2.KAPITEL Strömungsmechanik

2.1. Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Strömungsmechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Fluiden (d.h. Flüssigkeiten und Gasen). Fluide sind ausgezeichnet durch die Art der in ihnen wirkenden Spannungskräfte. Zerlegt man den Spannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ in eine normale Komponente (*Normalspannung*, parallel zu $\mathbf{n}$) und in tangentiale Komponenten (*Scherspannungen*), dann gilt für ein bewegungsloses Fluid, daß die Scherspannungen verschwinden. Der Spannungsvektor ist also gegeben durch

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\mathbf{n}\,,$$

wobei die skalare Größe $p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ als *Druck* bezeichnet wird. Verwendet man die Darstellung des Spannungsvektors mit Hilfe des Spannungstensors $\mathbf{T}$, dann folgt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\mathbf{n}\,. \tag{2.1}$$

Setzen wir in dieser Gleichung für $\mathbf{n}$ den i-ten kanonischen Basisvektor $\mathbf{e}_i$ ein und bilden wir das Skalarprodukt mit $\mathbf{e}_j$, so erhalten wir

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i)\delta_{ij}\,, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

mit dem Kronecker-Symbol δ_{ij}. Damit wird die j-te Komponente von (2.1) zu

$$-n_j p(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_j) = -n_j p(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Druck unabhängig von $\mathbf{n}$ ist, und daher für den Spannungstensor in einem ruhenden Fluid

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \tag{2.2}$$

gilt ($\mathbf{I}$ ist die 3×3-Einheitsmatrix).

Beispiel 2.1: Um unser Vertrauen in (2.2) zu stärken, überprüfen wir, ob es zusammen mit der Impulsgleichung zu den bekannten Gesetzen der Hydrostatik führt. Wir setzen in der Impulsgleichung (1.31) $\mathbf{v} = 0$ und berücksichtigen den Einfluß der Gravitation, indem wir für die Volumskraft $\mathbf{f} = -g\mathbf{e}_3$ setzen, wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist und wir annehmen, daß $\mathbf{e}_3$ senkrecht nach oben zeigt. Die Impulsgleichung hat dann die Gestalt

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{e}_3\,,$$

also, mit $\mathbf{x} = (x, y, z)$,

$$p_x = p_y = 0\,, \qquad p_z = -\rho g\,.$$

Der Druck ist nur von der Höhe abhängig, woraus folgt, daß dasselbe auch für die Dichte ρ gilt. Im Fall konstanter Dichte wächst der Druck linear mit der Tiefe:

$$p = p_a - \rho g z\,,$$

wobei $z = 0$ die Oberfläche einer Flüssigkeit und p_a der Druck in der darüberliegenden Atmosphäre ist.

Eine weitere Annahme ist, daß in einem bewegten Fluid zusätzlich zum Druck Reibungskräfte (*Viskosität*) zur Spannung beitragen:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

Die Matrix $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ wird als *viskoser Spannungstensor* bezeichnet. Da bei einer Bewegung mit ortsunabhängiger Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ keine Reibungskräfte zu erwarten sind, nimmt man an, daß $\boldsymbol{\tau}$ von Ortsableitungen der Geschwindigkeit abhängig ist. Um das Modell möglichst einfach zu halten, wird weiter angenommen, daß nur die Ableitungen erster Ordnung eingehen und daß die Abhängigkeit linear ist. Es gilt daher

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\,, \qquad i,j = 1,2,3\,. \tag{2.3}$$

Aus der Symmetrie des Spannungstensors folgt die Bedingung

$$C_{ijkl} = C_{jikl}\,, \qquad i,j,k,l = 1,2,3$$

für die Koeffizienten des Tensors vierter Stufe $\mathbf{C}$. Unter der Annahme der Homogenität des Materials sind diese Koeffizienten konstant. Die Annahme, daß nur bei einer Relativbewegung verschiedener Teile des Fluids Reibungskräfte auftreten, ist in (2.3) noch nicht vollständig berücksichtigt. Rotiert nämlich das Fluid wie ein starrer Körper, dann findet auch keine Relativbewegung statt, obwohl sich die Geschwindigkeit mit dem Ort ändert. Eine Rotation um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω ist gegeben durch

$$\mathbf{v} = \omega(-y, x, 0)\,.$$

Die Forderung, daß der viskose Spannungstensor für dieses $\mathbf{v}$ verschwindet, führt auf die Gleichung

$$C_{ij21} = C_{ij12}\,, \qquad i,j = 1,2,3\,.$$

Analog zeigt man mit Rotationen um die x- bzw. die y-Achse

$$C_{ij32} = C_{ij23}\,, \quad C_{ij31} = C_{ij13}\,, \qquad i,j = 1,2,3\,.$$

Damit vereinfacht sich (2.3) zu

$$\begin{aligned} \tau_{ij} =& C_{ij11} u_x + C_{ij22} v_y + C_{ij33} w_z + C_{ij12}(u_y + v_x) + C_{ij13}(u_z + w_x) \\ &+ C_{ij23}(v_z + w_y)\,, \qquad i,j = 1,2,3\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bezeichnet man den symmetrischen Anteil

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{tr})$$

der Matrix $\nabla \mathbf{v}$ als *Deformationstensor*, dann ergibt sich die Aussage, daß der viskose Spannungstensor nur vom Deformationstensor abhängig ist.

Die Darstellung (2.4) kann weiter vereinfacht werden, wenn man annimmt, daß das betrachtete Fluid *isotrop* ist. Das bedeutet, daß es keine ausgezeichneten Richtungen gibt. Für das mathematische Modell folgt daraus, daß es invariant unter Drehungen des Raumes sein muß. Drehungen werden durch Matrizen $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{tr}$ beschrieben. Für die neuen Ortskoordinaten $\mathbf{x}'$ nach der Drehung gilt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}\,.$$

Genauso werden alle Vektoren, wie z.B. ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ oder die durch Reibung bedingte Kraft $\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ auf ein Flächenstück mit Normalvektor $\mathbf{n}$, transformiert:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{S}\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{f}' = \mathbf{S}\mathbf{f} \tag{2.5}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} f_i' &= \sum_j S_{ij} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})_j = \sum_{j,k} S_{ij} n_k \tau_{kj} = \sum_{j,k,l} S_{ij} S_{lk} n_l' \tau_{kj} \\ &= \sum_l n_l' \sum_{j,k} S_{lk} \tau_{kj} S_{ji}^{tr} = \big(\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{S}\boldsymbol{\tau}\mathbf{S}^{tr})\big)_i\,, \qquad i = 1,2,3\,, \end{aligned}$$

woraus wegen $\mathbf{f}' = \mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\tau}'$ und der Beliebigkeit von $\mathbf{n}'$

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{S}\boldsymbol{\tau}\mathbf{S}^{tr} \tag{2.6}$$

folgt. Komponentenweise geschrieben, gilt

$$\tau'_{ij} = \sum_{k,l} S_{ik}\tau_{kl}S_{jl} = \sum_{k,l,m,n} S_{ik}S_{jl}C_{klmn}\frac{\partial v_m}{\partial x_n}\,, \qquad i,j = 1,2,3\,. \tag{2.7}$$

Für die ersten Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten gilt

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} = \sum_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \sum_k S_{jk}\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} = \sum_{k,l} S_{jk}S_{il}\frac{\partial v_l}{\partial x_k} = \sum_{k,l} S_{il}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}S^{tr}_{kj}\,, \qquad i,j = 1,2,3\,,$$

und daher

$$\nabla'\mathbf{v}' = \mathbf{S}\nabla\mathbf{v}\mathbf{S}^{tr}\,, \tag{2.8}$$

wobei ∇' der Gradient bezüglich $\mathbf{x}'$ ist. So wie in (2.5) ein Gesetz zur Transformation von Vektoren verwendet wurde, sind (2.6) und (2.8) Anwendungen der Transformationsregel für Tensoren zweiter Stufe. Unter der Annahme, daß nach der Drehung der Zusammenhang zwischen dem viskosen Spannungstensor und den Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten unverändert ist, kann $\boldsymbol{\tau}'$ mit Hilfe von (2.8) berechnet werden:

$$\tau'_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\frac{\partial v'_k}{\partial x'_l} = \sum_{k,l,m,n} S_{km}S_{ln}C_{ijkl}\frac{\partial v_m}{\partial x_n}\,, \qquad i,j = 1,2,3 \tag{2.9}$$

Da $\nabla\mathbf{v}$ beliebig gewählt werden kann, folgt aus einem Vergleich von (2.7) und (2.9)

$$\sum_{k,l} S_{ik}S_{jl}C_{klmn} = \sum_{k,l} S_{km}S_{ln}C_{ijkl}\,, \qquad i,j,m,n = 1,2,3\,. \tag{2.10}$$

Daß (2.10) für alle orthogonalen Matrizen S gelten soll, ist eine starke Forderung an den Tensor $\mathbf{C}$. Würde man in der rechten Seite von (2.10) C_{ijkl} durch C'_{ijkl} ersetzen, erhielte man die Transformationsregel für Tensoren vierter Stufe.

Gleichungen für die Komponenten von $\mathbf{C}$ werden durch spezielle Wahl von $\mathbf{S}$ in (2.10) hergeleitet. Ist z.B. $\mathbf{S}$ eine Diagonalmatrix, also

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} (-1)^{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k_3} \end{pmatrix}\,,$$

dann reduziert sich (2.10) auf

$$\left((-1)^{k_i+k_j+k_m+k_n} - 1\right)C_{ijmn} = 0\,, \qquad i,j,m,n = 1,2,3\,.$$

Durch geeignete Wahl von k_1, k_2 und k_3 zeigt man leicht, daß alle Komponenten von $\mathbf{C}$ verschwinden müssen, bis auf die Komponenten der Form C_{iijj}, $i,j = 1,2,3$, und

$$\begin{aligned} C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112}\,, \\ C_{1313} &= C_{1331} = C_{3131} = C_{3113}\,, \\ C_{2323} &= C_{2332} = C_{3232} = C_{3223}\,. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $\mathbf{C}$ maximal 12 verschiedene nicht verschwindende Komponenten hat.

Nun wählen wir

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und eine Reihe spezieller Quadrupel (i, j, m, n) in (2.10). Die folgende Tabelle enthält diese Quadrupel und die sich aus (2.10) ergebenden Gleichungen:

$(2,2,1,1)$	$C_{1111} = C_{2222}$
$(1,1,3,3)$	$C_{1111} = C_{3333}$
$(1,1,1,1)$	$C_{1122} = C_{3311}$
$(2,2,2,2)$	$C_{1122} = C_{2233}$
$(1,1,2,2)$	$C_{1133} = C_{3322}$
$(2,2,3,3)$	$C_{1133} = C_{2211}$
$(1,2,1,3)$	$C_{1221} = C_{3113}$
$(1,3,2,3)$	$C_{1331} = C_{3223}$

Schließlich folgt noch mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(i, j, m, n) = (1, 1, 1, 1)$ die Gleichung

$$C_{1122} = C_{2211}\,.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Komponenten von $\mathbf{C}$ höchstens drei verschiedene nicht verschwindende Werte annehmen, und zwar

$$\kappa = C_{iiii}\,,\ i = 1,2,3\,, \qquad \lambda = C_{iijj}\,,\ i \neq j\,, \qquad \mu = C_{ijji} = C_{ijij}\,,\ i \neq j\,.$$

Der viskose Spannungstensor ist daher gegeben durch

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + (\kappa - \lambda - 2\mu)\operatorname{diag}(\nabla\mathbf{v})\,,$$

wobei $\operatorname{diag}(\mathbf{A})$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen von $\mathbf{A}$ ist. Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite erfüllen die Gleichung (2.6) wegen

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}' &= \mathbf{I} = \mathbf{S}\mathbf{I}\mathbf{S}^{tr}\,,\\
\mathbf{D}' &= \frac{1}{2}\big(\nabla'\mathbf{v}' + (\nabla'\mathbf{v}')^{tr}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{S}\nabla\mathbf{v}\mathbf{S}^{tr} + (\mathbf{S}\nabla\mathbf{v}\mathbf{S}^{tr})^{tr}\big)\\
&= \frac{1}{2}\mathbf{S}\big(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{tr}\big)\mathbf{S}^{tr} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{tr}\,.
\end{aligned}$$

Da aber im allgemeinen

$$\operatorname{diag}(\nabla'\mathbf{v}') = \operatorname{diag}(\mathbf{S}\nabla\mathbf{v}\mathbf{S}^{tr}) \neq \mathbf{S}\operatorname{diag}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{S}^{tr}$$

gilt, folgt $\kappa - \lambda - 2\mu = 0$, und der viskose Spannungstensor ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}\,. \tag{2.11}$$

Zur Interpretation der Parameter λ und μ betrachten wir zwei einfache Strömungen. Eine *isotrope Expansion* wird beschrieben durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = c\mathbf{x}$ mit einer positiven Konstanten c. Für die Gesamtspannung ergibt sich in diesem Fall $\mathbf{T} = -\big(p - (3\lambda + 2\mu)c\big)\mathbf{I}$. Es kann also von einem effektiven Druck gesprochen werden, der durch Verminderung der thermodynamischen Druckes p um $(3\lambda+2\mu)c$ entsteht. Der Parameter

$$\mu_d = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

wird *Druckviskosität* genannt.

Außerdem betrachten wir eine einfache Scherströmung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (\kappa x_2, 0, 0)$ mit der konstanten Schergeschwindigkeit κ. Der Spannungsvektor ist in diesem Fall gegeben durch $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mu\kappa(n_2, n_1, 0)$. Das ist eine reine Scherkraft, und μ wird als *Scherviskosität* bezeichnet. In Abhängigkeit von Druckviskosität und Scherviskosität schreiben wir den viskosen Spannungstensor auch als

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}\right) + \mu_d(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}\,.$$

Ein Beispiel für eine konstitutive Relation, die aus dem mikroskopischen Verhalten hergeleitet werden kann, ist das Verschwinden der Druckviskosität in idealen Gasen.

Die Impulserhaltungsgleichungen (2.31) mit dem soeben berechneten Spannungstensor sind die *Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \nabla(\lambda\nabla\cdot\mathbf{v}) + \nabla\cdot(2\mu\mathbf{D})\,. \tag{2.12}$$

Eine andere Schreibweise für konstante λ und μ ist

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \nabla\big((\lambda+\mu)\nabla\cdot\mathbf{v}\big) + \mu\Delta\mathbf{v}\,, \tag{2.13}$$

in der die i-te Komponente des Vektors $\Delta\mathbf{v}$ gegeben ist durch

$$(\Delta\mathbf{v})_i = \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

Unter der Annahme, daß die Volumskraft $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ gegeben ist und für die Wärmeflußdichte das Newton-Fouriersche Abkühlungsgesetz $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$ gilt, sind die Navier-Stokes-Gleichungen, kombiniert mit der Kontinuitätsgleichung (2.30) und der Energiegleichung (2.33), 5 skalare Differentialgleichungen für die Unbekannten ρ, p, T, e und die 3 Komponenten von $\mathbf{v}$. Es fehlen also zwei Gleichungen, die das betrachtete Fluid näher bestimmen.

Eine für viele Fluide durch Experimente sehr gut abgesicherte Annahme ist, daß die spezifische innere Energie e nur von der Temparatur T abhängig ist. Insbesondere wird oft Konstanz der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $c_v = de/dT$ angenommen, d.h.

$$e = c_v T + \text{const}\,. \tag{2.14}$$

Eine weitere Annahme, die für typische Flüssigkeiten wie z.B. Wasser verwendet wird, ist die der Inkompressibilität:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Sehr oft ist sogar die stärkere Annahme $\rho = \text{const}$ gerechtfertigt. Man beachte, daß in diesem Fall die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{2.15}$$

und die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} \tag{2.16}$$

ein geschlossenes System für die Bestimmung von Druck und Geschwindigkeit darstellen.

Für typische Gase wie z.B. Luft wird statt der Inkompressibilitätsannahme das ideale Gasgesetz

$$p = \rho R T \tag{2.17}$$

mit der Gaskonstanten R verwendet.

Schließlich stellen wir noch die Frage nach geeigneten Zusatzbedingungen. Befindet sich das Fluid in einem Behälter mit zeitabhängigem Rand, dann müssen die Differentialgleichungen für $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ betrachtet werden, wobei das Gebiet $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ das Innere des Behälters zum Zeitpunkt t beschreibt. Nimmt man an, daß die Wände des Behälters undurchlässig sind, dann folgt die Randbedingung

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} \qquad \text{auf } \partial\Omega(t)\,, \tag{2.18}$$

wobei $\mathbf{n}$ der nach außen gerichtete Einheitsnormalvektor auf den Rand und $\mathbf{v}_w$ die Geschwindigkeit der Wand ist.

Die Kontinuitätsgleichung kann als lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Dichte ρ betrachtet werden. Die Charakteristikenmethode zeigt, daß auf $\partial\Omega(t)$ wegen (2.18) keine Randbedingungen für die Dichte vorgegeben werden müssen.

Zumindest im inkompressiblen Fall (2.16) ist es offensichtlich, daß die Navier-Stokes-Gleichungen ein System von parabolischen Gleichungen für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind. Die Randbedingungen (2.18) sind daher unzureichend, weil sie nur *eine* Geschwindigkeitskomponente auf dem Rand festlegen. Die Frage nach Randbedingungen für die Geschwindigkeit eines Fluids, das sich im Kontakt mit einer starren Wand befindet, ist äußerst schwierig. Trotzdem gibt es eine allgemein akzeptierte, einfache Antwort in Form der *Haftbedingung*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_w \qquad \text{auf } \partial\Omega(t)\,. \tag{2.19}$$

Diese Bedingung bedeutet, daß zwischen der starren Wand und dem angrenzenden Fluid keine Relativbewegung stattfindet. (2.19) ist eine Dirichletbedingung für die Komponenten von $\mathbf{v}$.

Die Energieerhaltungsgleichung kann bei Verwendung von (2.14) und dem Newton-Fourierschen Abkühlungsgesetz als parabolische Gleichung für die Temperatur T aufgefaßt werden. Man muß also auch für die Temperatur Randbedingungen auf $\partial\Omega(t)$ vorgeben. Alle für die Wärmeleitungsgleichung sinnvollen Arten von Randbedingungen sind hier denkbar.

Ein vollständig formuliertes mathematisches Problem erhält man bei zusätzlicher Angabe von Anfangsbedingungen, d.h. ρ, $\mathbf{v}$ und T müssen in $\Omega(0)$ vorgegeben werden.

2.2. Einige exakte Lösungen für inkompressible viskose Strömungen

Wir betrachten ein Fluid mit konstanter vorgegebener Dichte, d.h. die Gleichungen (2.15), (2.16) mit $\rho = \text{const}$.

Zunächst suchen wir eine stationäre Strömung zwischen zwei parallelen unendlichen Platten im Abstand d, von denen eine ruht und sich die andere mit konstanter Geschwindigkeit U bewegt.

Wir verwenden die Schreibweise $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und $\mathbf{v} = (u, v, w)$ für die Komponenten des Orts- und des Geschwindigkeitsvektors. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die y-Achse normal auf die Platten ist und die Bewegungsrichtung der bewegten Platte durch die positive x-Richtung gegeben ist. Wir vereinfachen das Problem, indem wir keine Volumskräfte berücksichtigen ($\mathbf{f} = 0$) und nach einer zweidimensionalen Strömung suchen, d.h. $w = 0$ und u, v und p sind unabhängig von z. Weiters scheint es plausibel, nach einer Lösung mit $v = 0$ zu suchen. Mit all diesen Annahmen werden die Gleichungen (2.15), (2.16) zu

$$\begin{aligned} u_x &= 0\,, \\ 0 &= -p_x + \mu u_{yy}\,, \\ 0 &= -p_y\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß u nur von y, und aus der dritten, daß p nur von x abhängt. Damit impliziert die zweite Gleichung

$$p_x = \mu u_{yy} = \text{const}\,.$$

Wir sind an einer Strömung interessiert, die nur durch die Relativbewegung der Platten und nicht durch einen Druckabfall getrieben wird. Daher wählen wir $p_x = 0$. Aus den Haftbedingungen

$$u(0) = 0\,, \qquad u(d) = U$$

folgt die Lösung

$$u = \frac{Uy}{d}\,, \qquad v = w = 0\,, \qquad p = \text{const}\,.$$

Das ist die schon oben beschriebene einfache Scherströmung. Sie wird auch als *ebene Couette-Strömung* bezeichnet. Eine andere exakte Lösung für eine ähnliche Situation ist die *Couette-Strömung* zwischen zwei rotierenden koaxialen Zylindern.

Wie oben berechnet, wirkt auf die ruhende Platte die Kraft $(\mu U/d, 0, 0)$. Zumindest im Prinzip könnte diese Formel verwendet werden, um die Viskosität μ mit Hilfe eines Experimentes zu bestimmen. Typische Werte der Viskosität sind

$$\mu = 10^{-2}\text{gcm}^{-1}\text{s}^{-1} \quad \text{für Wasser,} \qquad \mu = 2\times 10^{-4}\text{gcm}^{-1}\text{s}^{-1} \quad \text{für Luft.}$$

Als zweites Beispiel suchen wir eine Strömung zwischen zwei ruhenden parallelen Platten, die von einem Druckabfall getrieben wird. Wir treffen dieselben Annahmen wie oben und erhalten wieder die Gleichungen (2.20). Allerdings setzen wir nun

$$p_x = -C < 0\,,$$

wobei das kleiner Werden des Druckes in positive x-Richtung eine Strömung in diese Richtung erwarten läßt. Aus der Gleichung $C + \mu u_{yy} = 0$ und den Haftbedingungen $u(0) = u(d) = 0$ folgt die Lösung

$$u = \frac{C}{2\mu} y(d-y)\,, \qquad v = w = 0\,, \qquad p = -Cx + \text{const}\,.$$

Dieses parabolische Geschwindigkeitsprofil wird als *ebene Poiseuille-Strömung* bezeichnet. Der Name *Poiseuille-Strömung* wird für eine exakte Lösung verwendet, die die stationäre Strömung durch ein zylindrisches Rohr beschreibt, welche von einem axialen Druckgradienten getrieben wird.

Mit Hilfe dieser Lösungen kann die Viskosität aus Messungen der transportierten Masse des Fluids bestimmt werden. Für die ebene Poiseuille-Strömung ist die transportierte Masse pro Zeiteinheit und pro Längeneinheit in z-Richtung gegeben durch

$$\int_0^d \rho u\, dy = \frac{\rho C d^3}{12\mu}\,.$$

Als letztes Beispiel beschäftigen wir uns mit einer zeitabhängigen Strömung. Wir nehmen an, der Halbraum $y > 0$ wäre gefüllt mit einem Fluid, das für $t \leq 0$ ruht. Weiters sei angenommen, daß die das Fluid begrenzende unendliche Platte sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in ihrer Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit U zu bewegen beginnt. Es ist anzunehmen, daß auch das Fluid durch Reibungseffekte in Bewegung gesetzt wird. Wie geschieht das?

Sei die Bewegungsrichtung der Platte die x-Richtung. Dann suchen wir eine Lösung mit $v = w = 0$ und $u = u(y,t)$. Aus den Navier-Stokes-Gleichungen (2.16) folgt dann

$$\rho u_t = -p_x + \mu u_{yy}\,, \qquad p_y = p_z = 0\,.$$

Daraus folgt wie oben, daß p_x konstant ist. Wir sind nicht an den Effekten eines Druckgefälles interessiert und setzen $p_x = 0$. Wir haben daher die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \nu u_{yy} \tag{2.21}$$

mit der *kinematischen Viskosität* $\nu = \mu/\rho$ zu betrachten. Als Anfangsbedingung ergibt sich

$$u(y,0) = 0 \tag{2.22}$$

und als Randbedingung die Haftbedingung

$$u(0,t) = U\,. \tag{2.23}$$

Die dimensionslose Geschwindigkeit $u^* = u/U$ ist Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned} &u_t^* = \nu u_{yy}^*\,, \\ &u^*(y,0) = 0\,, \qquad u^*(0,t) = 1\,. \end{aligned}$$

Da u^* dimensionslos ist, kann es nur von dimensionslosen Kombinationen von ν, y und t abhängen. Die Einheit der kinematischen Viskosität ν ist $\mathrm{cm^2 s^{-1}}$, woraus folgt, daß u^* als Funktion der dimensionslosen Variablen

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

geschrieben werden kann: $u^* = F(\eta)$. Für F folgt aus der Wärmeleitungsgleichung

$$F'' + 2\eta F' = 0\,.$$

Aus den Anfangs- und Randbedingungen werden

$$F(0) = 1\,, \qquad F(\infty) = 0\,.$$

Die Lösung dieses Randwertproblems ist gegeben durch die komplementäre Fehlerfunktion

$$F(\eta) = \mathrm{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-s^2}\, ds\,.$$

Die Geschwindigkeit des Fluids ist also

$$u = U \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\,.$$

Diese Lösung bedeutet, daß an einem festen Abstand von der Platte die Geschwindigkeit des Fluids für $t \to \infty$ gegen die Geschwindigkeit der Platte konvergiert. Der Abstand von der Platte, an dem die Geschwindigkeit des Fluids einen bestimmten Prozentsatz der Geschwindigkeit der Platte erreicht, ist proportional zu $\sqrt{\nu t}$.

2.3. Reibungsfreie ideale Gase—Entropie—Rotation

Um die relative Größe verschiedener Terme in den Navier-Stokes-Gleichungen abschätzen zu können, skalieren wir die Impulsgleichungen (2.13) für ein ideales Gas, d.h. mit $\mu_d = 0$:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} \tag{2.24}$$

Der Einfachheit halber wurden Volumskräfte vernachlässigt und Konstanz der Viskosität angenommen. Wir wählen die Referenzgeschwindigkeit U_0, -länge L_0 und -dichte ρ_0. Die Zeit skalieren wir mit L_0/U_0 und den Druck mit $\rho_0 U_0^2$. Verwenden wir in der skalierten Gleichung dieselben Variablennamen wie in (2.24), so ergibt sich

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{3\mathrm{Re}}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v}\,, \tag{2.25}$$

mit der dimensionslosen *Reynoldszahl*

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu}\,.$$

Eine typische Dichte für das fast ideale Gas Luft ist $\rho_0 = 10^{-3}\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Betrachtet man als Beispiel die Luftströmung um einen gehenden Menschen, dann sind $U_0 = 100\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ und $L_0 = 100\,\mathrm{cm}$ sinnvolle Referenzgrößen. Mit dem Wert $\mu = 2 \times 10^{-4}\mathrm{g\,cm^{-1}s^{-1}}$ für die Viskosität der Luft ergibt sich $\mathrm{Re} = 5 \times 10^4$.

Nun betrachten wir die Energiegleichung (2.33) mit den Annahmen $e = c_v T + \mathrm{const}$ und $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + c_v T\right) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v})$$

Wir wählen die Referenztemperatur U_0^2/c_v und skalieren sonst wie oben. Die dimensionslose Version der obigen Gleichung ist dann

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + T\right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{RePr}}\nabla T + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\right) \tag{2.26}$$

mit dem Spannungstensor

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\mathbf{D} - \frac{2}{3\mathrm{Re}}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}$$

und der *Prandtlzahl*

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_v}{\kappa}$$

als zusätzlichen dimensionslosen Parameter. Die Prandtlzahl gibt das Verhältnis zwischen der Stärke der Reibungseffekte und der Wärmeleitung an. Für Gase ist die Prandtlzahl gewöhnlich von der Größenordnung 1. Ein typischer Wert für Luft ist $\mathrm{Pr} = 0,72$.

Unsere Überlegungen legen den Schluß nahe, daß in vielen Fällen die Effekte von Reibung und Wärmeleitung vernachlässigt werden können. Wir werden uns daher im Folgenden mit den *Eulergleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0\,, \\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p &= 0\,, \\ \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e\right) + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

mit den konstitutiven Relationen $e = c_v T + \mathrm{const}$ und $p = \rho R T$ für ideale Gase beschäftigen.

Als nächsten Schritt wollen wir einige Überlegungen aus der Thermodynamik verwenden. Wir betrachten einen Behälter mit beweglichen Wänden, gefüllt mit einem räumlich homogenen idealen Gas. Der Zustand des Gases wird dann durch Angabe von zwei der drei *Zustandsvariablen* Druck P, Volumen V und Temperatur T beschrieben, die durch die Gleichung $P = RT/V$ zusammenhängen. Die in dem Gas enthaltene Energie E ist bestimmt durch $E = C_V T + \mathrm{const}$.

Der *erste Hauptsatz der Thermodynamik* sagt aus, daß die Differenz der Energien zweier Zustände gegeben ist durch die Differenz aus der bei der Zustandsänderung von außen zugeführten Wärmeenergie und der von dem Gas bei der Zustandsänderung geleisteten Arbeit. Eine differentielle Form dieser Aussage ist

$$dE = dQ - dW\,.$$

Es ist leicht einzusehen, daß für das Differential der Arbeit die Formel $dW = P\,dV$ gilt. Die obige Gleichung kann daher auch geschrieben werden als

$$dQ = C_V\,dT + P\,dV\,. \tag{2.28}$$

Diese Form erklärt auch, warum die Konstante C_V als *spezifische Wärme bei konstantem Volumen* bezeichnet wird. Weiters gilt wegen des idealen Gasgesetzes $P\,dV = R\,dT - V\,dP$ und daher

$$dQ = C_P\,dT - V\,dP$$

mit der *spezifischen Wärme bei konstantem Druck* $C_P = C_V + R$.

Division von (2.28) durch T ergibt

$$\frac{dQ}{T} = C_V\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}\,.$$

Man beachte, daß der Ausdruck auf der rechten Seite ein totales Differential ist. Diese Darstellung motiviert die Definition der *Entropie*

$$S = C_V \ln T + R \ln V + \text{const}\,,$$

die konstant ist für ein System, dem keine Wärme zugeführt wird.

Nach diesem Exkurs in die Thermodynamik definieren wir die Entropie für ein nicht homogenes Gas lokal durch

$$s = c_v \ln T - R \ln \rho + \text{const}\,.$$

Diese Relation kann auch in der Form

$$p = k\rho^\gamma e^{s/c_v} \tag{2.29}$$

mit einer Konstanten k und dem Verhältnis der spezifischen Wärmen $\gamma = (c_v + R)/c_v$ geschrieben werden. Mit Hilfe der Eulergleichungen kann man zeigen, daß die Materialableitung von s verschwindet:

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

Das bedeutet, daß die Entropie eines sich mit der Strömung bewegenden infinitesimalen Volumselementes konstant ist. Diese Tatsache wird im Folgenden von Bedeutung sein.

Wir bezeichnen das Vektorfeld

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

als *Rotation* des Geschwindigkeitsfeldes. Diese Bezeichnung wollen wir im Folgenden motivieren. Wir betrachten ein zum Zeitpunkt $t = t_1$ in der x-y-Ebene liegendes Rechteck $ABCD$, dessen Eckpunkte A, B und C die Koordinaten $(0,0)$, $(\Delta x, 0)$ bzw. $(0, \Delta y)$ haben (siehe Abb. 2.1). Wir nehmen an, die Eckpunkte des Rechtecks bewegt sich bis zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ mit der Strömung, wobei Δx, Δy und Δt klein sind. Die Projektionen der Punkte zum Zeitpunkt t_2 in die x-y-Ebene bezeichnen wir mit A', B' und C'.

Abb. 2.1: Drehung eines Rechtecks um die z-Achse

Sie haben näherungsweise die Koordinaten $(\Delta t\, v_1(0,0), \Delta t\, v_2(0,0))$, $(\Delta x + \Delta t\, v_1(\Delta x, 0), \Delta t\, v_2(\Delta x, 0))$ bzw. $(\Delta t\, v_1(0, \Delta y), \Delta y + \Delta t\, v_2(0, \Delta y))$.

Die Winkelgeschwindigkeit der Seite AB des Rechtecks um die z-Achse ist näherungsweise gegeben durch

$$\frac{\alpha}{\Delta t} \approx \frac{v_2(\Delta x, 0) - v_2(0,0)}{\Delta x} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x}\,.$$

Analog gilt für die Winkelgeschwindigkeit der Seite AC um die z-Achse

$$\frac{\beta}{\Delta t} \approx -\frac{\partial v_1}{\partial y}\,.$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse der beiden Seiten eines infinitesimalen Rechtecks ist also die Hälfte der z-Komponente der Rotation $\boldsymbol{\omega}$. Analog kann die x- bzw. die y-Komponente von $\boldsymbol{\omega}$ als Maß für die Winkelgeschwindigkeit um die x- bzw. y-Achse interpretiert werden.

Für das Weitere benötigen wir eine Vektoridentität, die durch einfaches Nachrechnen verifiziert werden kann. Für den zweiten Term in der Materialableitung der Geschwindigkeit

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

gilt die Formel

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}\,. \tag{2.30}$$

Damit können wir die Impulsgleichung in (2.27) in der Form

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \tag{2.31}$$

schreiben. Aus der Formel (2.29) für die Darstellung des Druckes mit Hilfe der Entropie folgt

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{p}{c_v} \left(1 - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)\rho} \right) \nabla s\,. \tag{2.32}$$

Aus diesen Formeln folgt eine wichtige Relation für stationäre Strömungen. Klarerweise gilt $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$. Außerdem gilt im stationären Fall $\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0$. Verwenden wir daher (2.32) in der stationären Version von (2.31) und bilden das Skalarprodukt dieser Gleichung mit $\mathbf{v}$, so erhalten wir

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} \right) = 0\,.$$

Daraus folgt, daß entlang von Teilchenbahnen die *Bernoulli-Gleichung*

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \mathrm{const} \tag{2.33}$$

gilt.

2.4. Kompressionswellen in isentropen Gasen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reibungsfreien Gasen, in denen die Entropie einen konstanten Wert annimmt. Aus (2.29) folgt daher $p = K\rho^\gamma$ bzw.—allgemeiner—$p = p(\rho)$. Diese Relation ersetzt die Energiegleichung, und wir betrachten daher nur die ersten beiden Gleichungen in (2.27):

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} &= 0\,, \\ \rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + p'(\rho)\nabla\rho &= 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Diese Gleichungen für ein reibungsfreies isentropes Gas werden oft als *p-System* bezeichnet. Die Ableitung des Druckes nach der Dichte hat die Dimension des Quadrates einer Geschwindigkeit. Wir führen daher die Bezeichnung

$$c^2 = p'(\rho)$$

ein.

Wir wollen uns zunächst mit Wellen mit kleiner Amplitude beschäftigen, d.h. wir betrachten kleine Störungen einer homogenen bewegungslosen Atmosphäre. Hat die ungestörte Atmosphäre die Dichte ρ_0, so machen wir den Ansatz

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \varepsilon\sigma$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Weiters skalieren wir (2.34) durch Wahl der Referenzgrößen U_0, L_0 und t_0 für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, Länge $\mathbf{x}$ und Zeit t. Die Geschwindigkeit c skalieren wir mit ihrem Wert $c_0 = p'(\rho_0)$ in der ungestörten Atmosphäre. Balanciert man im skalierten Problem die führenden Terme, so ergeben sich die Forderungen

$$\frac{U_0 t_0}{\varepsilon L_0} = 1\,, \qquad \frac{\varepsilon t_0}{U_0 L_0} c_0^2 = 1$$

für die Wahl von U_0, L_0 und t_0. Daraus folgt

$$\frac{L_0}{t_0} = c_0\,, \qquad U_0 = \varepsilon c_0\,. \tag{2.35}$$

Mit diesen Annahmen hat das skalierte Problem die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon\mathbf{v}\cdot\nabla\sigma + (1+\varepsilon\sigma)\nabla\cdot\mathbf{v} &= 0\,, \\ (1+\varepsilon\sigma)\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \varepsilon(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) + c^2\nabla\sigma &= 0\,. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ führt auf die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \Delta\sigma$$

für die Störung in der Dichte. Kehrt man zu dimensionsbehafteter Länge bzw. Zeit zurück, dann erhält sie die Form

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = c_0^2\Delta\sigma\,. \tag{2.36}$$

In diesem Zusammenhang ist die Wellengleichung die Grundgleichung der Akustik. Daher erklärt sich auch die Bezeichnung *Schallgeschwindigkeit* für die Geschwindigkeit $c = \sqrt{p'(\rho)}$, mit der sich kleine Störungen in einer Atmosphäre mit der Dichte ρ ausbreiten.

Explizite Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung kann man mit Symmetrieannahmen berechnen. Für Lösungen mit einer Kugelsymmetrie gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = c_0^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)\,,$$

die mit der Substitution $\sigma = \beta/r$ auf die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2}$$

transformiert werden kann. Aus der allgemeinen Lösung dieser Gleichung erhält man alle kugelsymmetrischen Lösungen von (2.36):

$$\sigma = \frac{1}{r}\big(f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)\big)$$

Sie bestehen aus wandernden Wellen, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortbewegen und deren Amplitude proportional zum Kehrwert der Entfernung ist.

Der Störungsparameter ε ist wegen (2.35) der Quotient aus der charakteristischen Strömungsgeschwindigkeit und der Schallgeschwindigkeit. Dieser Quotient $M = U/c_0$ wird als *Machzahl* bezeichnet. Die Gleichung (2.36) kann daher als Näherungsproblem für kleine Machzahl angesehen werden.

Die wesentlichste Eigenschaft der Näherungsgleichung (2.36) ist ihre Linearität. Im Folgenden sollen nichtlineare Effekte anhand spezieller Lösungen des p-Systems (2.34) demonstriert werden. Wir betrachten das eindimensionale p-System

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} &= 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

und suchen nach Lösungen in der Form *einfacher Wellen*

$$\rho = \rho(\alpha)\,, \quad u = u(\alpha) \qquad \text{mit } \alpha = \alpha(x,t)\,.$$

Mit diesem Ansatz erhalten die Gleichungen (2.37) die Form

$$\begin{aligned} \rho'(\alpha)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \rho u'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0\,, \\ u'(\alpha)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \frac{c^2}{\rho}\rho'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 0\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von ρ' und u' bzw. von $\partial\alpha/\partial x$ und $\partial\alpha/\partial t$ aufgefaßt werden. Für die Existenz nichttrivialer Lösungen sind die Bedingungen

$$\frac{c^2}{\rho^2}(\rho')^2 = (u')^2\,, \qquad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 = c^2\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2$$

notwendig. Aus der ersten Bedingung folgt offensichtlich

$$u = \pm\int \frac{c(\rho)}{\rho}d\rho\,. \tag{2.38}$$

Die zweite Bedingung kann als quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung für α umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \big(u(\alpha) \pm c(\alpha)\big)\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

Mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens zeigt man, daß die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch $\alpha = F\big(x - (u \pm c)t\big)$ mit einer beliebigen Funktion F.

Mit der konstitutiven Relation $p = K\rho^\gamma$ für ein ideales isentropes Gas folgt aus (2.38) die Beziehung

$$u = \pm\frac{2}{\gamma - 1}(c - c_0)\,.$$

Abb. 2.2: Charakteristiken für a) monoton wachsendes u_0, b) monoton fallendes u_0.

Aus dieser Gleichung läßt sich c in Abhängigkeit von u berechnen. Wir erhalten schließlich

$$u = F\left[x - \left(\frac{\gamma+1}{2}u \pm c_0\right)t\right] .$$

Betrachten wir Anfangsbedingungen für u in der Form $u(x,0) = u_0(x)$, dann gilt $F = u_0$. Durch jeden Punkt $(x_0, 0)$ geht eine Charakteristik in Form der Geraden

$$x - x_0 = \left(\frac{\gamma+1}{2}u_0(x_0) \pm c_0\right)t ,$$

auf der u den Konstanten Wert $u_0(x_0)$ hat. Abhängig von u_0 treten zwei typische Situationen auf: Ist u_0 monoton wachsend, so laufen die Charakteristiken mit fortschreitender Zeit auseinander. Die Lösung des Anfangswertproblemes ist für alle Zeiten eindeutig bestimmt. Für monoton fallendes u_0 hingegen laufen die Charakteristiken zusammen (Abb. 2.2). Das bedeutet daß es einen Zeitpunkt $t_0 > 0$ gibt, an dem zwei Charakteristiken, die verschiedene u-Werte tragen, einander schneiden.

Nach dem Zeitpunkt t_0 kann daher keine stetige Lösung des Anfangswertproblemes existieren. Es ist allerdings möglich, die Lösung über den Zeitpunkt t_0 hinaus fortzusetzen, wenn man die Differentialgleichungen durch geeignete schwache Formulierungen ersetzt, die Lösungen mit Unstetigkeiten zulassen. Eine derartige Lösung besitzt eine Sprungunstetigkeit entlang einer Kurve in der x-t-Ebene und wird *Stoßwelle* genannt.

Abb. 2.3: Zweidimensionale Strömung um eine Tragfläche

2.5. Potentialströmungen um Tragflächen

Als Modell für Strömungen um längliche Körper, deren Querschnitt schwach variiert, betrachten wir zweidimensionale Strömungen um Zylinder mit verschiedenen Querschnitten. Insbesondere ist unser Ziel die Behandlung von Querschnitten wie in Abb. 2.3 skizziert, die typisch für Tragflächen sind.

Wir verwenden ein Koordinatensystem, in dem sich die Tragfläche in Ruhe befindet, und nehmen an, daß die Strömung weit weg von der Tragfläche eine konstante Geschwindigkeit hat, die normal auf die Erzeugenden des Zylinders ist. Der Betrag dieser Geschwindigkeit sei U. Weiters habe die Atmosphäre weit weg von der Tragfläche konstante Dichte ρ_∞ und Druck p_∞ (siehe Abb. 2.3).

Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß die x-y-Ebene normal auf die Erzeugenden steht und die positive x-Richtung die Richtung der Strömung weg von der Tragfläche ist. Wir beschränken uns auf zweidimensionale Strömungen, d.h. die z-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet. Es gilt

$$\mathbf{v} = (u, v) \to (U, 0)\,, \quad \rho \to \rho_\infty\,, \quad p \to p_\infty\,, \qquad \text{für } |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty\,. \tag{2.39}$$

Das Innere der Querschnittsfläche bezeichnen wir mit Ω. Offensichtlich muß die Randbedingung

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \tag{2.40}$$

erfüllt sein. Hier bezeichnet $\mathbf{n}$ den bezüglich Ω nach innen gerichteten Einheitsnormalvektor auf den Rand.

Wir interessieren uns für stationäre Strömungen. Die in Abb. 2.3 eingezeichneten Kurven sind Teilchenbahnen oder *Stromlinien*, d.h. Lösungen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Wegen der Bedingungen an ∞ nimmt die Entropie dort einen konstanten Wert an. Da alle Stromlinien in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ aus ∞ kommen und die Entropie entlang von Stromlinien konstant bleibt, haben wir es mit einer isentropen Strömung zu tun. Es gilt die konstitutive Relation (siehe (2.29))

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma \tag{2.41}$$

und die Bernoulli-Gleichung (2.33) erhält die Form

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{U^2}{2} + \frac{\gamma p_\infty}{(\gamma - 1)\rho_\infty}\,. \tag{2.42}$$

Damit folgt aus der stationären Version der Impulsgleichung (2.31) und aus (2.32) die Beziehung

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 0\,. \tag{2.43}$$

Für die betrachteten zweidimensionalen Strömungen hat die Rotation nur eine nichtverschwindende Komponente. Die Gleichung (2.43) impliziert daher, daß die Strömung *wirbelfrei* ist, d.h. daß $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ gilt. Jedes wirbelfreie Vektorfeld ist ein Gradientenfeld; es gibt daher ein *Geschwindigkeitspotential* ϕ mit

$$\mathbf{v} = \nabla\phi\,. \tag{2.44}$$

Wirbelfreie Strömungen werden deshalb auch *Potentialströmungen* genannt.

Für einen stationären Zustand können wir das p-System (2.34) schreiben als

$$\rho\nabla\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\rho=0\,,$$
$$\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}+\frac{c^2}{\rho}\nabla\rho=0\,.$$

Bilden wir das Skalarprodukt der zweiten Gleichung mit $\mathbf{v}$ und verwenden wir die erste, so ergibt sich

$$c^2\nabla\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\,. \tag{2.45}$$

Zusammen mit der Bernoulli-Gleichung (2.42) bildet diese Gleichung ein System zur Bestimmung des Potentials ϕ und des Druckes p (bzw. der Dichte ρ).

Wir wollen das System (2.42), (2.45) skalieren, indem wir die Werte U, p_∞ und ρ_∞ von Geschwindigkeit, Druck und Dichte an ∞ als Referenzgrößen wählen. Die Referenzgröße für die Länge hat offensichtlich keinen Einfluß auf die skalierten Gleichungen. Wir wählen den Durchmesser des Querschnittes Ω:

$$L=d(\Omega):=\sup_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\in\Omega^2}|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$$

In der skalierten Version von (2.42), (2.45) verwenden wir für die dimensionslosen Variablen dieselben Namen wie für die dimensionsbehafteten und als dimensionslosen Parameter die Machzahl

$$M=\frac{U}{c_\infty}\qquad\text{mit } c_\infty=\sqrt{p'(\rho_\infty)}=\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}\,.$$

Die skalierten Gleichungen sind

$$\begin{aligned} M^2\frac{|\mathbf{v}|^2-1}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\left(p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right)&=0\,,\\ p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\nabla\cdot\mathbf{v}&=M^2\mathbf{v}\cdot\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Verwenden wir (2.44), so ist für gegebenen Druck die zweite Gleichung in (2.46) eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Potential. Um das Problem zu vereinfachen, beschränken wir uns auf *langsame Strömungen*, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit sei klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit. Die Machzahl ist also ein kleiner Parameter, und wir interessieren uns für Approximationen für die Lösung, die im Grenzfall $M\to 0$ gültig sind.

Die skalierte Bernoulli-Gleichung zeigt, daß für $M\to 0$ der skalierte Druck gegen den konstanten Wert 1 konvergiert. Wir machen daher den Ansatz

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+O(M^2)\,,\qquad p=1+M^2p_1+O(M^4)\,.$$

Einsetzen in (2.46) und Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{|\mathbf{v}_0|^2-1}{2}+\frac{p_1}{\gamma}=0\,,\qquad \nabla\cdot\mathbf{v}_0=0\,.$$

Schreibt man dieses vereinfachte System wieder in Abhängigkeit der dimensionsbehafteten Größen und verwendet man das Geschwindigkeitspotential, so erhält man

$$\rho_\infty\frac{|\nabla\phi|^2}{2}+p=\rho_\infty\frac{U^2}{2}+p_\infty\,,\qquad \Delta\phi=0\,. \tag{2.47}$$

Das Potential ist eine Lösung der Laplace-Gleichung. Als Zusatzbedingungen erhält man

$$\begin{aligned} &\nabla\phi \to (U,0) \quad \text{für } |x| \to \infty\,,\\ &\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Die Annahme der langsamen Strömung hat zwei wesentliche Vereinfachungen bewirkt. Zunächst ist das Problem zur Bestimmung von ϕ und p entkoppelt. ϕ kann aus dem Randwertproblem für die Laplace-Gleichung berechnet und danach p aus der Bernoulli-Gleichung ermittelt werden. Außerdem ist nur mehr ein lineares Problem zu lösen. Die hier gemachten Annahmen entsprechen denen von Abschnitt 2.4 (Kompressionswellen mit kleiner Amplitude).

Als Beispiel betrachten wir die Strömung um einen Kreiszylinder. Der Querschnitt Ω ist ein Kreis mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung der x-y-Ebene. Nach Transformation auf Polarkoordinaten (r,θ) hat das Problem für das Geschwindigkeitspotential die Form

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = 0\,, \qquad \text{für } r > a$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\phi_r(a,\theta) = 0\,,\\ &\phi_r \to U\cos\theta\,, \quad \frac{1}{r}\phi_\theta \to -U\sin\theta\,, \qquad \text{für } r \to \infty \end{aligned}$$

und den Stetigkeitsbedingungen für die Geschwindigkeit

$$\phi_r(r,\theta+2\pi) = \phi_r(r,\theta)\,, \qquad \phi_\theta(r,\theta+2\pi) = \phi_\theta(r,\theta)\,.$$

Mit der Methode der Separation von Variablen läßt sich zeigen, daß

$$\phi(r,\theta) = -A\theta + U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

für jedes reelle A eine Lösung ist. Zusätzliche Lösungen können durch Addition von Konstanten erzeugt werden. Diese beschreiben aber klarerweise dieselbe Strömung. Ein echter Mangel an Eindeutigkeit ist allerdings durch die Möglichkeit der beliebigen Wahl von A gegeben. Im folgenden wollen wir uns auf Situationen beschränken, in denen die Parameter U und A nicht negativ sind.

Um die berechnete Strömung besser beschreiben zu können, bedienen wir uns der Tatsache, daß das berechnete Potential als harmonische Funktion als Realteil der komplexen analytischen Funktion

$$F(z) = Ai\ln\frac{z}{a} + U\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

mit $z = x + iy$ aufgefaßt werden kann. Umgekehrt kann für jede analytische Funktion

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

der Realteil ϕ als Geschwindigkeitspotential interpretiert werden. In diesem Zusammenhang wird die Funktion F als *komplexes Geschwindigkeitspotential* bezeichnet. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u = \phi_x = \psi_y\,, \qquad v = \phi_y = -\psi_x$$

folgt, daß die Teilchenbahnen bzw. Stromlinien durch die Gleichung

$$\psi(x,y) = \text{const}$$

Abb. 2.4: Strömung um einen Kreiszylinder für 1) $A > 2aU$, 2) $A < 2aU$

gegeben sind. Der Imaginärteil ψ von F (die konjugierte harmonische Funktion zu ϕ) wird *Stromfunktion* genannt.

Bemerkenswert ist außerdem, daß der Geschwindigkeitsvektor aus der *komplexen Geschwindigkeit*

$$W = F' = u - iv$$

berechnet werden kann.

Für die Strömung um den Kreiszylinder ist die Stromfunktion gegeben durch

$$\psi = A \ln \frac{r}{a} + U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \,.$$

Die Randbedingungen auf $\partial\Omega$ bedeuten, daß $\partial\Omega$ eine Stromlinie ist. Für den Kreiszylinder ist $\partial\Omega$ durch $r = a$ gegeben, was der Stromlinie $\psi = 0$ entspricht.

Um die Bedeutung des Parameters A zu verstehen, betrachten wir zunächst die Situation $U = 0$. In diesem Fall sind die Stromlinien Kreise. Es handelt sich um eine reine Drehbewegung, deren Stärke durch den Parameter A gegeben ist. Die Lösung des Strömungsproblems ist also bis auf die Stärke des drehenden Anteils eindeutig.

Für das qualitative Verhalten der Stromlinien im Fall $U > 0$ sind die sogenannten *Staupunkte* von Bedeutung, an denen die Geschwindigkeit verschwindet. Die Forderung $W(z_{st}) = 0$ liefert

$$z_{st} = -\frac{Ai}{2U} \pm \sqrt{a^2 - \frac{A^2}{4U^2}} \,.$$

Es ergeben sich zwei qualitativ verschiedene Fälle (siehe Abb. 2.4):

1) $A > 2aU$: In diesem Fall liegt nur einer der beiden Staupunkte außerhalb von Ω. Er befindet sich auf der negativen imaginären Achse.

2) $A < 2aU$: Beide Staupunkte liegen auf $\partial\Omega$, im Sonderfall $A = 0$ auf der reellen Achse.

Im weiteren wollen wir uns mit der Berechnung der Kraft

$$\mathbf{f} = \int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} \, ds$$

beschäftigen, die auf den umströmten Körper wirkt. Es bietet sich an, die Bernoulli-Gleichung in (2.47) zu Berechnung des Druckes zu verwenden und das obige Integral auszuwerten. Hier soll jedoch ein anderer Zugang gewählt werden, der funktionentheoretische Überlegungen verwendet, die den Rechenaufwand erheblich verringern.

Bildet man den Gradienten der Bernoulli-Gleichung, so ergibt sich mit Hilfe der Identität (2.30) die Divergenzform der Impulsgleichung

$$\nabla \cdot (\rho_\infty \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I}) = 0 \,.$$

Abb. 2.5: Die Kontur C

Nun betrachten wir eine im Strömungsgebiet verlaufende geschlossene Jordan-Kurve C, in deren Inneren sich der Querschnitt Ω befindet (Abb. 2.5). Integrieren wir die obige Gleichung über das zwischen C und $\partial\Omega$ liegende Gebiet und verwenden den Divergenzsatz, so erhalten wir

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\rho_\infty \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I}) ds + \int_C \mathbf{n} \cdot (\rho_\infty \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{I}) ds = 0 \,.$$

Wegen der Identität $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ und der Randbedingung an $\partial\Omega$ läßt sich die Kraft $\mathbf{f}$ durch ein Kurvenintegral über C berechnen:

$$\mathbf{f} = -\int_C \big(\mathbf{n}p + \rho_\infty (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}\big) \, ds$$

Im Folgenden verwenden wir die Bernoulli-Gleichung für die Berechnung des Druckes und die Identitäten

$$\mathbf{n} \, ds = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} , \qquad \int_C \mathbf{n} \, ds = 0 \,.$$

Die erste Komponente f_1 der Kraft $\mathbf{f}$, d.h. die Komponente in Strömungsrichtung, genannt *Widerstand*, ist dann gegeben durch

$$f_1 = \frac{\rho_\infty}{2} \int_C \big[(v^2 - u^2) dy + 2uv \, dx\big] \,.$$

Für die Komponente normal auf die Strömungsrichtung, den *Auftrieb*, gilt

$$f_2 = \frac{\rho_\infty}{2} \int_C \big[(v^2 - u^2) dx - 2uv \, dy\big] \,.$$

Wegen der Relation

$$W^2 dz = (u - iv)^2 (dx + i \, dy) = (u^2 - v^2) dx + 2uv \, dy + i\big[(u^2 - v^2) dy - 2uv \, dx\big]$$

folgt aus den beiden obigen Gleichungen die *Formel von Blasius*

$$i \frac{\rho_\infty}{2} \oint_C W^2 dz = f_1 - i f_2 \,.$$

Hat man eine Entwicklung von W um $z = \infty$ der Form $W = U + a_1/z + O(z^{-2})$ zur Verfügung, dann gilt $W^2 = U^2 + 2Ua_1/z + O(z^{-2})$ und aus dem Residuensatz folgt

$$\oint_C W^2 dz = 4\pi i U a_1 \,.$$

Außerdem gilt

$$\oint_C W\,dz = 2\pi i a_1\,.$$

Dieses Integral kann auch in der Form

$$\oint_C W\,dz = \int_C (u\,dx + v\,dy) + i\int_C (u\,dy - v\,dx) = \int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} + i\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

geschrieben werden. Wegen der Divergenzfreiheit von $\mathbf{v}$ verschwindet der Imaginärteil. Vergleich der letzten beiden Formeln liefert daher die Aussage, daß a_1 rein imaginär sein muß. Damit sind die Komponenten von $\mathbf{f}$ gegeben durch

$$f_1 = 0\,, \qquad f_2 = -\rho_\infty 2\pi i a_1 U\,.$$

Die Tatsache, daß die Widerstandskraft verschwindet, ist das *d'Alembertsche Paradoxon.* Dieses Resultat zeigt eine Schwäche des verwendeten Modells auf. Für die im Experiment sehr wohl beobachteten Widerstandskräfte sind Reibungseffekte verantwortlich, die wir hier vernachlässigt haben. Für eine weitere Behandlung dieser Frage sei auf den folgenden Abschnitt verwiesen.

Für die Strömung um einen Kreiszylinder ist die komplexe Geschwindigkeit gegeben durch

$$W = \frac{Ai}{z} + U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\,.$$

Es gilt daher $a_1 = Ai$, und der Auftrieb ist gegeben durch

$$f_2 = 2\pi\rho_\infty AU\,. \tag{2.48}$$

Er ist also proportional zur Geschwindigkeit und zur Stärke des rotierenden Anteils.

Ein Kreiszylinder ist keine sehr effektive Tragfläche. Andererseits können mit Hilfe von konformen Abbildungen beliebige Querschnitte auf den Einheitskreis abgebildet werden. Da außerdem die Laplace-Gleichung invariant unter konformen Abbildungen ist, haben wir zumindest theoretisch das Problem für beliebige Querschnitte gelöst. Eine spezielle konforme Abbildung, die in der Aerodynamik große Bedeutung hat, ist die *Joukowski-Transformation*

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z}\,, \tag{2.49}$$

die das Äußere des Ursprungskreises mit Radius c in der z-Ebene auf die entlang der Strecke $(-2c, 2c)$ geschlitzte ζ-Ebene abbildet.

Mit Hilfe einer Joukowski-Transformation mit $c = a$ können wir das Problem der Umströmung einer Platte lösen. Das komplexe Geschwindigkeitspotential ist gegeben durch

$$G(\zeta) = F(z(\zeta)) = Ai\ln\frac{z(\zeta)}{a} + U\zeta\,.$$

Verschwindet der drehende Anteil, dann wird die gleichmäßige Strömung durch die in Strömungsrichtung ausgerichtete Platte nicht gestört. Die komplexe Geschwindigkeit ist

$$V(\zeta) = \frac{W(z(\zeta))}{d\zeta/dz} = \frac{W(z(\zeta))}{1 - a^2/z(\zeta)^2}\,.$$

Die Punkte $z = \pm a$ entsprechen den Kanten $\zeta = \pm 2a$ der Platte. Die Geschwindigkeit wird dort unendlich groß.

Realistische Tragflächenquerschnitte sind vorne rund und haben eine Hinterkante (siehe Abb. 2.3). Die unbefriedigende Situation, daß die Hinterkante mit unendlicher Geschwindigkeit umströmt wird, kann durch geeignete Wahl der bisher beliebigen Rotation A behoben werden. Das bedeutet, daß der hintere Staupunkt mit der Hinterkante zusammenfällt. Diese von Kutta und Joukowski formulierte *Abflußbedingung* macht die

Lösung des Problems eindeutig. Eine rigorose theoretische Rechtfertigung dieser Bedingung existiert jedoch zur Zeit nicht.

Für die umströmte Platte ergibt sich die Forderung $A = 0$, also ein Verschwinden des drehenden Anteils. Ein Problem von größerer Relevanz für die Praxis ist die Strömung um eine Platte, die gegen die Strömungsrichtung geneigt ist. Das komplexe Geschwindigkeitspotential für einen unter dem Winkel α angeströmten Kreiszylinder ist

$$F(z) = Ai \ln \frac{z}{a} + U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) .$$

Aus der Abflußbedingung folgt die Forderung $W(a) = 0$ und damit

$$A = 2aU \sin \alpha \, .$$

Damit ist die komplexe Geschwindigkeit für eine unter dem Winkel α angeströmte Platte gegeben durch

$$V(\zeta) = U \left(\cos \alpha - i \sin \alpha \frac{z(\zeta) - a}{z(\zeta) + a} \right) .$$

Diese hat nur mehr an der Vorderkante eine Singularität.

Da die Joukowski-Transformation für $z \to \infty$ bzw. $\zeta \to \infty$ asymptotisch gleich der Identität ist, sind die Auftriebe in der z-Ebene und der ζ-Ebene gleich. Aus Gleichung (2.48) ergibt sich also der Auftrieb

$$f_2 = 4\pi \rho_\infty a U^2 \sin \alpha \, .$$

Ein Kreis in der z-Ebene, der durch den Punkt c geht und dessen Mittelpunkt z_0 im zweiten Quadranten liegt, wird durch die Joukowski-Transformation (2.49) auf ein sogenanntes *Joukowskisches Flügelprofil* abgebildet (siehe Abb. 2.6). Solche Profile kommen realistischen Tragflächenquerschnitten ziemlich nahe. Statt durch den Mittelpunkt z_0 ist der Kreis auch durch seinen Radius a und den Anstiegswinkel β der Verbindungsstrecke zwischen z_0 und c bestimmt (Abb. 2.6). Es gilt $c = z_0 + ae^{-i\beta}$.

Das komplexe Geschwindigkeitspotential für den unter dem Winkel α angeströmten Kreiszylinder ist

$$F(z) = Ai \ln \frac{z - z_0}{a} + U \left((z - z_0) e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z - z_0} e^{i\alpha} \right) .$$

Die Abflußbedingung $F'(c) = 0$ ist für $A = 2aU \sin(\alpha + \beta)$ erfüllt, woraus die Formel

$$f_2 = 4\pi \rho_\infty a U^2 \sin(\alpha + \beta)$$

für den Auftrieb einer Joukowski-Tragfläche folgt. Dieses Resultat ist erstaunlich gut durch Experimente belegt, wenn man berücksichtigt, daß sich das gelöste Problem aus einer starken Vereinfachung der ursprünglichen Gleichungen und der nur heuristisch motivierten Abflußbedingung zusammensetzt.

2.6. Grenzschichten

Das zu experimentellen Resultaten in krassem Widerspruch stehende d'Alembertsche Paradoxon motiviert eine eingehendere Betrachtung von Reibungseffekten. Wir wollen uns hier auf zweidimensionale stationäre Strömungen mit konstanter Dichte beschränken. Die skalierten Massen- und Impulserhaltungsgleichungen sind dann

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0\,, \\ uu_x + vu_y + p_x &= \frac{1}{\mathrm{Re}}(u_{xx} + u_{yy})\,, \\ uv_x + vv_y + p_y &= \frac{1}{\mathrm{Re}}(v_{xx} + v_{yy})\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Für große Reynoldszahlen sind diese Gleichungen singulär gestört. Es ist daher zu erwarten, daß die im vorigen Abschnitt berechneten Lösungen der reduzierten Gleichungen außerhalb von Grenzschichten brauchbare Approximationen darstellen. Hier nehmen wir an, wir hätten eine solche reduzierte Lösung $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{p}$ gegeben. Es ist zu erwarten, daß Grenzschichten an Randstücken auftreten, an denen die reduzierte Lösung die Haftbedingung verletzt.

Sei als Beispiel die positive x-Achse ein solches Randstück. Dann gilt im allgemeinen $\overline{v}(x,0) = 0$, aber $\overline{u}(x,0) \neq 0$. Eine Grenzschichtvariable ist durch $\eta = y\mathrm{Re}^\alpha$, $\alpha > 0$ gegeben. Außerdem ist anzunehmen, daß die Geschwindigkeitskomponente v überall in der Grenzschicht klein ist. Die Umskalierung $w = v\mathrm{Re}^\beta$, $\beta > 0$ scheint daher angebracht. Führt man diese Transformationen in (2.50) durch, so zeigt sich, daß die Wahl $\alpha = \beta = 1/2$ zu einer signifikanten Degeneration führt. Für die Grenzschichtlösung $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{p}$ gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x + \widetilde{w}_\eta &= 0\,, \\ \widetilde{u}\widetilde{u}_x + \widetilde{w}\widetilde{u}_\eta + \widetilde{p}_x &= \widetilde{u}_{\eta\eta}\,, \\ \widetilde{p}_\eta &= 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß der Druck über die Grenzschicht konstant ist. Beachtet man, daß für die reduzierte Lösung

$$\overline{u}(x,0)\overline{u}_x(x,0) + \overline{p}_x(x,0) = 0$$

gilt, so ergibt sich das Grenzschichtproblem

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x + \widetilde{w}_\eta &= 0\,, \\ \widetilde{u}\widetilde{u}_x + \widetilde{w}\widetilde{u}_\eta - \overline{u}(x,0)\overline{u}_x(x,0) &= \widetilde{u}_{\eta\eta}\,. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Für positive $\widetilde{u}$ ist die zweite Gleichung eine parabolische Gleichung für $\widetilde{u}$, während $\widetilde{w}$ durch Integration der ersten Gleichung in η-Richtung ermittelt werden kann. Die Zusatzbedingungen

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{w}(x,0) = 0\,, \qquad \widetilde{u}(x,\infty) = \overline{u}(x,0)\,, \qquad \widetilde{u}(0,\eta) = u_0(\eta) \tag{2.52}$$

scheinen daher auf ein sachgemäß gestelltes Problem zu führen.

Man kann zeigen, daß (2.51), (2.52) auch Grenzschichten entlang gekrümmter Ränder beschreibt, wobei x die Bogenlänge auf dem Rand und η der um $\mathrm{Re}^{1/2}$ gestreckte Abstand vom Rand ist. Hierbei muß man allerdings voraussetzten, daß der Krümmungsradius des Randes überall groß im Vergleich zu $\mathrm{Re}^{-1/2}$ ist.

Das Vertrauen des Lesers in das Problem (2.51), (2.52) soll durch die Betrachtung eines Beispieles gestärkt werden. Für eine in Anströmungsrichtung ausgerichtete Platte gilt $\overline{u}(x,y) = U$. Für die durch $\widetilde{u} = \psi_\eta$, $\widetilde{w} = -\psi_x$ definierte Stromfunktion ψ gilt

$$\begin{aligned} &\psi_\eta\psi_{x\eta} - \psi_x\psi_{\eta\eta} = \psi_{\eta\eta\eta}\,, \\ &\psi_x(x,0) = \psi_\eta(x,0) = 0\,, \qquad \psi_\eta(x,\infty) = U\,, \qquad \psi_\eta(0,\eta) = U\,. \end{aligned}$$

Von *Blasius* (1908) wurde entdeckt, daß dieses Problem eine Ähnlichkeitslösung der Form

$$\psi = \sqrt{2Ux}f(s) \qquad \text{mit } s = \eta\sqrt{\frac{U}{2x}}$$

besitzt. Für die Funktion f ergibt sich das Problem

$$f''' + ff'' = 0\,,$$
$$f(0) = f'(0) = 0\,, \qquad f'(\infty) = 1\,.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten lassen sich aus der Blasius-Lösung ermitteln:

$$\widetilde{u} = Uf'(s)\,, \qquad \widetilde{w} = \sqrt{\frac{U}{2x}}\big(sf'(s) - f(s)\big)$$

Die mit Hilfe der Grenzschicht berechneten, auf einen umströmten Körper wirkenden viskosen Spannungskräfte sind $O(\mathrm{Re}^{-1/2})$. Die in Experimenten gemessenen Widerstandskräfte sind oft viel größer. Unsere bisherigen Überlegungen sind daher noch nicht ausreichend.

Das d'Alembertsche Paradoxon erklärt sich dadurch, daß zwar vom vorderen Staupunkt weg der Druck auf den Körper abnimmt, sich diese Entwicklung jedoch an der Hinterseite des Körpers wieder umkehrt. Das bedeutet, daß der Term $\overline{p}_x(x,0) = -\overline{u}(x,0)\overline{u}_x(x,0)$ in (2.51) an der Hinterseite positiv ist. Aus der zweiten Gleichung in (2.51) wird es plausibel, daß diese Tatsache bewirken kann, daß die tangentiale Geschwindigkeitskomponente in der Grenzschicht negativ wird. Es tritt also eine Rückströmung auf, deren Effekt eine Abdrängung der Strömung von der Körperoberfläche ist. Dieser Effekt wird *Ablösung* der Grenzschicht genannt. Zwischen den an der Ober- und Unterseite abgelösten Grenzschichten bildet sich ein *Totwasser* mit viel geringerem Druck als durch die Potentialströmung vorausgesagt. Ob dieser Effekt auftritt, hängt von der Form des umströmten Körpers ab. Für an der Hinterseite spitz zulaufende (*stromlinienförmige*) Körper ist er weniger bedeutend. Die Resultate des vorigen Abschnittes haben daher zwar für Joukowski-Profile aber nicht für Kreiszylinder praktische Bedeutung.