

# Einführung in die Kontinuumsmechanik

Christian Schmeiser

## 1. KAPITEL Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

### 1.1. Einige Resultate aus der Teilchenmechanik

Wir beschäftigen uns mit einem System von  $N$  Massenpunkten, deren Wechselwirkungen durch Zentralkräfte bestimmt sind, und auf die zusätzlich äußere Kräfte wirken. Wir bezeichnen den Ort zum Zeitpunkt  $t$  bzw. die Masse des  $i$ -ten Teilchens mit  $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$  bzw.  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt für die Impulse  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  ( $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ )

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

wobei  $\mathbf{f}_{ij}$  die vom  $j$ -ten auf das  $i$ -te Teilchen ausgeübte Kraft und  $\mathbf{f}_i$  die auf das  $i$ -te Teilchen wirkende äußere Kraft bezeichnen. Aus dem dritten Newtonschen Gesetz folgt die Forderung  $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$ , die von den hier angenommenen Zentralkräften der Form

$$\mathbf{f}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} g_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

mit  $g_{ij}(r) = g_{ji}(r)$  erfüllt ist. Für  $g_{ij} > 0$  ist die Wechselwirkung abstoßend, für  $g_{ij} < 0$  anziehend. Die äußeren Kräfte  $\mathbf{f}_i(t)$  werden als gegeben angenommen. Zwei Beispiele für  $g_{ij}$  sind

1. Gravitation:

$$g_{ij}(r) = -G \frac{m_i m_j}{r^2}$$

mit der Gravitationskonstanten  $G$ ,

2. Elektrische Ladungen:

$$g_{ij}(r) = k \frac{Q_i Q_j}{r^2}$$

mit der Ladung  $Q_i$  des  $i$ -ten Teilchens und der Proportionalitätskonstanten  $k$ . Da es sowohl positive als auch negative elektrische Ladungen gibt, kann diese Kraft sowohl abstoßend als auch anziehend sein.

Führt man den Gesamtimpuls  $\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i$  und die Summe der äußeren Kräfte  $\mathbf{f} = \sum_i \mathbf{f}_i$  ein, so erhält man

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f} = \sum_i \left( \sum_{j < i} \mathbf{f}_{ij} + \sum_{j < i} \mathbf{f}_{ji} \right) + \mathbf{f} = \mathbf{f} \quad (1.2)$$

wegen des dritten Newtonschen Gesetzes. Diese Eigenschaft nennen wir *Impulserhaltung*. Sie bedeutet, daß die Wechselwirkungskräfte zur Änderung der Gesamtimpulses nichts beitragen. Wir können also das gesamte Teilchenensemble selbst wieder als Massenpunkt mit Masse  $m = \sum_i m_i$ , Ort  $\mathbf{r} = (1/m) \sum_i m_i \mathbf{r}_i$  und Impuls  $\mathbf{p}$  betrachten, dessen Bewegung durch die Summe  $\mathbf{f}$  der äußeren Kräfte bestimmt wird. Treten keine äußeren Kräfte auf, dann vollführt der Schwerpunkt  $\mathbf{r}$  eine Trägheitsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn.

Ein weiterer Erhaltungssatz gilt für den Drehimpuls. Wir führen die Drehimpulse  $\mathbf{L}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}_i$  und die Drehmomente  $\mathbf{M}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{f}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  um den ruhenden Punkt  $\mathbf{r}_0$  ein, wobei mit  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  das Vektorprodukt bezeichnet wird. Außerdem definieren wir den Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$  und die Summe der Drehmomente  $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$ . Eine leichte Rechnung zeigt  $\dot{\mathbf{L}}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{p}}_i$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} - \mathbf{r}_0 \times \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{M} \\ &= - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} g_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + \mathbf{M} = \mathbf{M} \end{aligned} \quad (1.3)$$

wegen der Antisymmetrie des Vektorproduktes ( $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i$ ). Die Eigenschaft (1.3) nennen wir *Drehimpulserhaltung*. Ähnlich zur Impulserhaltung bedeutet sie, daß die Wechselwirkungskräfte nichts zur Änderung des Gesamtdrehimpulses um einen beliebigen ruhenden Punkt  $\mathbf{r}_0$  beitragen. Auf den Gesamtdrehimpuls wirkt sich nur die Summe der durch die äußeren Kräfte verursachten Drehmomente aus.

Schließlich beschäftigen wir uns noch mit der *Energieerhaltung*. Wir definieren die *kinetische Energie*

$$T = \sum_i m_i \frac{|\dot{\mathbf{r}}_i|^2}{2}$$

und die von den äußeren Kräften pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit

$$W = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{f}_i,$$

wobei  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  das Skalarprodukt von zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{f}_{ij} + W \\ &= \sum_i \sum_{j < i} \frac{(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} g_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) + W \\ &= \sum_i \sum_{j < i} g_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \frac{d}{dt} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| + W. \end{aligned}$$

Sei für  $j < i$   $G_{ij}(r)$  eine Stammfunktion von  $g_{ij}(r)$ . Dann definieren wir die *potentielle Energie* durch

$$V = - \sum_i \sum_{j < i} G_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

Mit der Gesamtenergie  $E = T + V$  wird obige Gleichung zu

$$\dot{E} = W. \quad (1.4)$$

Ähnlich zu den bisher besprochenen Erhaltungssätzen gilt auch hier, daß die von den Wechselwirkungskräften verrichtete Arbeit nichts zur Veränderung der Gesamtenergie beiträgt.

Die Gleichungen (1.1) beschreiben ein System von Massenpunkten, die in einer dauernden Wechselwirkung miteinander stehen. Ein Extremfall dieser Situation ist ein System von harten Kugeln, deren Wechselwirkung sich auf diskrete Kollisionen beschränkt. Dieser Fall dient als Grundlage der klassischen Modelle für die Dynamik von verdünnten Gasen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall lauter gleicher Kugeln mit Masse  $m$  und Radius  $R$ , die sich im  $\mathbb{R}^3$  bewegen. Sei  $\mathbf{r}_i(t)$  der Ort des Mittelpunktes der  $i$ -ten Kugel,  $i = 1, \dots, N$ . Solange keine Kollisionen stattfinden, wird die Bewegung der Kugeln nur durch die Wirkung äußerer Kräfte beeinflusst. Eine Kollision zwischen zwei Kugeln zum Zeitpunkt  $t_0$  findet statt, wenn für ein Paar  $(i, j)$

$$|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)| = 2R$$

gilt. Die Kollision bewirkt eine augenblickliche Geschwindigkeitsänderung der beiden Kugelmittelpunkte. Die Annahme, daß Zentralkräfte zwischen den Kugeln wirken, bedeutet, daß die Geschwindigkeitsänderung in Richtung des Vektors

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)}{2R}$$

zwischen den Kugelmittelpunkten erfolgt. Bezeichnen wir mit  $\mathbf{v}'_i = \dot{\mathbf{r}}_i(t_0-)$  bzw.  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(t_0+)$  die Geschwindigkeiten vor bzw. nach der Kollision, dann gilt also

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}'_i + \lambda \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}'_j + \mu \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  werden durch die Forderungen der Impulserhaltung

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_j$$

und der Energieerhaltung

$$|\mathbf{v}_i|^2 + |\mathbf{v}_j|^2 = |\mathbf{v}'_i|^2 + |\mathbf{v}'_j|^2$$

bestimmt. Man erhält

$$\lambda = -\mu = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}'_j - \mathbf{v}'_i).$$

Es ist leicht zu überprüfen, daß damit auch die Summe der Drehimpulse erhalten wird:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}'_j$$

Auch für dieses "3-D Billiard" gelten also die Gesetze (1.2), (1.3) und (1.4).

## 1.2. Das kontinuierliche Medium

Für Punkte  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  und  $h > 0$  bezeichnen wir den Würfel mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}_0$  und Kantenlänge  $h$  mit

$$W_h(\mathbf{x}_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max(|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|) \leq h/2\}.$$

Betrachten wir ein großes ( $N \gg 1$ ) Ensemble von Massenpunkten (z.B. Moleküle) wie im vorigen Abschnitt, dann läßt sich eine Massendichte  $\rho_h$  definieren durch

$$\rho_h(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{h^3} \sum_{\mathbf{r}_i(t) \in W_h(\mathbf{x}_0)} m_i. \quad (1.5)$$

Diese Dichte soll die Eigenschaft haben, daß das Integral

$$\int_R \rho_h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1.6)$$

als Näherung für die in  $R \subset \mathbb{R}^3$  enthaltene Masse verwendet werden kann. Dazu ist es klarerweise notwendig,  $h$  klein im Vergleich zu charakteristischen Längen in  $R$  zu wählen. Ist andererseits  $h$  so klein gewählt, daß sich in einem Würfel  $W_h(\mathbf{x}_0)$  nur wenige Moleküle befinden, dann ist die Dichtefunktion nicht sehr aussagekräftig, weil sie sehr stark von  $h$  abhängt. Die Grundannahme der Kontinuumsmechanik ist, daß es einen Bereich von Werten für  $h$  gibt, in dem  $\rho_h$  nur schwach von  $h$  abhängt. Im weiteren werden wir annehmen, daß  $h$  aus diesem Bereich gewählt wurde und daß das Integral (1.6) eine exakte Formel für die in  $R$  enthaltene Masse ist. Ähnlich zu (1.5) läßt sich auch eine Impulsdichte

$$\mathbf{p}_h(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{h^3} \sum_{\mathbf{r}_i(t) \in W_h(\mathbf{x}_0)} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t), \quad (1.7)$$

und damit eine mittlere Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_h = \mathbf{p}_h / \rho_h$  definieren. Weiters ist die Energiedichte  $E_h = T_h + V_h$  als Summe aus der Dichte der kinetischen Energie

$$T_h(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{h^3} \sum_{\mathbf{r}_i(t) \in W_h(\mathbf{x}_0)} m_i \frac{|\dot{\mathbf{r}}_i(t)|^2}{2}$$

und der ähnlich definierten Dichte der potentiellen Energie gegeben. Definieren wir einen Energieanteil

$$\tilde{T}_h(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{h^3} \sum_{\mathbf{r}_i(t) \in W_h(\mathbf{x}_0)} m_i \frac{|\dot{\mathbf{r}}_i(t) - \mathbf{v}_h|^2}{2},$$

der durch die Abweichungen der Teilchengeschwindigkeiten von der mittleren Geschwindigkeit verursacht wird, dann gilt

$$T_h = \rho_h \frac{|\mathbf{v}_h|^2}{2} + \tilde{T}_h.$$

Schließlich führen wir die mikroskopische oder innere Energie pro Masseneinheit  $e_h$  durch die Gleichung  $\rho_h e_h = \tilde{T}_h + V_h$  ein. Dann kann die Energiedichte als Summe aus der Dichte der makroskopischen kinetischen Energie und der inneren Energiedichte geschrieben werden:

$$E_h = \rho_h \left( \frac{|\mathbf{v}_h|^2}{2} + e_h \right)$$

Es sei hier bemerkt, daß die Kontinuumsmechanik nicht unbedingt auf Mittelungen wie in (1.5) und (1.7) beruht. Es ist nicht weniger gerechtfertigt, die Materie als kontinuierlich im Raum verteilt anzunehmen und die Existenz einer Massendichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$  und einer mittleren Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  zu postulieren, ohne Überlegungen über die mikroskopische Struktur des betrachteten Materials anzustellen.

Zunächst wollen wir uns mit der *Kinematik* von kontinuierlichen Medien beschäftigen. Ist die mittlere Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  vorgegeben, dann wird die Bewegung eines Materieteilchens beschrieben durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}, \quad (1.8)$$

wobei  $\mathbf{A}$  die Position des Teilchens zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist. Wir berücksichtigen die Abhängigkeit der Teilchenbahn von der Anfangsposition durch die Schreibweise

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t). \quad (1.9)$$

Es gilt also:  $\mathbf{x}(\mathbf{A}, T)$  ist die Position zum Zeitpunkt  $t$  des Teilchens, das zum Zeitpunkt 0 die Position  $\mathbf{A}$  hatte. Wir postulieren die Undurchdringlichkeit des Materials. Das bedeutet, daß die Gleichung (1.9) eindeutig nach  $\mathbf{A}$  aufgelöst werden kann und äquivalent zu einer Gleichung der Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

ist. Daraus folgt, daß jede Funktion von  $(\mathbf{x}, t)$  auch als Funktion von  $(\mathbf{A}, t)$  geschrieben werden kann. Insbesondere führen wir für die Massendichte zum Zeitpunkt  $t$  des Teilchens, das zum Zeitpunkt 0 die Position  $\mathbf{A}$  hatte, die Bezeichnung

$$\delta(\mathbf{A}, t) = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t)$$

ein. Je nach dem, ob man die *Euler-Koordinaten*  $\mathbf{x}$  oder die *Lagrange-Koordinaten*  $\mathbf{A}$  verwendet, spricht man von einer ortsbezogenen oder einer materialbezogenen Beschreibung.

Im folgenden werden wir eine Beziehung zwischen der partiellen Ableitung nach der Zeit bei festen Euler-Koordinaten und der bei festen Lagrange-Koordinaten benötigten. Es gilt

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho,$$

wobei der Gradient  $\nabla \rho$  von  $\rho$  der Vektor der partiellen Ableitungen von  $\rho$  nach den Komponenten des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  ist. Wir nennen die rechte Seite die *Materialableitung* von  $\rho$  und führen die Schreibweise

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (1.10)$$

ein.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Bewegung eines Teils des Materials, der zum Zeitpunkt  $t$  in dem Gebiet  $R(t) \subset \mathbb{R}^3$  liegt. In Abhängigkeit von  $R(0)$  ist  $R(t)$  gegeben durch

$$R(t) = \{\mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \mid \mathbf{A} \in R(0)\},$$

wobei  $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$  durch Lösen des Anfangswertproblems (1.8) ermittelt wird. Sei  $\mathcal{V}(t)$  das Volumen von  $R(t)$ . Dann gilt

$$\mathcal{V}(t) = \int_{R(t)} d\mathbf{x}, \quad \mathcal{V}(0) = \int_{R(0)} d\mathbf{A}.$$

Aus der Substitutionsregel folgt

$$\mathcal{V}(t) = \int_{R(0)} J(\mathbf{A}, t) d\mathbf{A}$$

mit der Funktionaldeterminanten

$$J(\mathbf{A}, t) = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{A}} \right) = \sum_{\pi \in P_3} \text{sign}(\pi) \prod_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial A_{\pi(j)}},$$

wobei  $P_3$  die Menge aller Permutationen von 3 Elementen ist und  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  (analog für andere Vektoren) gilt. Im folgenden werden wir die Materialableitung der Funktionaldeterminanten brauchen. Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial A_j} = \frac{\partial v_i}{\partial A_j}.$$

Aus der Produktregel und der Kettenregel folgt daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{\pi \in P_3} \text{sign}(\pi) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial A_{\pi(i)}} \prod_{j \neq i} \frac{\partial x_j}{\partial A_{\pi(j)}} \\ &= \sum_{\pi \in P_3} \text{sign}(\pi) \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial A_{\pi(i)}} \prod_{j \neq i} \frac{\partial x_j}{\partial A_{\pi(j)}} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sum_{\pi \in P_3} \text{sign}(\pi) \frac{\partial x_k}{\partial A_{\pi(i)}} \prod_{j \neq i} \frac{\partial x_j}{\partial A_{\pi(j)}}. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist eine Vertauschung der Reihenfolge der Summationen. Die innerste Summe auf der rechten Seite ist die Determinante einer Matrix, die aus der Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{A}}$  dadurch entsteht, daß die Zeile  $\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{A}}$  durch  $\frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{A}}$  ersetzt wird. Außer im Fall  $k = i$  haben diese Matrizen zwei identische Zeilen, und ihre Determinante verschwindet daher. Es folgt die *Eulersche Entwicklungsformel*

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} J = (\nabla \cdot \mathbf{v}) J. \quad (1.11)$$

Hier bezeichnet  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$  die Divergenz von  $\mathbf{v}$ . Als Anwendung berechnen wir die Ableitung des Volumens von  $R(t)$  nach der Zeit:

$$\mathcal{V}'(t) = \int_{R(0)} (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t) J(\mathbf{A}, t) d\mathbf{A} = \int_{R(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir des öfteren die Zeitableitung von Integralen über den zeitabhängigen Bereich  $R(t)$  berechnen müssen. Sei  $F(\mathbf{x}, t)$  eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \int_{R(0)} F(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t) J(\mathbf{A}, t) dt = \int_{R(0)} \left( \frac{DF}{Dt} J + F \frac{\partial J}{\partial t} \right) d\mathbf{A} \\ &= \int_{R(0)} \left( \frac{DF}{Dt} + F \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J d\mathbf{A} = \int_{R(t)} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (F \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Wenden wir auf den zweiten Term auf der rechten Seite den Divergenzansatz an, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{R(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial R(t)} F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

mit dem nach außen gerichteten Einheitsnormalvektor auf den Rand  $\mathbf{n}$ . Diese Version zeigt einerseits, daß (1.12) eine Verallgemeinerung der Formel fur die Ableitung von eindimensionalen Integralen mit variablen Grenzen ist, andererseits hilft sie bei der physikalischen Interpretation von (1.12). Betrachtet man  $F$  als Dichte einer physikalischen Groe, dann ist durch  $F\mathbf{v}$  eine *Flußdichte* fur diese Groe gegeben, und  $F\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  ist die Komponente dieser Flußdichte normal auf den Rand von  $R(t)$ . Die Interpretation von (1.12) ist daher: Die Änderung der in  $R(t)$  enthaltenen Menge der Groe ist bestimmt durch Änderungen in der Dichte und durch den Fluß der Groe durch den Rand von  $R(t)$ .

### 1.3. Massenerhaltung

In der Teilchenmechanik bedeutet Massenerhaltung, daß kein Teilchen verschwindet und daß die Masse jedes Teilchens sich nicht mit der Zeit ändert. In der Kontinuumsmechanik wird die Massenerhaltung durch eine Differentialgleichung beschrieben. Wir werden zwei Methoden angeben, um diese Gleichung herzuleiten. Die erste Methode beruht auf der Aussage: Die Masse eines Teiles des Materials ändert sich nicht mit der Zeit. In eine Formel übersetzt, heißt das

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

fur beliebige  $R(t)$ . Verwendet man (1.12) mit  $F = \rho$ , so gilt

$$\int_{R(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Das das Gebiet  $R(t)$  beliebig gewählt werden kann, folgt die *Divergenzform der Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.13)$$

Verwendet man die Definition (1.10) der Materialableitung, so erhält man die Version

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.14)$$

Eine Formel fur die zeitliche Änderung von Groen, deren Dichte proportional zu  $\rho$  ist, ergibt sich aus einer Kombination von (1.12) und (1.13):

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho F d\mathbf{x} = \int_{R(t)} \rho \frac{DF}{Dt} d\mathbf{x} \quad (1.15)$$

Die zweite Methode zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung beruht auf der Aussage: Betrachtet man ein zeitlich konstantes Gebiet  $R \subset \mathbb{R}^3$ , dann ist die Änderung der in diesem Gebiet enthaltenen Masse durch den Massenfluß durch den Rand  $\partial R$  des Gebietes gegeben. Als Formel ausgedrückt, heißt das

$$\frac{d}{dt} \int_R \rho d\mathbf{x} = - \int_{\partial R} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Aus dem Divergenzansatz folgt

$$\int_R \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

woraus wegen der Beliebigkeit von  $R$  die Kontinuitätsgleichung (1.13) folgt.

#### 1.4. Impulserhaltung

Wir wollen das zweite Newtonsche Gesetz für die Gesamtheit des in  $R(t)$  enthaltenen Materials formulieren. Daß das möglich ist, kann mit dem Impulserhaltungssatz (1.2) aus der Teilchenmechanik begründet werden, der es uns erlaubt, in einer Impulsbilanz die mikroskopischen Wechselwirkungskräfte zu vernachlässigen.

Wir definieren den Impuls des in  $R(t)$  enthaltenen Materials durch

$$\int_{R(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Der Impulserhaltungssatz besagt, daß die zeitliche Änderung dieser Größe durch die äußeren Kräfte gegeben ist, die auf das in  $R(t)$  enthaltene Material wirken. Es ist ein Postulat der Kontinuumsmechanik, daß zwei Arten von Kräften zu berücksichtigen sind. *Volumskräfte* werden beschrieben durch eine Kraftdichte  $\rho \mathbf{f}$ , die proportional zur Massendichte ist. Die auf  $R(t)$  wirkende Kraft ist also

$$\int_{R(t)} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x}$$

mit der Kraft pro Masseneinheit  $\mathbf{f}$ . Weiters lassen wir *Oberflächenkräfte* der Form

$$\int_{\partial R(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \, ds$$

zu. Der Vektor  $\mathbf{t}$  heißt *Spannungsvektor*. Er gibt die Kraft pro Flächeneinheit an, die am Punkt  $\mathbf{x} \in \partial R(t)$  auf das in  $R(t)$  enthaltene Material durch benachbartes Material ausgeübt wird. Umgekehrt übt das in  $R(t)$  enthaltene Material die Kraft  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$  auf die Umgebung aus.

Sowohl Volumskräfte als auch Spannungskräfte lassen sich durch mikroskopische Wechselwirkungen zwischen dem in  $R(t)$  enthaltenen Material und dem Rest der Welt erklären. Volumskräfte werden verursacht von Wechselwirkungskräften mit einem großen Wirkungsbereich, während Wechselwirkungen mit kleinem Wirkungsbereich im Kontinuumsmodell Spannungskräfte bewirken. Beispiele für die erste Gruppe sind Gravitationskräfte und die Kräfte zwischen elektrischen Ladungen. In die zweite Gruppe fallen die Wechselwirkungen zwischen den in Abschnitt 2.1 besprochenen harten Kugeln.

Das zweite Newtonsche Gesetz hat also die Form

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{R(t)} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial R(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \, ds.$$

Wendet man die Formel (1.15) auf die Komponenten der linken Seite an, so folgt

$$\int_{R(t)} \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial R(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \, ds. \quad (1.16)$$

Näheres über den Spannungsvektor läßt sich herausfinden, wenn man (1.16) für eine Familie  $\{R_L \mid L > 0\}$  von ähnlichen Mengen (siehe Anhang) mit gemeinsamem Mittelpunkt betrachtet, wobei die das Gebiet beschreibende Funktion  $f_L$  (siehe Anhang) von der Form  $f_L(\phi, \theta) = L f_1(\phi, \theta)$  ist. Aus dem Lemma im Anhang folgt für das Volumen von  $R_L$  die Formel  $\mathcal{V}[R_L] = L^3 \mathcal{V}[R_1]$ .

Ersetzen wir in (1.16)  $R(t)$  durch  $R_L$ , dann folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, daß die linke Seite für  $L \rightarrow 0$  von der Ordnung  $O(L^3)$  ist. Dividieren wir die Gleichung durch  $L^2$  und lassen  $L \rightarrow 0$ , dann folgt

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \int_{\partial R_L} \mathbf{t} \, ds = 0. \quad (1.17)$$

Diese Gleichung heißt *Prinzip des lokalen Spannungsgleichgewichtes*. Sie besagt, daß—lokal betrachtet—die Spannungskräfte einander aufheben. Durch Anwendung von (1.17) auf spezielle Familien  $\{R_L\}$  werden wir wichtige Aussagen über den Spannungsvektor herleiten.

### Abbildung 1.1

Sei  $R_L(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  ein Quader mit quadratischer Grundfläche, die einen Eckpunkt in  $\mathbf{x}$  hat und normal auf  $\mathbf{n}$  steht. Die Seitenlänge sei  $L$ . Die Höhe des Quaders sei  $\varepsilon L$  mit  $\varepsilon \ll 1$ . Offensichtlich ist  $\{R_L(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \mid L > 0\}$  eine Familie von ähnlichen Mengen mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt, daß für das Integral in (1.17)

$$\int_{\partial R_L} \mathbf{t} \, ds = L^2(\mathbf{t}(\mathbf{x}_D, t, \mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}_G, t, -\mathbf{n}) + O(\varepsilon))$$

gilt, wobei  $\mathbf{x}_G$  und  $\mathbf{x}_D$  Punkte auf der Grund- und Deckfläche sind. Da diese Punkte für  $L \rightarrow 0$  gegen  $\mathbf{x}$  konvergieren, folgt mit (1.17) aus den sukzessiven Grenzübergängen  $L \rightarrow 0$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Gleichung

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (1.18)$$

Das ist die Kontinuumsversion des dritten Newtonschen Gesetzes.

Nun wählen wir  $R_L(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  als Tetraeder mit einem Eckpunkt in  $\mathbf{x}$ , sodaß  $\mathbf{n}$  der nach außen gerichtete Normalvektor auf die gegenüberliegende Seitenfläche mit Flächeninhalt  $S$  ist. Die übrigen Seitenflächen mit Flächeninhalt  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  seien normal auf die kanonischen Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Der Abstand zwischen  $\mathbf{x}$  und der geneigten Seitenfläche sei so gewählt, daß  $S = L^2$  gilt (siehe Abb. 2.1). Auch in diesem Fall ist offensichtlich, daß  $\{R_L(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \mid L > 0\}$  eine Familie von ähnlichen Mengen mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  ist.

Wegen des Mittelwertsatzes ist die Kraft, die auf die Seitenfläche mit Flächeninhalt  $S_i$  wirkt, gegeben durch

$$S_i \mathbf{t}(\mathbf{x}_i, t, -\mathbf{e}_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei  $\mathbf{x}_i$  ein Punkt auf dieser Fläche ist. Die auf die geneigte Seitenfläche wirkende Kraft ist

$$S \mathbf{t}(\mathbf{x}_0, t, \mathbf{n})$$

mit dem in der Fläche liegenden Punkt  $\mathbf{x}_0$ . Da  $S_i$  die Projektion von  $S$  auf die  $i$ -te Koordinatenebene ist, gilt  $S_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)S = n_i S$ . Aus dieser Beziehung und (1.17) folgt

$$\sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = 0,$$

oder, wegen (1.18),

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i). \quad (1.19)$$

Sei  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  die Matrix mit den Zeilen  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , d.h.

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i),$$

dann können wir (1.19) schreiben als

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}, t), \quad (1.20)$$



wobei  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  der Vektor mit den Komponenten  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_j = \sum_{i=1}^3 n_i T_{ij}$  ist. Die Matrix  $\mathbf{T}$  heißt *Spannungstensor*. Verwendet man (1.20) und den Divergenzsatz in (1.16), so erhält man

$$\int_{R(t)} \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T} \right) d\mathbf{x} = 0$$

und damit wegen der Beliebigkeit von  $R(t)$  die *Cauchyschen Differentialgleichungen*

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.21)$$

die die Kontinuumsversion des Impulserhaltungssatzes (1.2) darstellen. Die Anwendung der Divergenz auf eine Matrix ist komponentenweise definiert durch

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}.$$

Addiert man (1.21) und das Produkt der Kontinuitätsgleichung (1.13) mit  $\mathbf{v}$ , so erhält man die Divergenzform der Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) = \rho \mathbf{f}. \quad (1.22)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{xy}^{tr}$  das Tensorprodukt zweier Vektoren, d.h. die Matrix mit den Elementen  $x_i y_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Der Ausdruck  $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  kann als *Impulsflußdichte* interpretiert werden. So gesehen liefern auch die Spannkraften einen Beitrag zum Impulsfluß.

### 1.5. Drehimpulserhaltung

Wir definieren den Drehimpuls des in  $R(t)$  enthaltenen Materials um den ruhenden Punkt  $\mathbf{x}^{(0)}$  durch

$$\int_{R(t)} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{v} d\mathbf{x},$$

und auf ähnliche Art die durch Volums- und Spannkraften verursachten Drehmomente. Das Postulat der Drehimpulserhaltung nimmt die Form

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{R(t)} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial R(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{t} ds \quad (1.23)$$

an. Mit Hilfe der Formel (1.15) kann man zeigen, daß die linke Seite dieser Gleichung geschrieben werden kann als

$$\int_{R(t)} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x}. \quad (1.24)$$

Wir wollen uns mit der ersten Komponente der Vektorgleichung (1.23) beschäftigen. Für die erste Komponente des Vektors  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{t}$  gilt

$$\begin{aligned} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{t})_1 &= (x_2 - x_2^{(0)}) \sum_{i=1}^3 n_i T_{i3} - (x_3 - x_3^{(0)}) \sum_{i=1}^3 n_i T_{i2} \\ &= \sum_{i=1}^3 n_i [(x_2 - x_2^{(0)}) T_{i3} - (x_3 - x_3^{(0)}) T_{i2}]. \end{aligned}$$

Der Divergenzsatz impliziert daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial R(t)} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{t})_1 ds &= \int_{R(t)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [(x_2 - x_2^{(0)}) T_{i3} - (x_3 - x_3^{(0)}) T_{i2}] d\mathbf{x} \\ &= \int_{R(t)} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_i} - (x_3 - x_3^{(0)}) \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_i} \right) + T_{23} - T_{32} \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die erste Komponente von (1.23) für eine Familie  $\{R_L\}$  von ähnlichen Mengen, die sich für  $L \rightarrow 0$  auf den Punkt  $\mathbf{x}^{(0)}$  zusammenziehen:

$$\int_{R_L} \rho \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_1 d\mathbf{x} = \int_{R_L} \rho ((\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \times \mathbf{f})_1 d\mathbf{x} \\ + \int_{R_L} \left[ \sum_{i=1}^3 \left( (x_2 - x_2^{(0)}) \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_i} - (x_3 - x_3^{(0)}) \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_i} \right) + T_{23} - T_{32} \right] d\mathbf{x} \quad (1.25)$$

Alle Integranden, die Komponenten von  $\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}$  als Faktoren enthalten, sind  $O(L)$  für  $L \rightarrow 0$ . Division von (1.25) durch  $L^3$  und  $L \rightarrow 0$  impliziert wegen des Mittelwertsatzes

$$T_{23}(\mathbf{x}^{(0)}, t) = T_{32}(\mathbf{x}^{(0)}, t).$$

Analog zeigt man  $T_{12} = T_{21}$  und  $T_{13} = T_{31}$ . Das bedeutet, daß die Forderung der Drehimpulserhaltung die Symmetrie des Spannungstensors impliziert:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{tr} \quad (1.26)$$

### 1.6. Energieerhaltung

Inspiziert durch das Resultat (1.4) aus der Teilchenmechanik postulieren wir die Energieerhaltungsgleichung für das in  $R(t)$  enthaltene Material:

$$\frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) d\mathbf{x} = \int_{R(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial R(t)} (-h + \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) ds \quad (1.27)$$

Der Integrand auf der linken Seite ist die Energiedichte mit der inneren Energie pro Masseneinheit  $e(\mathbf{x}, t)$ . Weiters enthält die Gleichung die Arbeit, die von den Volums- und Spannungs Kräften verrichtet wird. Die Größe  $h$  ist der durch Wärmeleitung verursachte Energieverlust durch den Rand von  $R(t)$ .

Um aus (1.27) eine Differentialgleichung herzuleiten, ziehen wir mit Hilfe von (1.12) die Zeitableitung auf der linken Seite in das Integral. Die Randintegrale versuchen wir als Volumsintegrale zu schreiben. Es gilt

$$\int_{\partial R(t)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\partial R(t)} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 n_i T_{ij} v_j ds = \int_{R(t)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 T_{ij} v_j \right) d\mathbf{x} \\ = \int_{R(t)} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}.$$

Analog zum Beweis der Existenz des Spannungstensors zeigen wir

$$h = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$$

durch Anwendung von (1.27) auf Familien von ähnlichen Mengen. Der Vektor  $\mathbf{q}$  ist die *Wärmeflußdichte*. Damit kann auch das Oberflächenintegral von  $h$  in ein Volumsintegral verwandelt werden. Da  $R(t)$  in (1.27) beliebig ist, folgt die Energieerhaltungsgleichung

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}). \quad (1.28)$$

Unter Verwendung der Massenerhaltung läßt sich auch für diese Gleichung eine Divergenzform angeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) + \mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.29)$$

## 1.7. Konstitutive Gleichungen

Fassen wir die in den Abschnitten 2.3–2.6 hergeleiteten Gleichungen noch einmal zusammen.

Massenerhaltung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.30)$$

Impulserhaltung:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1.31)$$

Drehimpulserhaltung:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{tr} \quad (1.32)$$

Energieerhaltung:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \quad (1.33)$$

Die Unbekannten sind die Dichte  $\rho$ , die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , der Spannungstensor  $\mathbf{T}$ , die spezifische innere Energie  $e$  und die Wärmeflußdichte  $\mathbf{q}$ . Das sind 17 unbekannte skalare Funktionen. Die Drehimpulserhaltung eliminiert 3 Unbekannte. Weiters haben wir 5 Differentialgleichungen zur Verfügung. Das zeigt, daß das System (1.30)–(1.33) stark unterbestimmt ist. Das ist auch nicht anders zu erwarten, wenn diese Gleichungen für eine große Klasse von Materialien gültig sein sollen. Wir haben noch keinerlei Informationen über die Art des Materials verwendet, also z.B. ob es fest, flüssig oder gasförmig ist.

Um das Gleichungssystem zu schließen, ist die Angabe von zusätzlichen Gleichungen, sogenannten *konstitutiven Beziehungen*, notwendig. Wir führen einige Beispiele dafür an:

In einem *starrten Körper* ist der Abstand zwischen zwei Teilchen konstant.

In einem *inkompressiblen Medium* ist die Dichte jedes Teilchens konstant. Das wird durch die Gleichung  $D\rho/Dt = 0$  ausgedrückt.

Für ein *reibungsfreies Fluid* (Flüssigkeit oder Gas) ist der Spannungsvektor gegeben durch  $\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$ , wobei  $p$  der Druck ist.

Das *Newton-Fouriersche Abkühlungsgesetz* besagt, daß die Wärmeflußdichte proportional zum Gradienten der Temperatur ist:  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , wobei  $T$  die Temperatur und  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit ist.

Für ein *ideales Gas* gilt die Beziehung  $p = \rho RT$ , in der  $R$  eine von dem Gas abhängige Konstante ist. Weiters ist oft die Annahme begründet, daß Änderungen in der inneren Energie proportional zu Änderungen in der Temperatur sind:  $e = c_v T + \text{const}$ , mit der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen  $c_v$ .

Konstitutive Gleichungen sind auf viele verschiedene Arten entstanden. Manche sind Vereinfachungen (Störungen) der wahren Situation. Manche können als durch Experimente gerechtfertigt gelten. In den wenigsten Fällen gibt es eine deduktive Herleitung aus dem mikroskopischen Verhalten.

## Anhang: Ähnliche Gebiete

**Definition.** Eine abgeschlossene Menge  $R \subset \mathbb{R}^3$  heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in R$  (genannt *Mittelpunkt*) gibt, sodaß für jeden anderen Punkt  $\mathbf{x} \in R$  die Strecke zwischen  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}$  in  $R$  enthalten ist.

Seien  $(r, \phi, \theta)$  sphärische Koordinaten mit Zentrum in  $\mathbf{x}_0$ . Dann gibt es eine Funktion  $f(\phi, \theta)$ , sodaß  $R$  gegeben ist durch

$$0 \leq r \leq f(\phi, \theta) \quad \text{für } 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

**Definition.** Zwei sternförmige Mengen  $R_1$  und  $R_2$  heißen *ähnlich*, wenn sie nach eventueller Rotation und Translation durch die Ungleichungen

$$0 \leq r \leq f_i(\phi, \theta), \quad i = 1, 2$$

beschrieben werden können, wobei  $f_2 = Lf_1$  für eine positive Konstante  $L$  gilt.

**Lemma.** Sei  $\mathcal{V}[R_i]$  das Volumen von  $R_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gilt für zwei ähnliche Mengen  $R_1$  und  $R_2$

$$\mathcal{V}[R_2] = L^3 \mathcal{V}[R_1]$$

mit der Konstanten  $L$  aus obiger Definition.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[R_2] &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f_2(\phi, \theta)} r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f_2(\phi, \theta))^3 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{L^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f_1(\phi, \theta))^3 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = L^3 \mathcal{V}[R_1]. \end{aligned}$$

■