

Aufgabenset 1 (abzugeben 16.03.2012 an LK@wacc.de)

Aufgabe 1 Betrachten Sie die Cashflows der Abbildung 1 (Auf- und Abwärtsbewegungen finden mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt).¹ Nehmen Sie an, dass die Cashflows die folgende Relation erfüllen

$$\widetilde{FCF}_t^u = E[\widetilde{FCF}_{t+1}^u | \mathcal{F}_t].$$

Ersetzen Sie die Fragezeichen.

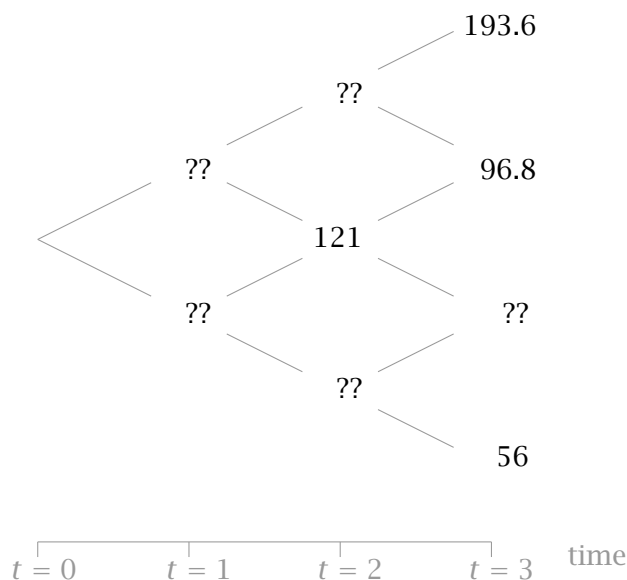


Abbildung 1: Cashflows in Aufgabe 1.

Aufgabe 2 a) Nehmen Sie an, dass es bei den Cashflows der vorigen Aufgabe zwei Wahrscheinlichkeiten P (50:50 für Auf- und Abbewegung) und Q (10:90 für Auf- und Abbewegung) existieren. Beweisen Sie, dass

$$E_P \left[E_Q \left[\widetilde{FCF}_2^u | \mathcal{F}_1 \right] | \mathcal{F}_0 \right] = E_Q \left[E_P \left[\widetilde{FCF}_2^u | \mathcal{F}_1 \right] | \mathcal{F}_0 \right] \quad (1)$$

gilt.

1. In dieser und der folgenden Aufgabe haben die freien Cashflows einen Index u . Wir werden erst später klären können, welche Bedeutung dieser Index besitzt.

b) Beachten Sie nun einen Binomialmodell der Form 2. Beweisen Sie jetzt, dass

$$E_P \left[E_Q \left[\widetilde{FCF}_2^u | \mathcal{F}_1 \right] | \mathcal{F}_0 \right] \neq E_Q \left[E_P \left[\widetilde{FCF}_2^u | \mathcal{F}_1 \right] | \mathcal{F}_0 \right]$$

gelten kann (ein konkretes Gegenbeispiel genügt).

c) Welche Eigenschaft ist entscheidend dafür, dass (1) in einem allgemeinen Setup (also ohne unsere gegebenen Zahlen) gilt? Begründen Sie Ihre Aussage.

Zeigen Sie insbesondere, dass für den Fall $\widetilde{FCF}^u(ud) \neq \widetilde{FCF}^u(du)$ notwendigerweise beide Wahrscheinlichkeiten P und Q identisch sein müssen, damit die Gleichung (1) gilt.

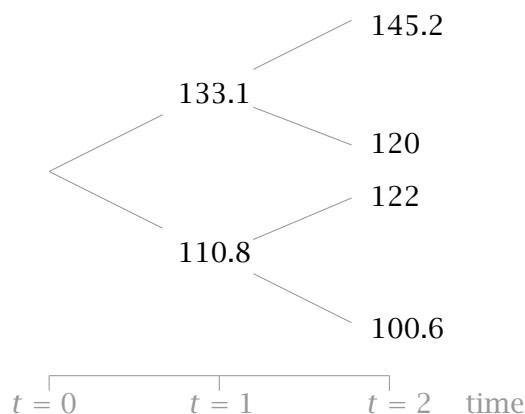


Abbildung 2: Cashflows in Aufgabe 2.

Aufgabe 3 In der folgenden Aufgabe soll gezeigt werden, dass bei bekannten erwarteten Cashflows (dies sind die Größen, von denen Praktiker ausgehen)

$$FCF_0^u, E \left[\widetilde{FCF}_1^u \right], E \left[\widetilde{FCF}_2^u \right] \dots$$

immer ein Binomialmodell erstellt werden kann, das schwach auto-regressive Cashflows aufweist (dies ist die Annahme, von der wir ab der nächsten Vorlesung ausgehen werden).

Betrachten Sie ein Unternehmen, das folgende erwarteten Cashflows aufweist: $FCF_0^u = 100$, $E \left[\widetilde{FCF}_1^u \right] = 110$ und $E \left[\widetilde{FCF}_2^u \right] = 100$. Zugleich soll für die tatsächlichen Cashflows die Bedingung

$$(1 + g_t) \widetilde{FCF}_t^u = E \left[\widetilde{FCF}_{t+1}^u | \mathcal{F}_t \right] \tag{2}$$

erfüllt sein.

Unterstellen Sie, dass die Cashflows einem Binomialbaum mit gleichwahrscheinlicher Auf- und Abbewegung und (zeitabhängigen) Wachstumsraten u_t, d_t folgen:

$$\widetilde{FCF}_{t+1}^u = \begin{cases} u_t \cdot \widetilde{FCF}_t^u & \text{wenn aufwärts,} \\ d_t \cdot \widetilde{FCF}_t^u & \text{wenn abwärts.} \end{cases}$$

- a)** Geben Sie einen konkreten Binomialbaum an, der genau die genannten erwarteten Cashflows besitzt und die Bedingung (2) erfüllt.
- b)** Wenn keine konkreten Erwartungswerte wie oben vorgegeben sind: Welchen allgemeinen Bedingungen müssen die Parameter u_t, d_t genügen, damit die Annahme (2) erfüllt ist? Unter welchen Voraussetzungen an u_t, d_t werden Sie also immer eine Lösung für a) finden?

Aufgabenset 2 (abzugeben 30.03.2012 an LK@wacc.de)

Aufgabe 4 Betrachten Sie ein Trinomialmodell der Cashflows wie in Abbildung 3. Hier sind nicht zwei, sondern drei zukünftige Bewegungen möglich: “auf”, “mittel” und “ab”. Alle mögen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten. Außerdem soll $ud = m^2$ gelten. Welche weiteren Annahmen an u, m, d sind notwendig, damit hier

$$E[\widetilde{FCF}_2^u | \mathcal{F}_1] = \widetilde{FCF}_1^u$$

gilt?

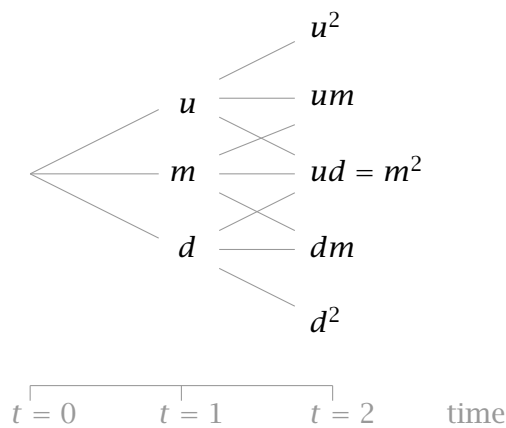


Abbildung 3: Trinomialbaum der Cashflows in Aufgabe 4.

Aufgabenset 3 (abzugeben 07.04.2012 an LK@wacc.de)

Aufgabe 5 Eine verschuldete Unternehmung existiert bis zum Zeitpunkt $T = 3$. Nehmen Sie an, dass die Q -Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung gerade 0.25 ist und der risikolose Zins 10% beträgt, der Steuersatz ist 50%. Berechnen Sie das tax shield $V_0^l - V_0^u$ wenn die Verschuldungspolitik so wie in Abbildung 4 angegeben ist.

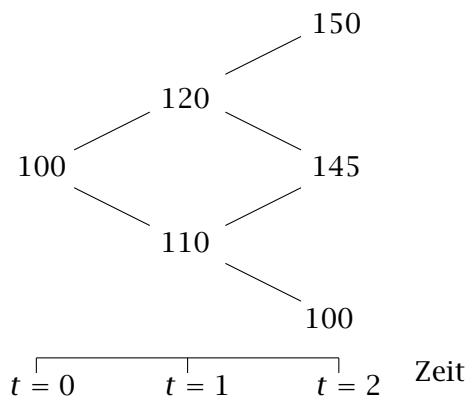


Abbildung 4: Verschuldung \tilde{D}_t in Aufgabe 5.

Aufgabe 6 Gehen Sie von einer Unternehmung aus, die unverschuldete Cashflows wie in Abbildung 5 besitzt. Die Eigenkapitalkosten betragen $k^{E,u} = 20\%$, die beiden Abwärts- und Aufwärtsbewegungen finden mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5 statt. Der risikolose Zinssatz ist $r_f = 10\%$, der Steuersatz $\tau = 34\%$.

Eine verschuldete Unternehmung hat einen Fremdkapitalbestand $D_0 = 0$ im Zeitpunkt $t = 0$.

- a) Notieren Sie eine Gleichung für den Wert der verschuldeten Unternehmung in $t = 0$, wenn $\tilde{D}_1(u)$ und $\tilde{D}_1(d)$ gegeben sind.
- b) Nehmen Sie an, dass $E[\tilde{D}_1] = 100$ gilt. Welche Verschuldungspolitik (d.h. welche Werte $\tilde{D}_1(u)$ und $\tilde{D}_1(d)$) ergeben den höchsten Wert für das verschuldete Unternehmen, ermitteln Sie diesen?

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich bei den Wahrscheinlichkeiten nicht um die risikoneutralen, sondern die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten handelt. Machen Sie sich klar, dass die Verschuldung nicht negativ werden kann.

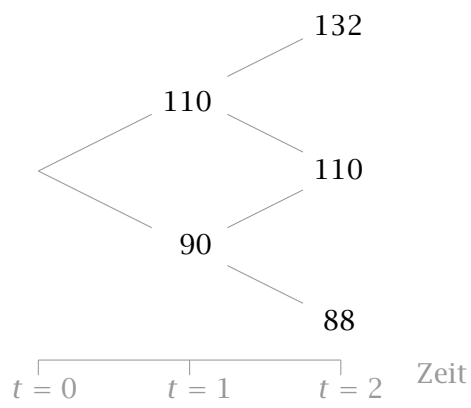


Abbildung 5: Cashflows in Aufgabe 6.

Aufgabenset 4 (abzugeben 14.04.2012 an LK@wacc.de)

Aufgabe 7 Fernandez hat 2005 folgende allgemeine Aussage für ein tax shield veröffentlicht:² Aus

$$\tilde{V}_t^l = \tilde{V}_t^u + \frac{\tau r_f E_Q [\tilde{D}_t | \mathcal{F}_t]}{1 + r_f} + \dots + \frac{\tau r_f E_Q [\tilde{D}_{T-1} | \mathcal{F}_t]}{(1 + r_f)^{T-t}}. \quad (3)$$

folgt die Gleichung

$$\tilde{V}_t^l = \tilde{V}_t^u + \tau \tilde{D}_t + \sum_{s=t+1}^{T-1} \frac{\tau E_Q [\tilde{D}_s - \tilde{D}_{s-1} | \mathcal{F}_t]}{(1 + r_f)^{s-t}}.$$

Beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 8 Betrachten Sie das unendliche Beispiel mit konstantem Fremdkapitalbestand (autonome Finanzierung, unendliche Laufzeit). Zeigen Sie, dass jetzt die dividend-price ratio der verschuldeten Unternehmung keine deterministische Größe sondern eine Zufallsvariable ist, wenn $r_f \neq k^{E,u}$ gilt.

2. Fernandez, Pablo (2005) „Reply to Comment on ‚The value of tax shields is not equal to the present value of tax shields‘“. Quarterly Journal of Economics and Finance, 45, 188-192. Die erste Fassung seiner Arbeit aus dem Jahr 2004 enthielt noch einen Fehler, der seinerzeit eine intensive Debatte auslöste.

Aufgabenset 5 (wird in Präsenzveranstaltung diskutiert)

Aufgabe 9 Wir betrachten jetzt ein ausführliches Beispiel analog der Veröffentlichung in der Festschrift Drukarczyk.³ Betrachten Sie eine Unternehmung, deren unverschuldete Cashflows wie in Abbildung 6 gestaltet sind.

Der Steuersatz beträgt 50% und der risikolose Zinssatz ist 10%. Nehmen Sie weiter an, dass $WACC = 18\%$ gilt. Sie haben nun keine weiteren Angaben über die Kapitalkosten des unverschuldeten Unternehmens $k^{E,u}$.⁴ Wir betrachten jetzt mehrere DCF Methoden aus der Vorlesung.

- a) Berechnen Sie den Unternehmenswert für $t = 0, 1$ mit der WACC-Gleichung.
- b) Überzeugen Sie sich, dass wir bisher keine Aussagen über die Höhe der Verschuldung getroffen haben. Vielmehr nehmen wir nun an, dass in $t = 0, 1$ die folgende Verschuldung erfolgt

$$D_0 = 50, \quad \tilde{D}_1 = \begin{cases} 60, & \text{wenn aufwärts,} \\ 40, & \text{wenn abwärts.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fremdkapitalquote in $t = 1$ und zeigen Sie, dass die Unternehmung nicht marktwertorientiert finanziert ist.

- c) Berechnen Sie die WACC-Typ 1 (also k^\emptyset) in $t = 1$ und die Eigenkapitalkosten $k^{E,l}$ der verschuldeten Unternehmung und zeigen Sie, dass diese zufällig sind.

Aufgabe 10 Betrachten Sie eine unendlich lang lebende Unternehmung mit schwach autoregressiven Cashflows, wobei $g = 0$ gelten soll (die Eigenkapitalkosten bei reiner Eigenfinanzierung seien konstant und gleich $k^{E,u}$). Der Fremdkapitalbestand ist konstant und gleich D (autonome Finanzierung). Zeigen Sie, dass die Fremdkapitalquote \tilde{l}_t für $t \geq 1$ eine Zufallsvariable ist.

3. Siehe dazu <http://www.andreasloeffler.de> und dann Downloads sowie *L. Kruschwitz und A. Löffler: DCF = APV + (FTE & TCF & WACC)?*.

4. Wir gehen **nicht** davon aus, dass das Unternehmen eine marktwertorientierte Finanzierung betreibt, also kann \tilde{l} zufällig sein!

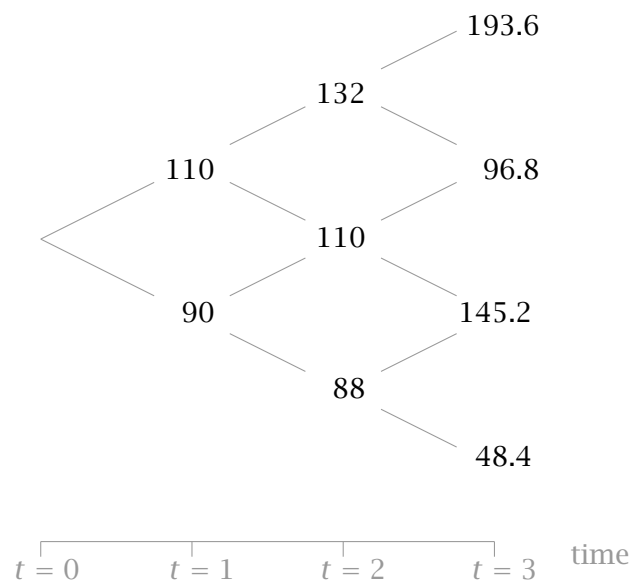


Abbildung 6: unlevered Cashflows in Aufgabe 9.

Aufgabenset 6 (wird in Präsenzveranstaltung diskutiert)

Aufgabe 11 Nehmen Sie an, dass $k^{E,u} > r_f$ gilt. Zeigen Sie, dass die WACC aus der Miles-Ezzell-Anpassungsgleichung immer größer sind als die "MoMi-WACC" $k^{E,u}(1 - \tau l_0)$ wenn $l_0 = l$ der Verschuldungsgrad des Unternehmens ist

Aufgabe 12 Betrachten Sie das unendliche Beispiel und zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\tilde{V}_t^l = \frac{\tilde{V}_t^u}{1 - \frac{1+k^{E,u}}{1+r_f} \frac{r_f}{k^{E,u}} \tau l}.$$

Dies ist das Hauptresultat von Ezzell/Miles (1985, *Journal of Finance*).

Aufgabenset 7 (wird in Präsenzveranstaltung diskutiert)

Aufgabe 13 Bisher haben wir in der Vorlesung autoregressive Cashflows betrachtet. Unterstellen Sie nun Cashflows, die einen zusätzlichen additiven Term (und dafür kein Wachstum) aufweisen

$$E[\widetilde{FCF}_{t+1}^u | \mathcal{F}_t] = \widetilde{FCF}_t^u + C$$

für $C > 0$. Sie sollen zeigen, welche Auswirkungen dieser Term auf die Gordon-Shapiro-Formel hat.

Dazu betrachten wir ein unverschuldetes Unternehmen mit konstanten Kapitalkosten $k^{E,u}$ und freien Cashflows wie oben.

- a) Ermitteln Sie $E[\widetilde{FCF}_s^u | \mathcal{F}_t]$ (wobei $s \geq t$) als Funktion des Cashflows \widetilde{FCF}_t^u .
- b) Setzen Sie dies in die allgemeine Bewertungsgleichung ein und beweisen Sie analog zur Gordon-Shapiro-Formel, dass folgender Zusammenhang gilt

$$\tilde{V}_t^u = \frac{\widetilde{FCF}_t^u}{k^{E,u}} + \frac{1 + k^{E,u}}{(k^{E,u})^2} C$$

- c) Ermitteln Sie die Kursgewinnrendite $\frac{E[\tilde{V}_{t+1}^u | \mathcal{F}_t]}{\tilde{V}_t^u} - 1$ des Assets. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem klassischen Gordon-Shapiro-Fall.

Anmerkung. Die Relation

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{(1+x)^s} = \frac{1+x}{x^2}$$

kann sich als hilfreich erweisen.

Aufgabe 14 Nehmen Sie an, dass die Cashflows des unverschuldeten Unternehmens schwach autoregressiv sind. Unter welchen Voraussetzungen an das Fremdkapital bzw. an die Verschuldungspolitik folgt, dass auch die Cashflows des verschuldeten Unternehmens \widetilde{FCF}_t^l schwach autoregressiv sind?

Aufgabenset 1 (Lösung)

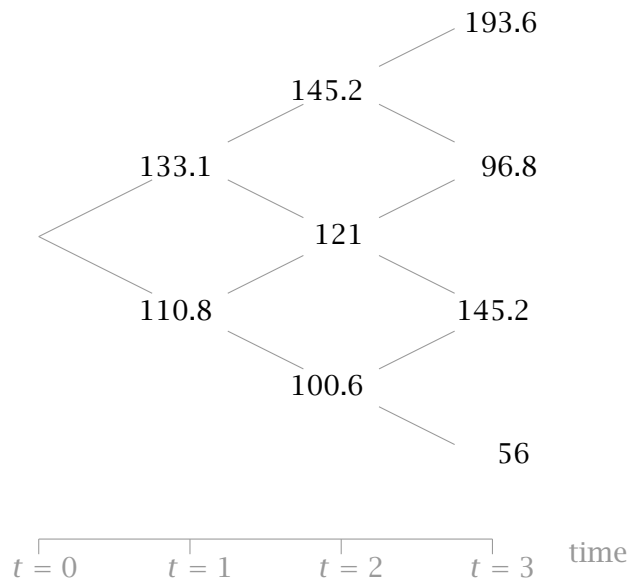


Abbildung 7: Cashflows in Aufgabe 1.

Aufgabe 1