3 Elastizitätstheorie

Für ein elastisches Medium nimmt man einen spannungsfreien Referenzzustand an, der in Eulerkoordinaten durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ gegeben ist. Abweichungen werden beschrieben durch die *Verschiebung*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\,. \tag{1}$$

Um ein Maß für die Deformation des elastischen Körpers zu erhalten, gehen wir folgendermaßen vor: Wir betrachten zwei kleine Richtungsvektoren $\mathbf{\Delta A}$ und $\mathbf{\Delta A'}$ im unverformten Zustand und ihre Bilder $\mathbf{\Delta x}$ und $\mathbf{\Delta x'}$ nach der Verformung. Differentiation von (1) gibt

$$\Delta A_i \approx \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \Delta x_j\,, \quad \Delta A'_i \approx \left(\delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \Delta x'_j\,.$$

Als Maß für die lokale Deformation berechnen wir die Änderung im Skalarprodukt zwischen den beiden Richtungsvektoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta x} \cdot \mathbf{\Delta x'} - \mathbf{\Delta A} \cdot \mathbf{\Delta A'} &= \Delta x_i \Delta x'_i - \Delta A_i \Delta A'_i \\
&\approx \Delta x_i \Delta x'_i - \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \Delta x_j \Delta x'_k \\
&= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \Delta x_j \Delta x'_k\,.
\end{aligned}$$

Das motiviert die Definition des symmetrischen *Dehnungstensors*

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\,.$$

Wir werden im Folgenden eine Theorie für *kleine Verschiebungen* (und deren Ableitungen) herleiten. Als erste diesbezügliche Maßnahme vernachlässigen wir den quadratischen Term im Dehnungstensor und verwenden von nun an die Definition

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{tr})\,.$$

Dank seiner Symmetrie kann ε diagonalisiert werden. Die (orthogonalen) Eigenvektoren nennt man die *Hauptdehnungsachsen*.

Als weitere Näherung für kleine Verschiebungen ersetzen wir die Materialableitung durch die partielle Ableitung nach der Zeit. Die Beschleunigung ist dann die zweite Ableitung der Verschiebung nach der Zeit und die Impulsgleichung erhält die Form

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \,, \tag{2}$$

mit der Massendichte ρ, der spezifischen Kraft $\mathbf{f}$ und dem Spannungstensor $\mathbf{T}$ wie im 1. Kapitel. Eine weitere für kleine Verschiebungen gültige Näherung betrifft die Dichte. Sie wird als zeitunabhängig und gegeben angenommen: $\rho(x,t) = \rho(x)$.

Das Grundpostulat der Elastizitätstheorie ist, dass Spannungskräfte durch die Dehnung verursacht werden. Das einfachste Modell ist ein linearer Zusammenhang zwischen Dehnungstensor und Spannungstensor, d.h.

$$T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \,,$$

mit einem Tensor vierter Stufe $\mathbf{C}$. Wie in der Strömungsmechanik werden wir die vereinfachende Annahme der Rotationsinvarianz des elastischen Mediums machen. Es ist allerdings festzuhalten, dass es viele relevante Beispiele elastischer Festkörper gibt, die dieser Annahme nicht genügen, wie Kristalle oder geschichtete Materialien (Holz). Mathematisch bedeutet die Rotationsinvarianz, dass nach einer Rotation im $\mathbb{R}^3$ der Zusammenhang zwischen den entsprechend transformierten Dehnungs- und Spannungstensoren durch denselben Tensor $\mathbf{C}$ beschrieben wird. Hat $\mathbf{C}$ diese Eigenschaft, dann wird es als *isotrop* bezeichnet. Ähnlich wie in Kapitel 2.1 beweist man das folgende Grundresultat der Tensorrechnung.

Satz: Sei $\mathbf{C}$ ein isotroper Tensor vierter Stufe im $\mathbb{R}^3$. Dann gibt es drei Konstante $\lambda, \mu, \kappa \in \mathbb{R}$, sodass

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \kappa(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \,.$$

Für den Zusammenhang zwischen Dehnungs- und Spannungstensor erhalten wir damit

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) + \kappa(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}) \,.$$

Der letzte Term verschwindet allerdings wegen der Symmetrie des Dehnungstensors. Damit bleibt

$$\mathbf{T} = \lambda \, \mathrm{tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu\varepsilon \,, \tag{3}$$

bzw. in Abhängigkeit der Verschiebung

$$\mathbf{T} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{tr}),$$

mit den *Lamé-Konstanten* λ und μ. Diese Gleichung wird *verallgemeinertes Hookesches Gesetz* genannt. Setzt man sie in die Impulsgleichung (2) ein, so erhält man ein geschlossenes System von Differentialgleichungen für die Verschiebungen, die *Naviergleichungen*

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho\mathbf{f}.$$

Die Elastizitätskonstanten

Bildet man die Spur (tr) in der Gleichung (3), so ergibt sich eine Gleichung, aus der man $\mathrm{tr}(\varepsilon)$ aus $\mathrm{tr}(\mathbf{T})$ berechnen kann, und damit den Zusammenhang zwischen ε und $\mathbf{T}$ invertieren kann:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{T})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathbf{I}.$$

Als Anwendung berechnen wir die Dehnungen, die einer reinen Zugspannung in x-Richtung entsprechen. Diese wird durch den Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Der Dehnungstensor ist diagonal mit den Diagonalelementen

$$\varepsilon_{11} = \frac{N(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda N}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Experimente zeigen eine Dehnung in x-Richtung und eine Kontraktion in die orthogonalen y- und z-Richtungen, d.h. der *Young-Modul* bzw. das *Poisson-Verhältnis*

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{bzw.} \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

sind positive Konstante. In Abhängigkeit dieser *technischen* Elastizitätskonstanten lässt sich das Hookesche Gesetz schreiben als

$$E\varepsilon = (1 + \nu)\mathbf{T} - \nu\,\mathrm{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I}.$$

Ein zweites Gedankenexperiment, eine isotrope Kompression, wird durch den Spannungstensor $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ mit einem skalaren Druck p repräsentiert. Es ergibt sich für den Dehnungstensor $E\varepsilon = -(1-2\nu)p\mathbf{I}$. Die natürliche Forderung, dass Kompression zu Kontraktion (und nicht zu Expansion) führt, liefert die zusätzliche Ungleichung $\nu < \frac{1}{2}$. Daraus und aus der Positivität von E und ν folgt die Positivität der Lamé-Konstanten:

$$\lambda,\, \mu > 0$$

Energiebilanz

Die Naviergleichungen bilden ein geschlossenes System. Die Energiegleichung ist daher zur Berechnung der Verschiebungen nicht notwendig. Trotzdem ist es von Interesse, die Energiebilanz zu betrachten. Entsprechend dem ersten Kapitel definieren wir die im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ enthaltene kinetische Energie durch

$$E_{kin}(t) = \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{x})}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x}\,,$$

und berechnen ihre zeitliche Änderung für eine Lösung $\mathbf{u}$ der Naviergleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{kin}}{dt} &= \int_\Omega \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} d\mathbf{x} = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(\rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} f_i \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial t} T_{ij} n_j ds - \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} T_{ij} \, d\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung haben wir partielle Integration verwendet. Da $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ der Spannungsvektor, d.h. die Spannungskraft pro Oberflächeneinheit ist, können die ersten beiden Terme auf der rechten Seite als die pro Zeiteinheit durch die Volumskräfte und durch die Spannungskräfte verrichtete Arbeit interpretiert werden. Im letzten Term verwenden wir die Darstellung $\mathbf{T} = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon)\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} \left(\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \delta_{\mathrm{ij}} + 2\mu \varepsilon_{\mathrm{ij}} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \left[\lambda \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \operatorname{tr}(\varepsilon) + \mu \left(\frac{\partial^2 \mathrm{u_i}}{\partial \mathrm{x_j} \partial \mathrm{t}} + \frac{\partial^2 \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x_i} \partial \mathrm{t}} \right) \varepsilon_{\mathrm{ij}} \right] d\mathbf{x} \\ &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}(\varepsilon))^2 + \mu\, \varepsilon : \varepsilon \right) d\mathbf{x}\,. \end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir verwendet, dass wegen der Symmetrie von ε

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial t}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial t}\right)\varepsilon_{ij}$$

gilt. Die *Dehnungsenergie*

$$E_\varepsilon = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}(\varepsilon))^2 + \mu\, \varepsilon : \varepsilon\right) d\mathbf{x}$$

entspricht der inneren Energie aus dem ersten Kapitel. Fassen wir unsere Resultate zusammen, so ergibt sich die Energiebilanz

$$\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_\varepsilon) = \int_\Omega \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{f}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}\, ds\,.$$

Für zeitunabhängige Volums- und Spannungskräfte (d.h. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x})$) wird die durch $E = E_{kin} + E_{pot}$ definierte Gesamtenergie erhalten, wenn wir die *potentielle Energie* definieren durch

$$E_{pot} = E_\varepsilon - \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}\, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\, ds\,.$$

Elastische Wellen

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das dynamische Verhalten elastischer Medien unter anderem durch *Wellenausbreitungsphänomene* charakterisiert werden kann. Dazu betrachten wir ein homogenes elastisches Medium (ρ =const) ohne Volumskräfte ($\mathbf{f} = 0$):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\,.$$

Bezeichnen wir die Divergenz der Verschiebung mit $D = \nabla \cdot \mathbf{u}$ und wenden die Divergenz auf die Naviergleichungen an, so ergibt sich für D die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = C_D^2 \Delta D \qquad \text{mit } C_D = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\,.$$

Andererseits ergibt sich auch durch Anwendung des Rotors auf die Naviergleichungen eine Wellengleichung für die Komponenten des Rotors $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = C_T^2 \Delta \omega \qquad \text{mit } C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,,$$

allerdings mit einer anderen Wellengeschwindigkeit.