Die Hopfverzweigung

In diesem Abschnitt lernen wir einen dritten Weg zur Konstruktion eines Grenzzykels für die van der Pol-Gleichung kennen, und zwar durch eine Verzweigungsanalyse. In der Gleichung (**??**) ersetzen wir ε durch r (unseren generischen Namen für Verzweigungsparameter und x durch $x/\sqrt{r}$. Es ergibt sich die Gleichung

$$\ddot{x} + x = r\dot{x} - x^2\dot{x}\,. \tag{1}$$

In der an der trivialen Lösung linearisierten Gleichung

$$\ddot{z} + z = r\dot{z}$$

tritt für $r = 0$ eine Verzweigung auf, bei der der stationäre Punkt $z = 0$ seine Stabilitätseigenschaft ändert. Während er für $r < 0$ eine stabile Spirale ist, ist er für $r > 0$ eine instabile Spirale. Das geschieht dadurch, dass die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda = r/2 \pm i\sqrt{1 - r^2/4}$ bei $r = 0$ gemeinsam die imaginäre Achse überqueren. Das ist eine für uns neue Art der Verzweigung, die in eindimensionalen dynamischen Systemen nicht auftreten kann. Wir verallgemeinern nun die Gleichung (1) auf die folgende Art: Zunächst ersetzen wir sie durch die Definition $y := \dot{x}$ durch ein System erster Ordnung. In diesem lassen wir dann allgemeine Nichtlinearitäten zu:

$$\dot{x} = y + f(x,y)\,, \qquad \dot{y} = -x + ry + g(x,y)\,,$$

wobei die Taylorentwicklungen von f und g mit quadratischen Termen beginnen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots\,, \\ g(x,y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + \dots\,. \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass am Verzweigungspunkt $r = 0$ die linearisierte Gleichung den harmonischen Oszillator beschreibt, dessen Trajektorien in der x-y-Ebene kreisförmig sind, legt die Einführung von Polarkoordinaten nahe:

$$x(t) = \varrho(t)\sin\varphi(t)\,, \qquad y(t) = \varrho(t)\cos\varphi(t)\,.$$

Transformation des Systems ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= r\varrho\cos^2\varphi + f(\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)\sin\varphi + g(\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)\cos\varphi\,, \\ \dot{\varphi} &= 1 - r\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{\varrho}f(\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{\varrho}g(\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Für kleine Werte von r und ϱ ist die Konstante 1 der dominierende Term auf der rechten Seite der zweiten Gleichung. Insbesondere könne wir annehmen, dass die rechte Seite dieser Gleichung nicht verschwindet. Damit erhalten wir für ϱ als Funktion von φ die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{r\varrho\cos^2\varphi + f\sin\varphi + g\cos\varphi}{1 - r\sin\varphi\cos\varphi + (f/\varrho)\cos\varphi - (g/\varrho)\sin\varphi}\,, \tag{2}$$

wobei die Argumente von f und g weggelassen wurden. Die Trajektorien im Phasenraum werden durch diese Gleichung bestimmt. Unser Ziel ist es, für kleine Werte des Parameters r periodische Trajektorien mit kleiner Amplitude, d.h. mit kleinen Werten von ϱ, zu konstruieren. Eine Möglichkeit besteht darin, Lösungen der obigen Gleichung zu suchen, die für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 2\pi$ denselben ϱ-Wert annehmen.

Da die rechte Seite von (2) für kleine Werte von ϱ klein ist, erwarten wir von ϱ, dass es über ein φ-Intervall der Länge 2π hinweg fast konstant ist. In der für eine periodische Lösung erwarteten Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\varrho(\varphi)\cos^2\varphi + f\sin\varphi + g\cos\varphi}{1 - r\sin\varphi\cos\varphi + (f/\varrho(\varphi))\cos\varphi - (g/\varrho(\varphi))\sin\varphi} d\varphi = 0\,,$$

werden wir daher ϱ durch eine kleine Konstante approximieren. Dann wird die Taylorentwicklung des Integranden als Funktion von r und von dieser Konstanten bestimmt. Dabei verwenden wir die Taylorentwicklungen von f und g. Lösungen der entstehenden Gleichung können dann als Näherung für die Amplituden periodischer Lösungen der ursprünglichen Gleichung betrachtet werden. Die Durchführung dieses Programmes ist eine längere Rechnung, und wir geben nur das Resultat, nämlich die Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{r\varrho}{2} + \frac{A\varrho^3}{16} = 0 \\ &\text{mit } A = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} - f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) \\ &\qquad\quad + g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) + f_{xx}g_{xx} - f_{yy}g_{yy} \end{aligned} \tag{3}$$

an, wobei bei den partiellen Ableitungen von f und g das Argument $(0, 0)$ weggelassen wurde. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten in den Taylorreihen und den partiellen Ableitungen ist natürlich

$$a_{kl} = \frac{1}{k!\,l!}\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0)\,, \qquad b_{kl} = \frac{1}{k!\,l!}\frac{\partial^{k+l} g}{\partial x^k \partial y^l}(0,0)\,.$$

Die Gleichung (3) erinnert an die Heugabelverzweigung. Die Verzweigung im ursprünglichen zweidimensionalen System heißt *Hopfverzweigung*. Für

$A < 0$ ist sie *superkritisch*, d.h. dass aus einem stabilen stationären Punkt für $r < 0$ ein instabiler stationärer Punkt und ein stabiler Grenzzykel für $r > 0$ entsteht. Im *subkritischen* Fall $A > 0$ existiert für $r < 0$ neben dem stabilen stationären Punkt ein instabiler Grenzzykel und für $r > 0$ nur ein instabiler stationärer Punkt.

In der van der Pol-Gleichung ist $g_{xxy} = -2$, und alle anderen Taylorkoeffizienten verschwinden. Es tritt daher eine superkritische Hopfverzweigung und damit für kleine positive Werte von r ein stabiler Grenzzykel auf.