty$  exponentiell abklingt.

Für inhomogene Probleme mit Daten, die nicht von der Zeit abhängen, kann diese Aussage auf den transienten Lösungsanteil angewendet werden. Die Lösung konvergiert also exponentiell gegen den stationären Lösungsanteil. Schwieriger ist die Situation, wenn die Inhomogenitäten von der Zeit abhängen. Angenommen, die Inhomogenität würde für  $t \rightarrow \infty$  gegen eine Funktion  $f(\infty) \in L^2(\Omega)$  konvergieren. Dann stellt sich die Frage, ob die Lösung  $u(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Lösung des Problems

$$0 = L(u) + f(\infty)$$

konvergiert. Diese Aussage ist Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 5.12** Sei  $f$  Hölderstetig in  $t$ , d.h.

$$\|f(s) - f(t)\|_0 \leq K|t - s|^\beta \quad \text{für } t, s \geq 0,$$

wobei  $\beta \in (0, 1]$ , und es gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty).$$

Dann gilt für die Lösung  $u$  (gegeben durch (5.23)) und ihre Ableitung  $\frac{du}{dt}$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{du}{dt}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -K(f(\infty)),$$

wobei alle Grenzübergänge bezüglich  $L^2(\Omega)$  zu verstehen sind.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Ableitung der Lösung des homogenen Problems.

**Lemma 5.9** Für jedes  $\delta > 0$  existiert  $c(\delta) > 0$ , so dass

$$\|Le^{Lt}u\|_0 \leq \frac{c}{t} e^{(\lambda_1 + \delta)t} \|u\|_0. \quad (5.24)$$

### 5.3. FOURIERSYNTHESE FÜR PARABOLISCHE GLEICHUNGEN 121

**Beweis:** Wir zeigen die Abschätzung

$$|\lambda_k| e^{\lambda_k t} \leq \frac{c}{t} e^{(\lambda_1 + \delta)t} \quad \forall \delta > 0,$$

wobei die Konstante  $c$  von  $\delta$  abhängt, aber unabhängig von  $k$  gewählt werden kann. Die obige Ungleichung schreiben wir in der Form

$$c e^{(\lambda_1 - \lambda_k + \delta)t} - |\lambda_k| t \geq 0.$$

Die Ungleichung ist für  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$  erfüllt. Die Funktion auf der linken Seite hat ein Minimum an

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_k + \delta} \ln \frac{|\lambda_k|}{c(\lambda_1 - \lambda_k + \delta)}.$$

Sie nimmt dort den Wert

$$\frac{|\lambda_k|}{\lambda_1 - \lambda_k + \delta} \left( 1 - \ln \frac{|\lambda_k|}{c(\lambda_1 - \lambda_k + \delta)} \right)$$

an. Aus der Ungleichung erhalten wir für  $c$  die Bedingung

$$c \geq \frac{|\lambda_k|}{e^{(\lambda_1 - \lambda_k + \delta)t}}.$$

Die Konstante kann unabhängig von  $k$  bestimmt werden, weil die rechte Seite gleichmäßig in  $k$  beschränkt ist. Damit gilt

$$\|Le^{Lt}u\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k e^{\lambda_k t})^2 \langle u, \varphi_k \rangle_0^2 \leq \left( \frac{c}{t} e^{(\lambda_1 + \delta)t} \right)^2 \|u\|_0^2.$$

QED

**Beweis: (des Satzes)** Die Lösung  $u(t)$  kann in der Form

$$u(t) = e^{L(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^t e^{L(t-s)}f(s) ds$$

geschrieben werden. Diese Darstellung differenzieren wir und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Le^{L(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^t Le^{L(t-s)}f(s) ds + f(t) \\ &= Le^{L(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^t Le^{L(t-s)}[f(s) - f(t)] ds \\ &\quad + \int_{\tau}^t Le^{L(t-s)} ds f(t) + f(t) \\ &= Le^{L(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^t Le^{L(t-s)}[f(s) - f(t)] ds \\ &\quad + e^{L(t-\tau)}f(t). \end{aligned}$$

Mit unseren Annahmen an die Inhomogenität  $f$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\|_0 &\leq \sqrt{K} |t - s|^{\beta/2} \sqrt{\|f(s) - f(\infty)\|_0 + \|f(t) - f(\infty)\|_0} \\ &\leq \varepsilon(\tau) \sqrt{K} |t - s|^{\beta/2} \quad \forall s, t \geq \tau, \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  für  $\tau \rightarrow \infty$ . Zusammen mit obigem Lemma ergibt sich daraus eine Abschätzung für den zweiten Term in der Darstellung von  $\frac{\partial u}{\partial t}$ :

$$\left\| \int_{\tau}^t L e^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds \right\|_0 \leq c\varepsilon(\tau) \sqrt{K} \int_{\tau}^t |t - s|^{(\beta/2)-1} e^{(\lambda_1 + \delta)(t-s)} ds,$$

wobei wir  $\delta < -\lambda_1$  wählen. Das Integral auf der rechten Seite ist gleichmäßig beschränkt in  $t$  und  $\tau$ . Die rechte Seite kann also durch ausreichend große Wahl von  $\tau$  beliebig klein gemacht werden. Für eine feste Wahl von  $\tau$  und für  $t$  groß genug werden auch der erste und der dritte Term in der Darstellung von  $\frac{du}{dt}$  beliebig klein, wobei wir hier die gleichmäßige Beschränktheit von  $u(\tau)$  verwenden, die aus Lemma 10.5 folgt. Damit ist der erste Teil des Satzes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{du}{dt}(t) = 0$$

bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung des Problems

$$L(u) = g$$

von der rechten Seite  $g$ , wenn wir  $g = \frac{du}{dt} - f$  setzen.

QED

## 5.4 Aufgaben

**Aufgabe 5.1** Man diskutiere die Lösungen der folgenden Probleme durch Eigenfunktionsentwicklung und gebe eine physikalische Interpretation des Lösungsverhaltens für  $t \rightarrow \infty$  an:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{für } x \in (0, 1), t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

- b)  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , für  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$ ,  
 $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = u_0(x)$ .
- c)  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$ , für  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$ ,  
 $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ ,  
 $u(x, 0) = u_0(x)$ .

**Aufgabe 5.2** Man berechne die Lösung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung im Rechteck  $(0, a) \times (0, b)$ . Man wähle die folgende Vorgangsweise:

- Zunächst betrachte man das Problem mit auf den Seiten  $x = 0$  und  $x = a$  verschwindenden Randdaten.
- Mittels Separation der Variablen ermittle man ein Eigenwertproblem in  $x$ -Richtung und löse dieses.
- Man stelle die Lösung als Fourierreihe dar und wähle die Koeffizienten so, dass die Randbedingungen an  $y = 0$  und  $y = b$  erfüllt sind.
- Analoge Vorgangsweise mit auf den Seiten  $y = 0$  und  $y = b$  verschwindenden Randdaten.
- Addition der beiden Lösungsanteile.

**Aufgabe 5.3** Mittels Separation von Variablen bestimme man eine möglichst große Zahl von Eigenwerten und Eigenfunktionen des Laplaceoperators im Rechteck  $(0, a) \times (0, b)$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Man stelle Überlegungen über die Vielfachheit der Eigenwerte an.

**Aufgabe 5.4** Man löse das Dirichletproblem für die Laplacegleichung auf einem Kreisring:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_0^2 < x^2 + y^2 < R_1^2\}, \\ u &= u_D & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Vorgangsweise:

- Zunächst transformiere man das Problem auf Polarkoordinaten. Randbedingungen? *Hinweis:* Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit fordern!
- Im transformierten Problem verwende man Trennung der Variablen und

löse ein Eigenwertproblem in  $\varphi$ -Richtung.

c) Man löse die Differentialgleichungen für die Anteile in  $r$ -Richtung. *Hinweis:* Eulersche Differentialgleichung, Ansatz:  $r^\alpha$ .

d) Man löse das Dirichletproblem durch geeignete Linearkombination der berechneten Produktlösungen.

**Aufgabe 5.5** Man berechne die Lösung für die speziellen Daten

$$R_0 = 2, \quad R_1 = 3,$$

$$u_D(x, y) = x \quad \text{für } x^2 + y^2 = 4, \quad u_D(x, y) = y \quad \text{für } x^2 + y^2 = 9.$$

## Chapter 6

# Hyperbolische Gleichungen

### 6.1 Die eindimensionale Wellengleichung

Angenommen, wir betrachten die Schwingungen einer sehr langen Saite in der Nähe ihres Mittelpunktes. Diese Situation approximieren wir durch eine unendlich lange Saite und behandeln das Problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x). \quad (6.2)$$

Führen wir nun in der Differentialgleichung die Variablentransformation

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

durch, so erhalten wir  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ . Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung  $u = F(\xi) + G(\eta)$ , wobei  $F$  und  $G$  beliebige differenzierbare Funktionen sind. Rücksubstitution gibt

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Betrachten wir den Anteil  $F(x - ct)$  und vergleichen wir die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = t_0 > 0$ . Die Auslenkungen haben zu beiden Zeiten dieselbe Gestalt. Diese ist jedoch zum Zeitpunkt  $t = t_0$  um  $ct_0$  nach rechts verschoben. Einen solchen Lösungsanteil nennt man *wandernde Welle*. Sie wandert mit der Geschwindigkeit  $c$  nach rechts. Analog ist auch  $G(x + ct)$  eine wandernde Welle, die mit derselben Geschwindigkeit

$c$  nach links wandert. Um das Anfangswertproblem zu lösen, haben wir  $F$  und  $G$  geeignet zu bestimmen. Es muss gelten

$$\begin{aligned} u_0(x) &= F(x) + G(x), \\ v_0(x) &= -cF'(x) + cG'(x). \end{aligned}$$

Integration der zweiten Gleichung liefert

$$F(x) - G(x) = -\frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\xi) d\xi,$$

wobei  $x_0$  eine beliebige Konstante ist. Wir lösen das Gleichungssystem für  $F$  und  $G$  und erhalten die d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi. \quad (6.3)$$

Ist  $u_0$  einmal und  $v_0$  zweimal stetig differenzierbar, so ist das die eindeutige klassische Lösung des Anfangswertproblems.

Ein wesentlicher Unterschied zur Wärmeleitungsgleichung besteht darin, dass die Glattheit der Lösung zu Zeitpunkten  $t > 0$  von der Glattheit der Anfangsdaten abhängt, während Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für  $t > 0$  beliebig oft differenzierbar sind (unabhängig von der Glattheit der Anfangsdaten).

Es stellt sich die Frage, ob man auch Funktionen, die nicht zweimal stetig differenzierbar sind und die nur von  $x + ct$  oder  $x - ct$  abhängen, als Lösungen interpretieren kann.

**Satz 6.1** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar. Dann sind die Funktionen

$$f(x + ct) \quad \text{und} \quad f(x - ct) \quad (6.4)$$

schwache Lösungen der Gleichung (6.1).

**Beweis:** Zu zeigen ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x + ct) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) d(x, t) = 0,$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ . Die Substitution  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$  bringt das Integral auf die Form

$$-2c \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi\eta} d\xi d\eta.$$

Da  $\varphi$  eine Testfunktion ist, verschwindet das Integral nach  $\xi$ . Für  $f(x - ct)$  verläuft der Beweis analog. QED

Wir können das Anfangswertproblem also auch mit lokal integrierbaren Anfangsbedingungen betrachten und die berechnete Darstellung für die Lösung verwenden. Sei zum Beispiel

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.5)$$

$$v_0(x) = 0. \quad (6.6)$$

Abbildung 6.1 ist eine graphische Darstellung der Lösung zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Man kann verfolgen, wie die Anfangsauslenkung in zwei Teile zerlegt wird, die nach links und rechts wandern.

Wir haben ein Cauchyproblem für die eindimensionale Wellengleichung gelöst (vergleiche mit Beispiel 1.4). Die Geraden  $x + ct = x_0$  bzw.  $x - ct = x_0$  sind *Charakteristiken*. Die Lösung am Punkt  $(x_0, t_0)$  hängt nur von den Anfangsdaten im Intervall  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  ab. Dieses Intervall wird daher *Abhängigkeitsbereich* (siehe Abb. 6.2) für  $(x_0, t_0)$  genannt. Man erhält es, indem man die durch  $(x_0, t_0)$  gehenden Charakteristiken mit der  $x$ -Achse schneidet.

Untersucht man, wo sich Störungen in den Anfangsdaten in einem Intervall  $[a, b]$  auf die Lösung auswirken, so gelangt man zum Begriff des *Einflussbereiches* (siehe Abb. 6.3). Dieser wird durch die von den Endpunkten des Intervalls nach außen laufenden Charakteristiken begrenzt.

Störungen pflanzen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  fort. Das ist ein wesentlicher Unterschied zur Wärmeleitungsgleichung. Dort wirkt sich jede lokale Störung der Anfangsdaten für  $t > 0$  auf der ganzen reellen Achse aus. Um das Anfangswertproblem für die *inhomogene Wellengleichung*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

lösen zu können, benötigen wir eine Fundamentallösung. Diese hat für die Wellengleichung eine sehr einfache Form.

**Lemma 6.1** Die Funktion  $\frac{1}{2c}H(ct - |x|)$  ist eine Fundamentallösung von  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  mit Pol in  $(0, 0)$ .



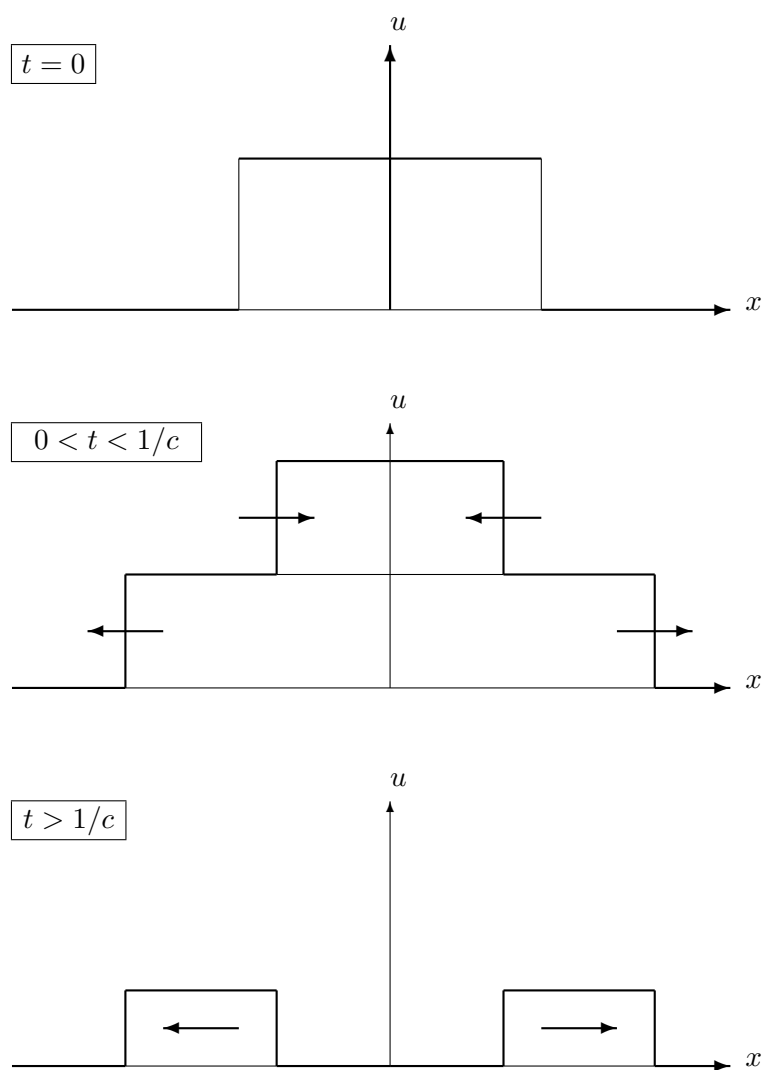


Figure 6.1: Welle mit rechteckiger Anfangsauslenkung

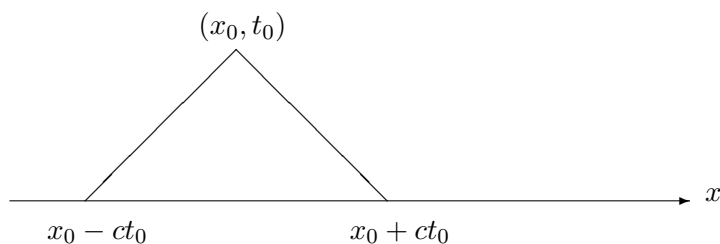
Figure 6.2: Abhängigkeitsbereich für  $(x_0, t_0)$ 

Figure 6.3: Einflussbereich

**Beweis:** Wir haben zu zeigen, dass

$$\frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} H(ct - |x|) L^*(\varphi) d(x, t) = \varphi(0, 0)$$

gilt. Der Operator  $L$  ist formal selbstadjungiert. Wir können also  $L^*$  durch  $L$  ersetzen. Im Integral machen wir die Substitution  $\xi = x - ct$  und  $\eta = x + ct$  und erhalten

$$- \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, 0) d\xi = \varphi(0, 0),$$

womit der Satz bewiesen ist. QED

Eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$\frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} H(c(t-s) - |x-\xi|) f(\xi, s) d(\xi, s).$$

Das kann man auch schreiben als

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds = \frac{1}{2c} \int_{D(x,t)} f(\xi, s) d(\xi, s), \quad (6.7)$$

wobei der Bereich  $D(x, t)$  das durch die  $x$ -Achse und die durch  $(x, t)$  gehenden Charakteristiken begrenzte Dreieck ist. Dieses stellt für das inhomogene Problem den Abhängigkeitsbereich dar. Man überzeugt sich leicht, dass die obige Lösung der Differentialgleichung auch die Anfangsbedingungen erfüllt, womit das inhomogene Problem vollständig gelöst ist.

Um den Einfluss von Randbedingungen zu untersuchen, betrachten wir die Schwingungen einer langen Saite in der Nähe eines Endpunktes. Diese werden beschrieben durch das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) && \text{in } (0, \infty)^2, \\ u(0, t) &= 0 && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) && \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Problems liefert die folgende Überlegung: Sei  $u(x, t)$  als ungerade Funktion von  $x$  auf  $x < 0$  fortgesetzt. Die entstehende Funktion löst das Cauchyproblem für die inhomogene Wellengleichung, wenn man auch  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$  als ungerade Funktionen auf  $x < 0$  fortsetzt. Umgekehrt hat das Cauchyproblem mit ungeraden Daten eine ungerade Lösung (die also die Randbedingung  $u(0, t) = 0$  erfüllt). Wir können daher die Formel (6.3) zur Berechnung der Lösung verwenden.

Als Beispiel betrachten wir eine Situation wie in dem Beispiel des vorigen Abschnitts. Angenommen, eine Welle mit Rechtecksform wandert auf das linke Ende zu. Dann kommt ihr auf der gedachten Verlängerung der Saite eine Welle entgegen, deren Form die Spiegelung der Form der ursprünglichen Welle an der  $x$ -Achse ist. Die beiden Wellen treffen einander an  $x = 0$ , und nach einer gewissen Zeit der Interaktion wandert jede in unveränderter Form weiter. Vergessen wir die Vorgänge auf der gedachten Verlängerung  $x < 0$ , dann ergibt sich das folgende Bild: Die auf den Rand auftretende Welle wird von diesem reflektiert (siehe Abb. 6.4).

Als nächsten Schritt betrachten wir das Anfangs-Randwertproblem für eine endliche Saite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= f(t), \quad u(L, t) = g(t) && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) && \text{für } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Für die Anfangs- und Randdaten stellen wir die Kompatibilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} f(0) &= u_0(0), & f'(0) &= v_0(0), \\ g(0) &= u_0(L), & g'(L) &= v_0(L). \end{aligned}$$

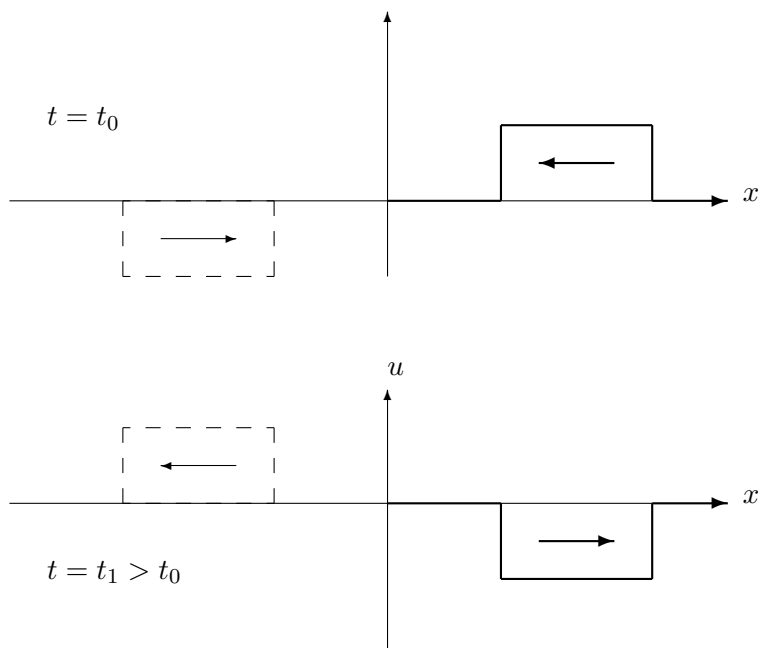


Figure 6.4: Reflexion am Rand

Im Folgenden geben wir ein numerisches Verfahren an, das die exakte Lösung des Problems liefert.

**Satz 6.2** Die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u(x, t)$  erfüllt die Gleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  genau dann, wenn sie für alle  $h, k > 0$  die Differenzengleichung

$$u(x - ck, t - h) + u(x + ck, t + h) = u(x + ch, t + k) + u(x - ch, t - k)$$

erfüllt.

**Bemerkung:** In der Differenzengleichung wird  $u$  an den Eckpunkten eines von Charakteristiken gebildeten Parallelogramms ausgewertet.

**Beweis:** Durch Einsetzen zeigt man, dass  $F(x - ct)$  bzw.  $G(x + ct)$  die Differenzengleichung erfüllen, d.h. diese gilt für jede Lösung der Differentialgleichung. Sei nun  $u$  zweimal stetig differenzierbar und erfülle die Differenzengleichung. Wir setzen  $h = 0$ , ziehen auf beiden Seiten  $2u(x, t)$  ab

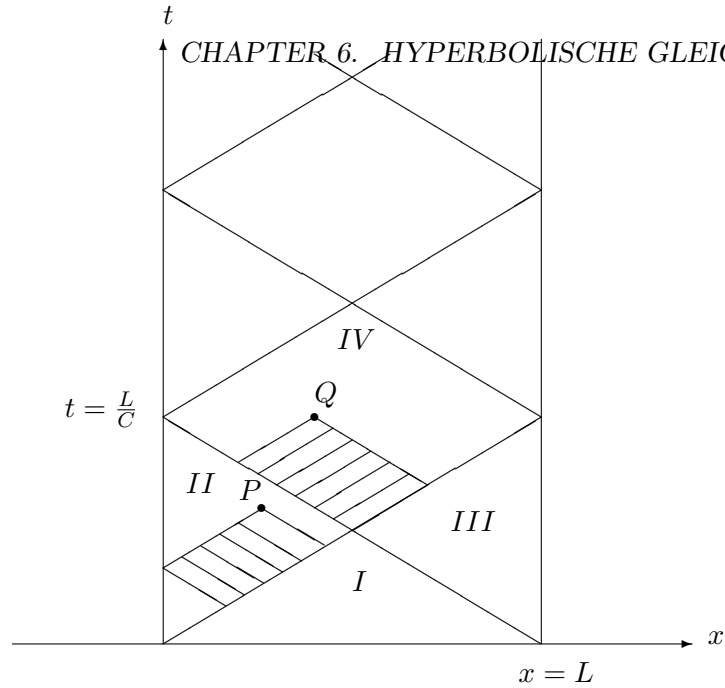


Figure 6.5: Ein Differenzenverfahren

und dividieren durch  $k^2$ .

$$c^2 \frac{u(x - ck, t) - 2u(x, t) + u(x + ck, t)}{c^2 k^2} = \frac{u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)}{k^2}$$

Nun lassen wir  $k$  gegen Null gehen und erhalten das gewünschte Resultat.  
QED

Die Abbildung 6.5 zeigt, wie dieses Resultat zur Lösung des Anfangs-Randwertproblems verwendet werden kann. Im Bereich I wird die Lösung mit Hilfe der Formel (6.3) aus den Anfangsdaten  $u_0$  und  $v_0$  bestimmt. In den Bereichen II, III, IV, usw. verwendet man die Differenzengleichung, um die Lösung aus schon berechneten Werten und Randwerten zu bestimmen, wie das an den Beispielen der Punkte  $P$  und  $Q$  in der Abbildung 6.5 demonstriert wird.

## 6.2 Entwicklung nach Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Anfangs-Randwertproblemen für hyperbolische Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Lu + f && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei  $Lu = \nabla \cdot (A\nabla u) - cu$  ein symmetrischer elliptischer Differentialoperator wie in Abschnitt 5.3.3 ist. Weiters gelte  $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$  und  $f \in C([0, \infty), L^2(\Omega))$ .

Der Operator  $L$  hat negative Eigenwerte  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen  $\varphi_k$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in  $L^2(\Omega)$ . Wir machen daher für die Lösung den Ansatz

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k \quad \text{mit} \quad u_k(t) = \langle u(t), \varphi_k \rangle_0. \quad (6.9)$$

Dann folgt aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} = \langle Lu + f, \varphi_k \rangle_0 = \langle u, L\varphi_k \rangle_0 + \langle f, \varphi_k \rangle_0 = \lambda_k u_k + f_k,$$

mit  $f_k(t) = \langle f, \varphi_k \rangle_0$ . Als Anfangsbedingungen erhält man

$$u_k(0) = u_{0k} := \langle u_0, \varphi_k \rangle_0, \quad \frac{du_k}{dt}(0) = v_{0k} := \langle v_0, \varphi_k \rangle_0.$$

Berücksichtigt man die Negativität von  $\lambda_k$ , dann hat dieses Anfangswertproblem die Lösung

$$u_k(t) = \cos(\sqrt{-\lambda_k} t) u_{0k} + \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_k} t)}{\sqrt{-\lambda_k}} v_{0k} + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_k}(t-s))}{\sqrt{-\lambda_k}} f_k(s) ds \quad (6.10)$$

In Abschnitt 5.3.4 haben wir den Operator  $e^L$  definiert durch

$$e^L u = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k} \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k.$$

In den Lösungen von hyperbolischen Gleichungen treten statt der Exponentialfunktion trigonometrische Funktionen auf, und die Idee liegt nahe, die

obige Definition im folgenden Sinn zu verallgemeinern: Sei  $g$  eine reelle Funktion, die auf der Menge der Eigenwerte von  $L$  definiert ist. Dann definieren wir den Operator  $g(L)$  durch

$$g(L)u := \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k) \langle u, \varphi_k \rangle_0 \varphi_k.$$

Der Definitionsbereich von  $g(L)$  hängt vom Verhalten von  $g$  ab. Ist z.B.  $g(\lambda_k)$  gleichmäßig beschränkt, so gilt  $D(g(L)) = L^2(\Omega)$ .

**Lemma 6.2** *Sei  $g$  beschränkt und stetig auf  $(-\infty, 0]$ . Dann gilt  $g(Lt)u \in C([0, \infty), L^2(\Omega))$  für alle  $u \in L^2(\Omega)$ .*

**Beweis:** Es gilt

$$\|g(L(t+h))u - g(Lt)u\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [g(\lambda_k(t+h)) - g(\lambda_k t)]^2 \langle u, \varphi_k \rangle_0^2.$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun offensichtlich aus Lemma 5.7. QED

Die obige Definition gibt uns die Möglichkeit, wie bei parabolischen Gleichungen auch für hyperbolische Gleichungen Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen in kompakter Form darzustellen. Die durch (6.9) und (6.10) gegebene Lösung können wir jetzt schreiben als

$$u(t) = \cos(\sqrt{-L}t)u_0 + \frac{\sin(\sqrt{-L}t)}{\sqrt{-L}}v_0 + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-L}(t-s))}{\sqrt{-L}}f(s)ds. \quad (6.11)$$

Anders als bei parabolischen Gleichungen ist die konstruierte Funktion  $u(\mathbf{x}, t)$  im allgemeinen für  $t > 0$  nicht in  $D(L)$ , sondern nur in  $L^2(\Omega)$  wie die Anfangsdaten. Sie kann also nicht in die Differentialgleichung eingesetzt werden, ist aber eine schwache Lösung:

**Satz 6.3** *Seien  $L$  und  $\Omega$  wie in Abschnitt 5.3.3. Zusätzlich zu den bisherigen Annahmen an die Daten sei  $f \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ . Für die durch (6.11) bestimmte Funktion gilt dann  $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ . Weiters ist  $u$  in  $\Omega \times \mathbb{R}$  eine schwache Lösung der Differentialgleichung in (6.8).*

**Beweis:** Für die ersten beiden Anteile von  $u$  folgt die Stetigkeit in  $t$  direkt aus obigem Lemma. Für den dritten Anteil

$$u_f(t) = \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-L}(t-s))}{\sqrt{-L}}f(s)ds$$

gilt

$$\begin{aligned} u_f(t+h) - u_f(t) &= \int_t^{t+h} \frac{\sin(\sqrt{-L}(t-s+h))}{\sqrt{-L}} f(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{-L}(t-s+h)) - \sin(\sqrt{-L}(t-s))}{\sqrt{-L}} f(s) ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\|u_f(t+h) - u_f(t)\|_0 \leq \frac{h}{\sqrt{-\lambda_1}} \sup_{t < s < t+h} \|f(s)\|_0 + ht \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_0,$$

die die Stetigkeit von  $u_f$  impliziert.

Bezeichnen wir die Partialsummen der Fourierreihen für  $u$  und  $f$  mit  $U_n$  und  $F_n$ , so gilt offensichtlich  $U_{n,t} = LU_n + F_n$ . Da Konvergenz in  $L^2(\Omega)$  gleichmäßig in  $t$  distributionelle Konvergenz impliziert, folgt aus Lemma 1.4, dass  $u$  die Differentialgleichung in (6.8) im distributionellen Sinn löst. QED

Man beachte die Tatsache, dass die Lösung auch für negative Zeiten definiert ist. Dass hyperbolische Gleichungen auch "rückwärts" lösbar sind, macht einen wesentlichen Unterschied zu parabolischen Gleichungen aus. Man sieht leicht, dass der Operator  $e^{Lt}$  für negative  $t$  unbeschränkt ist und dass Elemente von  $L^2(\Omega)$  im allgemeinen nicht in seinem Definitionsbereich liegen.

Der Satz lässt die zwei Fragen offen, ob die Lösung eindeutig ist und ob bzw. in welchem Sinn die berechnete Lösung die Randbedingungen erfüllt. Mit diesen Fragen werden wir uns im folgenden Abschnitt beschäftigen.

Als Anwendung betrachten wir noch einmal das Anfangs-Randwertproblem für eine endliche Saite, das im vorigen Abschnitt mit einem Differenzenverfahren gelöst wurde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) && \text{für } 0 < x < L \end{aligned}$$

Die speziellen Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{hx}{x_0} & x \leq x_0, \\ \frac{h(L-x)}{L-x_0} & x \geq x_0, \end{cases} \quad v_0(x) = 0$$

modellieren einen Anschlag der Saite am Punkt  $x_0$  (siehe Abb. 6.6). Zur



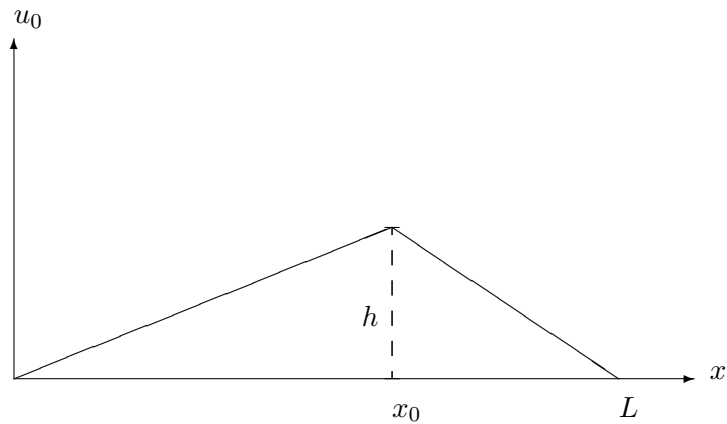


Figure 6.6: Anfangsauslenkung

Lösung des Problems benötigen wir die Lösung des Eigenwertproblems für  $Lu = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$  auf dem Intervall  $(0, L)$  mit homogenen Dirichletbedingungen:

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Weiters benötigen wir die Fourierkoeffizienten der Anfangsauslenkung:

$$u_{0k} = \int_0^L u_0(x) \varphi_k(x) dx = \frac{\sqrt{2L}hL^2}{x_0(L-x_0)k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi x_0}{L}$$

Die Lösung ist also

$$u(x, t) = \frac{2hL^2}{x_0(L-x_0)\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\frac{k\pi x_0}{L} \cos\frac{k\pi ct}{L} \sin\frac{k\pi x}{L}.$$

Ein Lösungsanteil

$$a_k \cos\frac{k\pi ct}{L} \sin\frac{k\pi x}{L}$$

heißt *k-te harmonische Schwingung*. Die erste harmonische Schwingung nennt man *Grundschiwingung*, die anderen *Obertöne*. Betrachten wir die Bewegung eines einzelnen Teilchens (mit  $x$ -Koordinate  $x$ ) im Rahmen einer harmonischen Schwingung. Es schwingt mit der Frequenz

$$\nu_k = \frac{kc}{2L}$$

und der Amplitude

$$a_k \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

In einer harmonischen Schwingung haben also alle Teilchen dieselbe Frequenz, aber verschiedene Amplituden. Die Nullstellen von  $\sin \frac{k\pi x}{L}$  bewegen sich nicht. Sie heißen *Knoten* der  $k$ -ten harmonischen Schwingung. Die Form einer Saite ändert sich in einer harmonischen Schwingung mit der Zeit nur durch den Faktor  $\cos \frac{k\pi ct}{L}$ . Harmonische Schwingungen werden deshalb auch *stehende Wellen* genannt. Die Frequenzen der harmonischen Schwingungen, die *natürlichen Frequenzen*  $\nu_k$ , sind ganzzahlige Vielfache der *Grundfrequenz*

$$\nu_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}.$$

Das ist der Grund dafür, dass die Lösung  $u(x, t)$  des Problems als *musikalischer Ton* empfunden wird. Die *Tonhöhe* ist durch die Grundfrequenz gegeben. Die *Klangfarbe* ergibt sich aus der relativen Größe der  $a_k$ .

Aus der berechneten Lösung sieht man, dass die Klangfarbe durch die Stelle, an der die Saite angeschlagen wird, beeinflusst werden kann. Schlägt man an einem Knoten der  $k$ -ten harmonischen Schwingung an, so wird diese im resultierenden Ton fehlen. Ein Anschlag in der Mitte der Saite bewirkt also zum Beispiel das Fehlen aller geraden harmonischen Schwingungen. Die Grundschiwingung ist die einzige, die auf diese Art nicht ausgeschaltet werden kann.

Beschränkt man sich auf Schwingungen, bei denen sich ein fester Punkt der Saite nicht bewegt, so können sich diese nur aus harmonischen Schwingungen zusammensetzen, für die dieser Punkt ein Knoten ist. Diese Überlegung erklärt das Funktionieren der *Flageolett-Technik* auf Streich- und Zupfinstrumenten, bei der ein Finger leicht auf einen Punkt der Saite gelegt wird.

### 6.3 Energieintegrale

Multipliziert man die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

mit  $\frac{\partial u}{\partial t}$  und integriert von 0 bis  $L$ , so erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \int_0^L c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_0^L f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Partielle Integration im ersten Integral auf der rechten Seite ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^L c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) = c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^L + \int_0^L f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (6.12)$$

Die Ausdrücke in dieser Gleichung lassen sich wie folgt interpretieren: Die beiden Integrale auf der linken Seite sind proportional zur kinetischen bzw. potentiellen Energie der Saite. Die rechte Seite ist die Arbeit pro Zeiteinheit, die die äußeren Kräfte leisten. Gleichung (6.12) beschreibt die Änderung der Gesamtenergie

$$E(t) := \int_0^L \frac{\partial u^2}{\partial t} dx + \int_0^L c^2 \frac{\partial u^2}{\partial x} dx.$$

Für ein Anfangs-Randwertproblem mit  $f(x, t) = u(0, t) = u(L, t) = 0$  gilt

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0,$$

und die Energie ist konstant und gleich der Anfangsenergie

$$E(0) = \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^L c^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Bevor wir diese Ideen auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern, beweisen wir zunächst ein Hilfsresultat.

**Lemma 6.3** *Es gilt  $D(\sqrt{-L}) = H_0^1(\Omega)$  und*

$$a(u, u) = \|\sqrt{-L}u\|_0^2 = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle_0^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (6.13)$$

**Beweis:** In Abschnitt 5.3.3 wurde gezeigt, dass

$$a(u, v) = - \langle Lu, v \rangle_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle_0 \langle v, \varphi_k \rangle_0$$

für alle  $u \in D(L)$  und für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt. Die Wahl  $v = u$  zeigt, dass (6.13) für alle  $u \in D(L)$  gültig ist. Aus dieser Identität folgt, dass der

Abschluss von  $D(L)$  bezüglich der durch  $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$  gegebenen Norm gleich  $D(\sqrt{-L})$  ist. Andererseits ist die Norm  $\|\cdot\|_a$  wegen der Stetigkeit und Koerzivität von  $a$  äquivalent zur  $H^1(\Omega)$ -Norm, woraus folgt, dass der oben erwähnte Abschluss den Raum  $H_0^1(\Omega)$  liefert.

Die Gültigkeit von (6.13) in  $H_0^1(\Omega)$  folgt aus der Dichtheit von  $D(L)$  in diesem Raum. QED

Wir betrachten nun das mehrdimensionale, homogene Anfangs-Randwertproblem, d.h. (6.8) mit  $f = u_0 = v_0 = 0$ . Definieren wir die Energie durch

$$E(t) := \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_0^2 + a(u, u),$$

dann liefert die analoge Vorgangsweise wie im eindimensionalen Fall die Gleichung  $\frac{dE}{dt}(t) = 0$  und damit  $E(t) = E(0) = 0$ . Daraus folgt die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Problems, Allerdings nur für Lösungen, die glatt genug sind, dass die obigen Manipulationen gerechtfertigt sind.

Folgendes Resultat ist leicht zu beweisen:

**Satz 6.4** *Seien  $L$  und  $\Omega$  wie in Abschnitt 5.3.3. Sei zusätzlich zu den bisherigen Annahmen über die Daten  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Dann gilt für die durch (6.11) definierte Funktion  $u \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$  und  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere hat in diesem Fall  $u$  endliche Energie und es erfüllt die Randbedingungen im schwachen Sinn.*

*Gilt zusätzlich  $u_0 \in D(L)$  und  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ , dann folgt  $u \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$  und  $u(t) \in D(L)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist die Differentialgleichung in (6.8) im starken Sinn erfüllt, und die Lösung ist eindeutig.*

Im folgenden Beispiel hat die Lösung keine endliche Energie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{in } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) &= 0 && \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Anfangsauslenkung die Randbedingungen nicht erfüllt und daher nicht in  $H_0^1((0, \pi))$  ist. Der obige Satz ist nicht anwendbar.

Die Lösung (6.11) hat die Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \sin(kx),$$

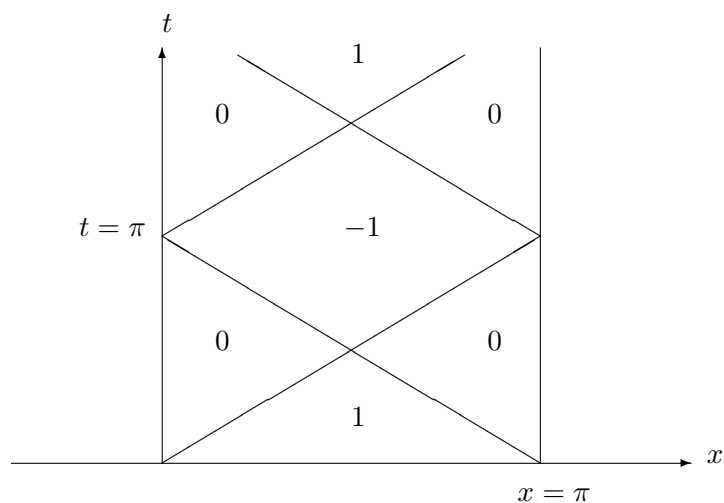


Figure 6.7: Lösung mit unendlicher Energie

wobei die Anfangsauslenkung die Darstellung

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$$

besitzt. Verwendet man die Identität

$$\cos(kt) \sin(kx) = \frac{1}{2} \sin(k(x+t)) + \frac{1}{2} \sin(k(x-t)),$$

so erhält man die schon bekannte d'Alembertsche Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)),$$

wobei man sich  $u_0$  als ungerade Funktion auf  $(-\pi, \pi)$  und dann als periodische Funktion mit Periode  $2\pi$  auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt denken muss. Die Lösung unseres Beispiels ist also stückweise konstant und nimmt die Werte 0, 1 und  $-1$  an (siehe Abb. 6.7). Die Tatsache, dass die Anfangs- und Randbedingungen nicht kompatibel sind, führt zu Sprungunstetigkeiten in der Lösung, die entlang von Charakteristiken propagiert und von den Rändern reflektiert werden.

# Bibliography

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] P. W. Berg, J. L. McGregor, *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1966.
- [3] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
- [4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [5] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [6] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] I. Stakgold, *Green Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [8] G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.