3 Zweidimensionale dynamische Systeme – Oszillationen

Lineare Systeme

Ein Beispiel für ein zweidimensionales dynamisches System ist die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

für ebene Schwingungen eines reibungsfreien Pendels. Mit $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$ wird daraus das Sytem erster Ordnung $\dot{y} = f(y)$ mit $f_1(y) = y_2$ und $f_2(y) = -\omega^2 \sin y_1$. Offensichtlich ist $y = 0$ ein stationärer Punkt. Das an diesem stationären Punkt linearisierte System ist gegeben durch $\dot{z} = Az$, wobei die Koeffizientenmatrix die am stationären Punkt ausgewertete Jacobimatrix des Vektorfeldes f ist:

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Form

$$\dot{z} = Az \tag{1}$$

ergibt sich immer, wenn man um einen stationären Punkt linearisiert. Wir betrachten daher allegemeine Systeme dieser Art, in diesem Abschnitt mit $z(t) \in \mathbb{R}^2$ und daher mit einer 2×2-Matrix A. Da das System homogen und linear ist, bildet die Menge aller Lösungen einen Vektorraum (Superpositionsprinzip), der wegen des Satzes von Picard-Lindelöf zweidimensional ist. Spezielle Lösungen können mit dem Ansatz $z(t) = e^{\lambda t}\zeta$ gefunden werden, der auf das Eigenwertproblem $A\zeta = \lambda\zeta$ für die Matrix A führt. Gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren ζ_1, ζ_2 zu den reellen Eigenwerten λ_1 und λ_2 (wobei auch $\lambda_1 = \lambda_2$ erlaubt ist), dann ist $\{e^{\lambda_1 t}\zeta_1, e^{\lambda_2 t}\zeta_2\}$ eine Basis für den Lösungsraum. Gibt es einen doppelten Eigenwert λ mit eindimensionalem Eigenraum, dann hat die Basis die Form $\{e^{\lambda t}\zeta, e^{\lambda t}\eta + te^{\lambda t}\zeta\}$, wobei ζ ein Eigenvektor und η ein Hauptvektor ist, d.h. $A\eta = \lambda\eta + \zeta$. Schließlich gibt es noch den Fall konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda = a \pm ib$. Dann haben die Eigenvektoren ζ_1 und ζ_2 komplexe Komponenten, und ein reelle Lösungsbasis besteht aus Linearkombinationen der Terme $e^{at}\sin(bt)$ und $e^{at}\cos(bt)$. Verschiedene Möglichkeiten für Stabilitätseigenschaften des stationären Punktes $z = 0$ und Namen für diese Situationen sind in der folgenden Tabelle gesammelt. Die verschiedenen Fälle können auch mit Hilfe der

Spur $\tau = \text{sp}(A)$ und der Determinante $\Delta = \det(A)$ der Koeffizientenmatrix unterschieden werden.

Eigenwerte	Stabilität	Bezeichnung	τ, Δ
$\lambda_{1,2} < 0$	as. stabil	stab. Knoten	$\tau < 0,\ 0 < 4\Delta \leq \tau^2$
$\lambda_{1,2} > 0$	instabil	instab. Knoten	$\tau > 0,\ 0 < 4\Delta \leq \tau^2$
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	instabil	Sattelpunkt	$\Delta < 0$
$\text{Re}\lambda_{1,2} < 0,\ \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$	as. stabil	stab. Spirale	$\tau < 0,\ 4\Delta > \tau^2$
$\text{Re}\lambda_{1,2} > 0,\ \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}$	instabil	instab. Spirale	$\tau > 0,\ 4\Delta > \tau^2$
$\lambda_{1,2} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$	stabil	Zentrum	$\tau = 0,\ \Delta > 0$

Die Tabelle enthält alle Fälle, in denen $z = 0$ ein isolierter stationärer Punkt ist, d.h. wenn kein Eigenwert $\lambda = 0$ auftritt. In den ersten 5 Fällen, d.h. wenn kein Eigenwert auf der imaginären Achse liegt, nennt man den stationären Punkt *hyperbolisch*. Diese Bezeichnung kann man erklären durch das Phasenporträt des Sattelpunktes. Die beiden von den Eigenvektoren ζ_1 und ζ_2 erzeugten Geraden durch den Ursprung (d.h. durch den stationären Punkt) heißen die *instabile* bzw. die *stabile Mannigfaltigkeit* des Sattelpunktes. Lösungen des Anfangswertproblems mit Anfangspunkt auf der stabilen Mannigfaltigkeit konvergieren für $t \to \infty$ gegen den stationären Punkt. Ist der Anfangspunkt auf der instabilen Mannigfaltigkeit, konvergiert die Lösung für $t \to -\infty$ gegen den stationären Punkt. Alle anderen Trajektorien haben die Form von Hyperbelästen mit der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit als Asymptoten. Wie auch im eindimensionalen Fall sind hyperbolische stationäre Punkte generisch (oder strukturstabil). Kleine Störungen (wie z.B. durch die bei der Linearisierung weggelassenen Nichtlinearitäten) bewirken keine qualitativen Änderungen des Phasenporträts. (Auf dieses Thema wird noch im letzten Kapitel eingegangen.)

In den letzten 3 Fällen in der Tabelle zeigen die Trajektorien *Oszillationen*, ein Verhalten, das nur in einem mindestens zweidimensionalen Phasenraum möglich ist. Bei einer stabilen Spirale, z.B., spricht man von *gedämpften Oszillationen.*

Der harmonische Oszillator

Für die linearisierte Pendelgleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (*harmonischer Oszillator*) berechnet man leicht die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, d.h. die Ruhelage $x = \dot{x} = 0$ ist ein Zentrum, das im Phasenporträt von ellipsenförmigen geschlossenen Trajektorien (d.h. von periodischen Lösungen) umgeben ist, wie die folgende Rechnung zeigt: Man multipliziere die Gleichung mit $\dot{x}$ und integriere bezüglich t:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = E = \text{const}\,.$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichung ist die *Energieerhaltung*. Die beiden Terme auf der linken Seite repräsentieren die *kinetische* und die *potentielle Energie*. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $x(t) = c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t) = \cos(\omega(t - t_0))x_0$ mit beliebigen Konstanten c und d, bzw. beliebiger Amplitude x_0 und Phase t_0.

Schwingungen eines *periodisch angeregten* harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \alpha \sin(\omega_1 t)$$

setzen sich zusammen aus einer *Partikulärlösung* (d.h. einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung) und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Die Inhomogenität gehört dem von den Funktionen $\sin(\omega_1 t)$ und $\cos(\omega_1 t)$ aufgespannten Vektorraum an, der abgeschlossen ist bezüglich der Operation des Differenzierens. In dieser Situation liegt es nahe, eine Partikulärlösung mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t)$ zu ermitteln. Einsetzen liefert

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_1^2}\,, \qquad A_2 = 0\,,$$

und daher die Partikulärlösung

$$x(t) = \frac{\alpha \sin(\omega_1 t)}{\omega^2 - \omega_1^2}\,.$$

Die allgemeine Lösung ist also eine Überlagerung von Schwingungen mit der *Eigenfrequenz* ω und der *Anregungsfrequenz* ω_1. Man beachte, dass die berechnete angeregte Schwingung nur für $\omega_1 \neq \omega$ verwendet werden kann und dass die Amplitude unbeschränkt wächst, wenn sich die Anregungsfrequenz der Eigenfrequenz nähert. Für den *Resonanzfall* $\omega_1 = \omega$ liefert der modifizierte Ansatz $x(t) = At\cos(\omega t)$ die Lösung

$$x(t) = -\frac{\alpha t \cos(\omega t)}{2\omega}\,,$$

d.h. die Amplitude wächst mit der Zeit über alle Grenzen.

Hasen und Schafe

Als erstes nichtlineares Beispiel analysieren wir ein populationsdynamisches Modell für die Interaktion zweier verschiedener konkurrierender Spezies, z.B. Hasen und Schafe, die um dasselbe Futter konkurrieren. Das Modell hat die Form

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= r_H H \left(1 - \frac{H}{H_0} - \frac{S}{S_1}\right), \\ \frac{dS}{d\tau} &= r_S S \left(1 - \frac{S}{S_0} - \frac{H}{H_1}\right), \end{aligned}$$

wobei $H(\tau)$ und $S(\tau)$ die Größen der Hasen- und der Schafspopulation zum Zeitpunkt τ sind, r_H und r_S sind für kleine Populationen die Differenz aus Geburten- und Sterberate, H_0 und S_0 sind Grenzpopulationen ohne Einfluss der anderen Spezies, und H_1 und S_1 sind typische Populationsgrößen, die jeweils auf die andere Spezies einen merkbaren (wegen der Konkurrenz natürlich negativen) Einfluss haben. Wir führen die dimensionslosen Populationen $y_1 = H/H_0$, $y_2 = S/S_0$, und die dimensionslose Zeit $t = \tau r_H$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1(1 - y_1 - k_1 y_2), \\ \dot{y}_2 &= r y_2(1 - y_2 - k_2 y_1), \end{aligned}$$

mit den dimensionslosen Parametern $r = r_S/r_H$, $k_1 = S_0/S_1$ und $k_2 = H_0/H_1$. Es gibt offensichtlich immer die stationären Punkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Darüber hinaus erhält man durch Nullsetzen der beiden Klammern den vierten stationären Punkt

$$\left(\frac{1-k_1}{1-k_1k_2}, \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\right). \tag{2}$$

Dieser ist allerdings nur dann relevant, d.h. im ersten Quadranten der y-Ebene, wenn entweder $k_1, k_2 < 1$ oder $k_1, k_2 > 1$ gilt.

Linearisierung zeigt, dass $(0,0)$ immer instabil ist. Die beiden Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ sind für $k_1, k_2 < 1$ Sattelpunkte und für $k_1, k_2 > 1$ stabile Knoten. Der vierte stationäre Punkt (2) ist umgekehrt für $k_1, k_2 < 1$ ein stabiler Knoten und für $k_1, k_2 > 1$ ein Sattelpunkt. Für $k_1 = 1$ (bzw. $k_2 = 1$) fallen (2) und $(0,1)$ (bzw. $(1,0)$) zusammen und tauschen in einer transkritischen Verzweigung ihrer Stabilität aus.

Im Fall schwacher Interaktion zwischen Hasen und Schafen, d.h. $k_1, k_2 < 1$, konvergieren alle Lösungen mit Anfangsbedingungen im Inneren des ersten Quadranten gegen (2). Es kommt also zu einer Koexistenz von Hasen und Schafen.

Bei starker gegenseitiger Beeinflussung, d.h. $k_1, k_2 > 1$, teilt die stabile Mannigfaltigkeit des Sattelpunktes (2) den ersten Quadranten in zwei Teile. Diese sind die Einzugsbereiche der beiden stabilen Knoten $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Je nach Anfangsbedingung setzt sich also eine der beiden Spezies durch und die andere stirbt aus.